KETANG XINZUOBIAO

课堂新坐标

创新"1+1"超值升级版

丛书主编 王广祥

数学

全国版·二轮专题

黄河出版社

课堂新坐标
KETANG XINZUOBIAO

创新"1+1"超值升级版

全国版·二轮专题

数学

从书主编　王广祥
本册主编　张万俊
副 主 编　张明珠　韦　红

黄河出版社

尊重知识产权
享受正版品质

责任编辑：吴兴中 张宪峰　封面设计：洪　钧

图书在版编目(CIP)数据

课堂新坐标．二轮专题．数学／王广祥主编；
张万俊分册主编．—济南：黄河出版社，2007.10
ISBN 978-7-80152-900-8

I. 课…
II. ①王… ②张…
III. 数学课－高中－升学参考资料
IV. G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 159907 号

KETANG XINZUOBIAO

书　名	课堂新坐标·二轮专题·数学
主　编	王广祥
出　版	黄河出版社
发　行	黄河出版社发行部
	（济南市英雄山路 21 号　250002）
印　刷	山东省汶上新华印刷有限公司
规　格	880×1230 毫米　16 开本
	21 印张　840 千字
版　次	2007 年 10 月第 1 版
印　次	2007 年 10 月第 1 次印刷
印　数	1-30000 册
书　号	ISBN 978-7-80152-900-8/G·193
总定价	326.00 元

（如有倒页、缺页、白页，请直接与印刷厂联系调换）

序 PREFACE

世界因你我他而丰富
高考因新坐标而精彩

秋天，我们一起唱响成功……

“天上秋期近，人间月影清。”夏天刚一转身，秋天便迫不及待地“不请自来”！

“一年好景君须记，最是橙红橘绿时。”

秋天是美好的季节。

秋风温柔和美，秋雨缠绵多情；秋色七彩纷呈，秋声蛙唱蝉鸣；秋月千里如练，秋日一轮，天高气清……

“万美之中秋为最。”秋天的万物中，蕴含着一份不需要任何东西来装饰的洒脱和孤傲，充溢着无以言喻的雄壮与豪情。

“夫春气发而百草生，正得秋而万宝成。”

秋天，是收获的季节。

冥冥秋季，似有一种豁然开朗的感觉，其真正的内涵在于它成熟的魅力。秋天的诗中漂浮着阵阵稻香；秋天的情感流溢着苦尽甘来的味道；秋天的生活蕴含着沉甸甸的永恒。

人生四季，万物皆然。

难以忘怀，春天般清纯的高一年级，眼里闪亮着好奇，心中蕴蓄着勃勃的生机；怎能忘记，夏天般绚烂的高二年级，火热，奔放，充满着释放不尽的能量……

我们曾经在春天的和风细雨中耕耘播种，我们曾经在夏天的烈日下挥汗劳动，今天，我们走到了秋天，即将迎来一个丰硕的收成……

汲取文化强省的文化底蕴，经过多年的积淀和反复的锤炼，我们精心为您打造的《课堂新坐标》，走进了又一个收获的季节，将见证您人生的成功与辉煌。

更加完善、科学、合理的体系。栏目的设置，内容的划分，时间的安排，练习的设计，都依据最新的高考要求、高考模式以及各省的高考实际，进行了修正，变得更加科学、规范，更加符合学生的学习实际。

更加明确的导向。多年的积累，长期的摸索，无论是公司的策划人员还是编者，对教材内容、考试方式、考试内容的把握都得到很大的提升，因而知识、能力的导向将更加明确，更有针对性。

更加新颖的材料。全面吸收2007年高考试题和各地最新模拟试题的精髓，全新设计新的问题背景，使时代活水渗透到教学、训练的每一个角落。

更加精准的内容。内容的选择更接近高考的实际，讲授、训练的容量更趋合理，差错率控制在国家规定的最小范围之内。

秋天，这注定是一个思绪活跃的季节，注定是一个情感迸发的季节，注定是一个收获成功的季节……

走进秋天，你就走进了金色辉煌的梦，走进了悠扬愉悦的歌，走进了美好清灵的诗，走进了坚强永恒的生命。

在这个令人遐想无穷的季节里，让我们携起手来，边走边唱，一直唱到深秋霜降，唱到冬雪茫茫，唱到又一个春来花香……

记住，有《课堂新坐标》与您一起行走，一起歌唱，一起成长，您的求学之路，就不再遥远，不再漫长……

《课堂新坐标》编辑委员会

2007.9

目录

CONTENTS

全国二轮复习

CONTENTS

目录

全国二轮复习

第一部分

函数与导数

第一讲 集合中的创新题

典例精讲

近几年，为了考查学生在新的问题情景下知识的迁移、创新能力，各地的高考模拟题和高考试题中多次出现了不受大纲字句的约束，然而所考查的内容大体在高中数学范围内的问题，我们称其为创新型问题. 创新型试题编制的情景新颖，突出考查学生灵活运用所学知识的能力，对于培养学生的创造性思维非常有用. 下面选取与集合相关的创新型试题进行评析.

一、定义型试题

这类试题的特点是：通过给出新的数学概念或新的运算方法，让学生在新的情景下完成某种推理证明或指定要求.

【例①】（2007·陕西·理 12）设集合 $S=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$，在 S 上定义运算 $\oplus$ 为：$A_i\oplus A_j=A_k$，其中 k 为 $i+j$ 被 4 除的余数，$i,j=0,1,2,3$，则满足关系式 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x(x\in S)$ 的个数为

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

【解析】 验证法：

$(A_0\oplus A_0)\oplus A_2=A_0\oplus A_2=A_2\neq A_0$

$(A_1\oplus A_1)\oplus A_2=A_2\oplus A_2=A_0$

$(A_2\oplus A_2)\oplus A_2=A_0\oplus A_2=A_2\neq A_0$

$(A_3\oplus A_3)\oplus A_2=A_2\oplus A_2=A_0$

$(A_4\oplus A_4)\oplus A_2=A_0\oplus A_2=A_2\neq A_0$

$\therefore x=A_1$ 或 $x=A_3$，故选 C.

【答案】 C

二、信息迁移型试题

这类试题的特点是：试题通过定义新的概念、运算或给定新的模型，要求考生在理解题目的基础上，联系所学的知识，实现信息的迁移.

【例②】 若集合 A_1，A_2 满足 $A_1\cup A_2=A$，则称 (A_1,A_2) 为集合 A 的一种分拆；并规定：当且仅当 $A_1=A_2$ 时，(A_1,A_2) 与 (A_2,A_1) 为集合 A 的同一种分拆，则集合 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 的不同分拆种数为________种.

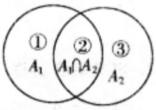

图 1－1－1

【解】 如图 1－1－1 所示，我们可以把 $A_1\cup A_2$ 分成三个部分. 第①部分表示 $(\complement_A A_2)\cap A_1$，第②部分表示 $A_1\cap A_2$，第③部分表示 $(\complement_A A_1)\cap A_2$，那么，题目就可以迁移为"把 a_1，a_2，a_3 三个元素分别放进三部分，共有多少种方法"这是一个我们非常熟悉的问题. 容易得到迁移后的问题的方法种数为 $3^3=27$ 种，所以集合 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 的不同分拆种数为 27.

三、条件开放型试题

这类试题的特点是：结论非常明确，但是条件不明确或不充分，而且满足题目的条件并不惟一，只要求考生找出其中一个正确的条件即可.

【例③】 若集合 A,B 满足条件________，则 $A\subseteq B$.

【解】 可填入 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$，$A\cap(\complement_U B)=\varnothing$ 等等，条件并不惟一.

四、条件充要型试题

这类试题的特点是：以某个知识点为载体，要求考生对所给的条件与结论进行充分性和必要性的研究.

【例④】 P,Q,M 是集合，那么"$P\cap M=Q\cap M$"是"$P=Q$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【解】 显然，当 $P=Q$ 时，有 $P\cap M=Q\cap M$；取 $P=\{1\}$，$Q=\{1,4\}$，$M=\{1,2,3\}$，则有 $P\cap M=Q\cap M=\{1\}$，但是 $P\neq Q$，由此

“$P\cap M=Q\cap M$”是“$P=Q$”的必要而不充分条件，选 B.

【答案】 B

五、结论探索型试题

这类试题的特点是：题目本身没有给出明确的结论，只是提出几种可能性，需要考生自己去探求结论，并作出适当的证明.

【例⑤】已知全集 $I=\{1,3,x^3+3x^2+2x\}$，$A=\{1,|2x-1|\}$，如果 $\complement_I A=\{0\}$，则这样的实数 x 是否存在？若存在，求出 x；若不存在，请说明理由.

【解】 因为 $\complement_I A=\{0\}$，所以 $0\in I$，但是 $0\notin A$. 故 $x^3+3x^2+2x=0$，即 $x(x+1)(x+2)=0$，所以 $x_1=0,x_2=-1,x_3=-2$.

当 $x_1=0$ 时，$|2x-1|=1$，即 $1\in A$，这与元素的互异性矛盾；

当 $x_2=-1$ 时，$|2x-1|=3$，符合题意；

当 $x_3=-2$ 时，$|2x-1|=5$，而 $5\notin I$.

综上所述，实数 x 是存在的，并且只能为 -1.

六、结论开放型试题

这类试题的特点是：题目所寻求的结论有多种可能，只要求考生通过对已知条件进行分析，找出其中一个正确的结论.

【例⑥】设 I 是全集，非空集合 P,Q 满足 $P\subsetneqq Q\subsetneqq I$，若含 P,Q 的一个集合运算表达式，使运算结果为空集 $\varnothing$，则这个运算表达式可以是________.（只要写出一个表达式）

【解】 如图 1-1-2 所示，画出相应的文氏图. 由图像我们容易得到 $P\cap(\complement_I Q)$ 的运算结果为空集 $\varnothing$. 当然，该题目的答案有很多种，比如 $P\cap(\complement_I Q)\cap I$，$P\cap((\complement_I Q)\cup(\complement_I P))$ 等等，而 $P\cap(\complement_I Q)$ 只是其中一个正确的结论.

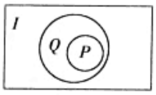

图 1-1-2

热身冲刺

1. 定义集合运算：$A\odot B=\{z\mid z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$，设集合 $A=\{0,1\}$，$B=\{2,3\}$，则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为 （ ）

A. 0 B. 6 C. 12 D. 18

2. 设 M、P 是两个非空集合，定义 M 与 P 的差集为：$M-P=\{x\mid x\in M$ 且 $x\notin P\}$，则 $M-(M-P)$ 等于 （ ）

A. P B. $M\cap P$ C. $M\cup P$ D. M

3. (2007·**江苏·理** 10) 在平面直角坐标系 xOy，已知平面区域 $A=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1$，且 $x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，则平面区域 $B=\{(x+y,x-y)\mid (x,y)\in A\}$ 的面积为 （ ）

A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

4. (2007·**湖南·理** 10) 设集合 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$，S_1、S_2、…、S_k 都是 M 的含两个元素的子集，且满足：对任意的 $S_i=\{a_i,b_i\}$，$S_j=\{a_j,b_j\}$ $(i\neq j,i,j\in\{1,2,3,\cdots,k\})$，都有 $\min\{\frac{a_i}{b_i},\frac{b_i}{a_i}\}\neq\min\{\frac{a_j}{b_j},\frac{b_j}{a_j}\}$（$\min\{x,y\}$ 表示两个数 x、y 中的较小者）. 则 k 的最大值是 （ ）

A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

5. (2006·**四川**) 非空集合 G 关于运算 $\oplus$ 满足：(1) 对任意 a、$b\in G$，都有 $a\oplus b\in G$；(2) 存在 $e\in G$，使得对一切 $a\in G$，都有 $a\oplus e=e\oplus a=a$，则称 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”. 现给出下列集合和运算：

①$G=\{$非负整数$\}$，$\oplus$ 为整数的加法.

②$G=\{$偶数$\}$，$\oplus$ 为整数的乘法.

③$G=\{$平面向量$\}$，$\oplus$ 为平面向量的加法.

④$G=\{$二次三项式$\}$，$\oplus$ 为多项式的加法.

⑤$G=\{$虚数$\}$，$\oplus$ 为复数的乘法.

其中 G 关于运算 $\oplus$ 为“融洽集”的是________.（写出所有“融洽集”的序号）

6. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$，是否存在实数 a，使得 $A\cap C=\varnothing$ 和 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$ 同时成立？若存在，求出 a 值；若不存在，说明理由.

7. 已知集合 $E=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$F=\{x|x^2-ax+(a-1)=0\}$，$G=\{x|x^2-bx+2=0\}$，问：同时满足 $F\subsetneq E$ 和 $G\subseteq E$ 的实数 a 和 b 是否存在？若存在，求出 a，b 所有值的集合；若不存在，说明理由.

8. 设集合 $A=\{(x,y)|y=2x-1,x\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{(x,y)|y=ax^2-ax+a,x\in\mathbf{N}^*\}$，问是否存在非零整数 a，使 $A\cap B\neq\varnothing$？若存在，请求出 a 的值及 $A\cap B$；若不存在，说明理由.

第二讲 函数单调性的应用

典例精讲

函数的单调性是反映函数值随自变量的增大而增大(或减小)的变化规律. 因此在研究函数问题时，如果涉及到函数值的变化问题，不妨考查该函数的单调性，往往能使问题迎刃而解.

一、利用单调性求函数的值域

【例①】求函数 $y=\dfrac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}$ 的值域.

【解】 令 $t=\sqrt{x^2+4}$，则 $t\geqslant 2$，

$y=f(t)=t+\dfrac{1}{t}(t\geqslant 2)$.

考查其单调性，发现 $f(t)$ 在 $[2,+\infty)$ 上为增函数，$f(t)\geqslant f(2)=\dfrac{5}{2}$. 故所求函数值域为 $\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

【点评】求函数值域时，利用函数的单调性是常见的方法之一.

二、利用单调性求函数的最值

【例②】设 $f(x)$ 是定义域 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且满足如下两个条件：

(1)对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$；

(2)当 $x>0$ 时，$f(x)<0$，且 $f(1)=-2$.

求函数 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的最大值和最小值.

【解】 设 $-3\leqslant x_1<x_2\leqslant 3$，由条件(1)，得

$f(x_2)=f[(x_2-x_1)+x_1]$

$=f(x_2-x_1)+f(x_1)$，

即 $f(x_2-x_1)=f(x_2)-f(x_1)$.

$\because x_2-x_1>0$，

$\therefore$ 由条件(2)，得 $f(x_2-x_1)<0$，

即 $f(x_2)-f(x_1)<0$，$f(x_2)<f(x_1)$，

$\therefore f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上是减函数.

$[f(x)]_{\min}=f(3)=f(1)+f(2)=3f(1)=-6$,

$[f(x)]_{\max}=f(-3)=-f(3)=6$.

【点评】对于抽象函数,往往是通过研究函数的单调性确定其最值.

三、利用单调性比较函数值的大小

【例③】(2006·陕西)已知函数 $f(x)=ax^2+2ax+4$ $(0<a<3)$,若 $x_1<x_2$,$x_1+x_2=1-a$,则

A. $f(x_1)>f(x_2)$

B. $f(x_1)<f(x_2)$

C. $f(x_1)=f(x_2)$

D. $f(x_1)$与 $f(x_2)$的大小不能确定

【解】 $f(x)$的对称轴为 $x=-1$,

$\because 0<a<3$,$\therefore -2<1-a<1$

$\therefore -1<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\dfrac{1}{2}$.

$\because x_1<x_2$,$\therefore x_1<\dfrac{x_1+x_2}{2}<x_2$.

①当 $-1\leqslant x_1<x_2$ 时.

$\because f(x)$在$[-1,+\infty)$上为增函数.

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$.

②当 $x_1<-1<x_2$ 时

$|x_1+1|=-x_1-1$,$|x_2+1|=x_2+1$

$|x_2+1|-|x_1+1|=x_1+x_2+2>0$.

$\therefore x_1$ 比 x_2 离 $f(x)$的对称轴近.

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$.

综合以上分析知选 B.

【答案】 B

【点评】在二次函数中,比较函数值的大小需用数形结合法.二次函数图像的开口方向,对称轴的位置;区间端点到对称轴的距离的大小是常考虑的几个方面.

四、利用单调性分析方程根的情况

【例④】已知 $f(x)=-x-x^3$,$x\in[a,b]$,且$f(a)\cdot f(b)<0$,则方程 $f(x)=0$ 在$[a,b]$内

A. 至少有一实数根　　B. 至多有一实数根

C. 没有实数根　　D. 有惟一实数根

【解】 根据$f(x)$的表达式和单调性定义,可知 $f(x)$在$[a,b]$上是减函数,所以 $f(a)>f(b)$. 又由 $f(a)f(b)<0$,可知 $f(b)<0<f(a)$. 从而知点$(a,f(a))$在 x 轴上方,点$(b,f(b))$在 x 轴下方,所以图像必然与 x 轴有且只有一个交点,从而方程 $f(x)=0$ 有且只有一个实数根,故选 D.

【答案】 D

【点评】本题是运用数形结合思想解题,在确定形的变化趋势时,利用单调性来分析.

五、利用单调性解不等式

【例⑤】已知函数 $f(x)=\sin x+5x$,$x\in(-1,1)$,解不等式 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$.

【解】 此题若解不等式 $\sin(1-a)+5(1-a)+\sin(1-a^2)+5(1-a^2)<0$,则行不通. 此时可通过考查其单调性和奇偶性,可知 $f(x)$是奇函数,且在$(-1,1)$上是增函数,从而有 $f(1-a)<-f(-a^2+1)=f(-1+a^2)$,所以 $1-a<a^2-1$,且 $-1<1-a<1$,且 $-1<1-a^2<1$,解得 $1<a<\sqrt{2}$.

【点评】在解有关抽象函数不等式时,往往要利用函数的奇偶性和单调性来转化.

六、利用单调性证明不等式

【例⑥】已知$\triangle ABC$的三边长分别是 a,b,c,且 m 为正数,求证:$\dfrac{a}{a+m}+\dfrac{b}{b+m}>\dfrac{c}{c+m}$.

分析 因为$\dfrac{a}{a+m}$,$\dfrac{b}{b+m}$,$\dfrac{c}{c+m}$的结构相同,相当于函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+m}$中的变量 x 分别取 a,b,c 时的函数值,所以要证明它们的大小关系,可考虑函数 $f(x)$的单调性. a,b,c,m 都为正数,根据单调函数的定义可推导出 $f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数.

【证明】 由 $a+b>c$,可推导出 $f(a+b)>f(c)$,即 $\dfrac{a+b}{a+b+m}>\dfrac{c}{c+m}$. 又$\dfrac{a}{a+m}+\dfrac{b}{b+m}>\dfrac{a}{a+b+m}+\dfrac{b}{a+b+m}=\dfrac{a+b}{a+b+m}$,所以$\dfrac{a}{a+m}+\dfrac{b}{b+m}>\dfrac{c}{c+m}$.

【点评】在证明不等式时,往往可构造函数,利用函数的单调性来证明.

七、利用单调性解决数列问题

【例⑦】已知 $a_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}$,$n\in\mathbf{N}^*$,若 $a_n>2b-5$ 恒成立,且 b 为自然数,求 b 的最大值.

分析 因为 $a_n>2b-5$ 恒成立,所以 $2b-5<\{a_n\}_{\min}$,从而转化成求 a_n 的最小值,a_n 是以 n 为自变量的函数,从而联想到分析数列$\{a_n\}$的单调性规律.

【解】 $\because a_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+1}$,

$\therefore a_{n+1}=\dfrac{1}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{3n+4}$.

$\therefore a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{3n+2}+\dfrac{1}{3n+3}+\dfrac{1}{3n+4}-\dfrac{1}{n+1}$

$=\dfrac{1}{3n+2}+\dfrac{1}{3n+4}-\dfrac{2}{3n+3}$

$=\dfrac{2}{3(n+1)(3n+2)(3n+4)}>0$,

$\therefore a_{n+1}>a_n$,

$\therefore$数列$\{a_n\}$是递增数列,

$\{a_n\}_{\min}=a_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{13}{12}$,

$\therefore 2b-5<\dfrac{13}{12}$,解得 $b<\dfrac{73}{24}$,

故自然数 b 的最大值是 3.

【点评】数列$\{a_n\}$中的 a_n 是以 n 为自变量的函数,所以在解决有关数列的最值问题时,可考查其单调性.

函数是中学数学的主要内容之一,函数思想也是中学数学的主要数学思想之一,其中函数的单调性是函数思想重要方面,它在解决具有函数关系,特别是有关函数值的变化问题时有很大的作用,以上几例可以说明这一点.

热身冲刺

1. 已知 $a<b<0$，奇函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,-a]$，在区间 $[-b,-a]$ 上单调递减且 $f(x)>0$，那么 $|f(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上 ( )

A. 单调递减，且 $f(x)>0$

B. 单调递增，且 $f(x)>0$

C. 单调递减，且 $f(x)<0$

D. 单调递增，且 $f(x)<0$

2. (2007·**全国Ⅰ·理** 8) 设 $a>1$，函数 $f(x)=\log_a x$ 在区间 $[a,2a]$ 上的最大值与最小值之差为 $\frac{1}{2}$，则 $a=$ ( )

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 4

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上是增函数，函数 $f(x+2)$ 是偶函数，则 $f(1)$，$f(\frac{5}{2})$，$f(\frac{7}{2})$ 的大小关系是________.

4. 若 $f(x)=g(x)+h(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，且 $g(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的增函数，$h(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的减函数，则 $g(a)+h(b)<f(x)<g(b)+h(a)$.

5. 如图 1－2－1 所示，在直线 $y=0$ 和 $y=a(a>0)$ 之间表示的是一条河流，河流的一侧河岸（x 轴）是一条公路，公路上的公交站 $P(x,0)$ 随时都有公交车来往，家住 $A(0,a)$ 的某学生在位于公路上 $B(2a,0)$ 处的学校就读，每天早晨该学生都要从家出发，可以先乘船渡河到达公路上的公交车站，再乘公交去学校，或者直接乘船渡河到达公路上 $B(2a,0)$ 处的学校. 已知船速为 $v_0(v_0>0)$，车速为 $2v_0$（水流速度忽略不计）.

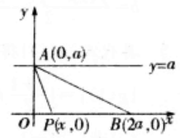

图 1－2－1

(1) 设该学生从家出发，先乘船渡河到达公路上的车站 $P(x,0)$，再乘公交车去学校，请用 x 来表示他所用的时间 t；

(2) 若 $\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant a$，请问该学生选择哪种上学方式更加节约时间，并说明理由.

第二讲 二次函数问题的求解策略

典例精讲

二次函数问题是一类重要问题，常见于各类试卷的压轴题中. 它以函数不等式、方程知识为载体，融推理、证明、探索于一体，综合性强，是教与学的难点. 而新颁布的普通高中《数学课程标准》指出："结合二次函数的图像，判断一元二次方程根的存在性及根的个数，从而了解函数的零点与方程根的联系"，同时又强调："通过函数图像了解一元二次不等式与相应函数、方程的联系". 显然，新标准把二次函数摆在了更重要的位置，并突出了三个"二次"之间的联系，对思维能力的要求提高了，因此有必要对这类问题作一些探讨.

一、特殊化策略

特殊化策略是指在函数的定义域中取一些特殊值，通过具体的函数值建立关于参数的等量关系或不等关系，为解题创造有利条件. 特殊化策略充分体现了由一般向特殊，由抽象向具体的思维策略.

【例1】 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，$g(x)=\lambda ax+b$，当 $|x|\leqslant1$ 时，有 $|f(x)|\leqslant1$. 试问：当 $|x|\leqslant1$ 时，对一切满足 $\lambda\geqslant1$ 的实数 λ 是否恒有 $|g(x)|\leqslant2\lambda$ 成立，为什么？

【解析】 因 $|x|\leqslant1$ 时，有 $|f(x)|\leqslant1$ 恒成立，故可采取

特殊化策略. 令 $x=0,\pm1$ 得 $|f(0)|\leqslant1$, $|f(\pm1)|\leqslant1$. 并且可用 $f(0)$, $f(\pm1)$, 表示参数 a,b,c 为

$$a=\frac{f(1)+f(-1)}{2}-f(0),$$

$$b=\frac{f(1)-f(-1)}{2},c=f(0),$$

再代入 $|g(1)|$ 得

$$|g(1)|=|\frac{\lambda+1}{2}f(1)+\frac{\lambda-1}{2}f(-1)-\lambda f(0)|$$

$$\leqslant\frac{\lambda+1}{2}+\frac{\lambda-1}{2}+\lambda=2\lambda.$$

同理可得 $|g(-1)|\leqslant2\lambda$, 于是 $|g(x)|\leqslant2\lambda$ 成立.

二、两边夹策略

两边夹策略是指先根据题意,建立不等关系,再依据两边夹法则(或迫等原理)确定某些参数的值,从而实现不等关系向等量关系的转化.

【例②】已知函数 $f(x)=x^2+bx+c$, $|x|\leqslant1$, 是否存在实数 b、c 使 $|f(x)|$ 的最大值为 $\frac{1}{2}$. 若存在,求出 b、c 之值;若不存在,说明理由.

【解析】假设存在适合题意的 b、c, 则当 $|x|\leqslant1$ 时, 有 $|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}$. 取特殊值, 令 $x=0,\pm1$, 得 $-\frac{1}{2}\leqslant c\leqslant\frac{1}{2}$ ①

$$-\frac{1}{2}\leqslant1+b+c\leqslant\frac{1}{2} \quad ②$$

$$-\frac{1}{2}\leqslant1-b+c\leqslant\frac{1}{2} \quad ③$$

由②+③得 $-\frac{3}{2}\leqslant c\leqslant-\frac{1}{2}$,

根据迫等原理可得 $c=-\frac{1}{2}$.

再代入②③两式得 $-1\leqslant b\leqslant0$ 且 $0\leqslant b\leqslant1$, 再由迫等原理得 $b=0$.

因此存在适合的 b、c 值.

三、构造策略

有时根据题意构造适合的辅助函数,以其为载体,使三个"二次"即二次函数、一元二次方程、一元二次不等式有机地联系在一起,并能相互转化.

【例③】设函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$, 方程 $f(x)=x$ 有两实根 x_1,x_2, 且 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$. 问:当 $0<x<x_1$ 时, 是否有 $x<f(x)<x_1$ 成立, 为什么?

【解析】根据方程 $f(x)=x$ 的两实根为 x_1 与 x_2, 可构造辅助函数 $F(x)=f(x)-x=a(x-x_1)(x-x_2)$, 由 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$ 及 $a>0$ 可得: $F(x)>0$, 即 $f(x)>x$. 再构造函数 $G(x)=f(x)-x_1=F(x)+(x-x_1)=(x-x_1)(1+ax-ax_2)$, 由 $ax>0$, $x-x_1<0$, 得 $G(x)<(x-x_1)(1-ax_2)$, 再由 $0<x_2<\frac{1}{a}$ 得: $G(x)<0$, 即 $f(x)<x_1$. 因此必有 $x<f(x)<x_1$ 成立.

四、数形结合策略

根据题意借助二次函数的图像,分析其开口方向,对称轴、区间端点、顶点、与坐标轴交点的位置,挖掘其中蕴含的数量关系,即利用数形结合,得到有利于解题的等价条件.

【例④】设 $a>0,b>0$, 函数 $f(x)=ax-bx^2$, $x\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$. 试探求 $|f(x)|\leqslant1$ 成立的充要条件.

【解析】先等价转化: $|f(x)|\leqslant1\Leftrightarrow p(x)=bx^2-ax-1\leqslant0$ 与 $q(x)=bx^2-ax+1\geqslant0$ 均对 $x\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 成立.

对 $p(x)$: 作出其简图(如图(1))可得

$$p(x)\leqslant0\Leftrightarrow p(\frac{\sqrt{2}}{2})\leqslant0$$

$$\Leftrightarrow a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}b-\sqrt{2}.$$

对 $q(x)$: 作出其简图(如图(2))可得

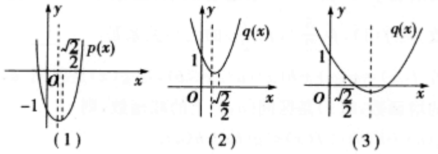

图 1—3—1

$$q(x)\geqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a}{2b}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2},\\1-\frac{a^2}{4b}\geqslant0;\end{cases}$$

$$或\begin{cases}\frac{a}{2b}>\frac{\sqrt{2}}{2},\\\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}a+1\geqslant0.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b\geqslant2,\\a\leqslant2\sqrt{b};\end{cases}$$

$$或\begin{cases}0<b<2,\\a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}b+\sqrt{2}.\end{cases}$$

综合得 当 $b\geqslant2$ 时, $|f(x)|\leqslant1$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}b-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant2\sqrt{b};$$

当 $0<b<2$ 时, $0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}b+\sqrt{2}$.

五、正难则反策略

当从正面入手解题较难或较繁时,可从问题的反面入手去思考,采取顺繁则逆,正难则反的策略,而获得突破.

【例⑤】能否确定实数 a 的值, 使函数 $f(x)=ax^2+(2a-1)x-3$ 在 $[-\frac{3}{2},2]$ 上的最大值为1, 为什么?

【解析】若按常规思路求解要讨论六种情况, 显然很繁, 不如采取逆向思维. 经分析可知: $f(x)$ 的最大值只能在函数值 $f(-\frac{3}{2})$, $f(\frac{1-2a}{2a})$, $f(2)$ 中取得. 因此, 我们只要令三者分别等于1, 求出相应的 a 值. 再验证 a 取该值时, $f(x)$ 是否

以对应的函数值为最大值，就可确定出 a 值. 求解过程略.

$a=\frac{3}{4}$ 或 $a=\frac{-3-2\sqrt{2}}{2}$.

六、利用值域突破

有时要从题设给出的纷繁复杂的信息中提取信息，当从定义域中不能突破时，可从值域中寻求突破口.

【例⑥】 已知函数 $f(x)=ax^2+bx(a\neq 0)$，满足：方程 $f(x)=x$ 有等根且 $f(5-x)=f(x-3)$. 是否存在实数 m,n，使 $f(x)$ 当定义域为 $[m,n]$ 时，值域为 $[km,kn]$（k 为大于 1 的常数）. 若存在求出 m、n 的值；若不存在，说明理由.

解析 本题乍一看无从下手，如分类讨论，也要讨论多种情况. 而题设中有值域的范围，不妨从 $f(x)$ 的值域整体考虑：因 $f(x)$ 的解析式可求，为

$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}$，

故 $f(x)\leqslant\frac{1}{2}$，

则 $[km,kn]\subseteq(-\infty,\frac{1}{2}]$，

故 $kn\leqslant\frac{1}{2}$，于是 $n\leqslant\frac{1}{2k}$.

又 $k>1$，则 $\frac{1}{2k}<1$，

因此 $f(x)$ 在 $[m,n]$ 上递增.

所以 $f(m)=km$，$f(n)=kn$.

解得 $m=2(1-k)$，$n=0$.

所以 m,n 是存在的.

热身冲刺

1. 已知 m,n 是方程 $x^2+(2-k)x+k^2+3k+5=0(k\in\mathbf{R})$ 的两个实根，m^2+n^2 的最大值与最小值的差为________.

2. 函数 $f(x)=-2x+5\sqrt{x+1}$，$x\in[0,1]$ 的最大值为________.

3. 设函数 $f(x)=x^2+x+\frac{1}{2}$ 的定义域为 $[n,n+1](n\in\mathbf{N}^*)$，则 $f(x)$ 的值域中整数解的个数为________.

4. (2007·**广东·理** 20) 已知 a 是实数，函数 $f(x)=2ax^2+2x-3-a$. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有零点，求 a 的取值范围.

5. 关于 x 的不等式 $a^2+2a-\sin^2x-2a\cos x>2$ 的解集是全体实数，求实数 a 的取值范围.

6. 已知 $a>0$，函数 $f(x)=ax-bx^2$. 当 $b>1$ 时，证明：对任意 $x\in[0,1]$，$|f(x)|\leqslant 1$ 的充要条件是 $b-1\leqslant a\leqslant 2\sqrt{b}$.

7. 已知倾斜角为 45° 的直线 l 过点 $A(1,-2)$ 和点 B，B 在第一象限，$|AB|=3\sqrt{2}$.
(1)求点 B 的坐标；
(2)对于平面上任一点 P，当点 Q 在线段 AB 上运动时，称 $|PQ|$ 的最小值为 P 与线段 AB 的距离. 已知点 P 在 x 轴上运动，写出点 $P(t,0)$ 到线段 AB 的距离 h 关于 t 的函数关系式.

8. (2007·**江苏·理** 21) 已知 a,b,c,d 是不全为 0 的实数，函数 $f(x)=bx^2+cx+d$，$g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，方程 $f(x)=0$ 有实根，且 $f(x)=0$ 的实数根都是 $g[f(x)]=0$ 的根，反之，$g[f(x)]=0$ 的实数根都是 $f(x)=0$ 的根.
(1)求 d 的值；
(2)若 $a=0$，求 c 的取值范围；
(3)若 $a=1$，$f(1)=0$，求 c 的取值范围.

第四讲 对称与函数的周期

典例精讲

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

引理1 函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(x)=f(2a-x)$.

引理2 函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 对称 $\Leftrightarrow f(x)=-f(2a-x)$.

定理1 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图像关于两条直线 $x=a$ 和 $x=b$ 都对称，则 $y=f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

【证明】 对于任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=f(2a-x)=f[2b-(2a-x)]=f[(x+(2b-2a)]$，

$\therefore y=f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

定理2 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $(a,0)$ 和点 $(b,0)$ 对称 $(a\neq b)$，则 $y=f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

【证明】 任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)=-f(2a-x)=f[2b-(2a-x)]=f[x+2(b-a)]$，

$\therefore y=f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的函数.

定理3 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图像既关于直线 $x=a$ 对称，又关于点 $(b,0)$ 对称，$(a\neq b)$，则这个函数是以 $4(b-a)$ 为周期的周期函数.

【证明】 任意 $x\in\mathbf{R}$，

$f(x)=f(2a-x)=-f[2b-(2a-x)]$
$=-f[x+2(b-a)]$
$=-f[2a-x-2(b-a)]$
$=-f(4a-2b-x)$
$=f[2b-(4a-2b-x)]$
$=f[x+4(b-a)]$，

$\therefore y=f(x)$ 是以 $4(b-a)$ 为周期的函数.

特别地，若函数 $y=f(x)$ 是奇函数（或偶函数）且它的图像关于点 $(a,0)(a\neq0)$（或直线 $x=a$）对称，则此函数一定是周期函数.

【例①】（2005·广东）设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足 $f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$，且在闭区间 $[0,7]$ 上只有 $f(1)=f(3)=0$，

(1)试判断函数 $y=f(x)$ 的奇偶性；

(2)试求方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-2005,2005]$ 上根的个数，并证明你的结论.

【解】 (1)由 $f(2-x)=f(2+x)$，$f(7-x)=f(7+x)$ 得直线 $x=2$ 和直线 $x=7$ 都是 $y=f(x)$ 的对称轴，

$\therefore$ 函数的周期 $T=2(7-2)=10$，

即 $f(x)=f(x+10)$，又 $f(3)=0$，$f(7)\neq0$，

$\therefore f(-3)=f(7)\neq0$，即 $f(-3)\neq\pm f(3)$，

$\therefore y=f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

(2)由 $f(3)=f(1)=0$，

$\therefore f(11)=f(13)=f(-7)=f(-9)=0$，

故 $f(x)$ 在 $[0,10]$，$[-10,0]$ 上均有两个解，从而可知 $f(x)=0$ 在 $[0,2005]$ 上有 402 个解，在区间 $[-2005,0]$ 上有 400 个解，从而 $f(x)=0$ 在 $[-2005,2005]$ 上有 802 个解.

【点评】 考试中需用定理1的方法证明 $T=10$.

【例②】 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图像关于直线 $x=1$ 对称，对任取 $x_1,x_2\in[0,\frac{1}{2}]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 且 $f(1)=a>0$.

(1)求 $f(\frac{1}{2})$ 及 $f(\frac{1}{4})$；

(2)证明：$f(x)$ 是周期函数.

(1)**【解】** 任取 $x_1,x_2\in[0,\frac{1}{2}]$ 都有

$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$

$\Rightarrow f(x)=f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2})=[f(\frac{x}{2})]^2>0,x\in[0,1]$，

又 $f(1)=[f(\frac{1}{2})]^2$，$f(\frac{1}{2})=[f(\frac{1}{4})]^2$，

得 $f(\frac{1}{2})=a^{\frac{1}{2}}$，$f(\frac{1}{4})=a^{\frac{1}{4}}$.

(2)**【证明】** $y=f(x)$ 是偶函数，则它的图像关于直线 $x=0$ 对称，又 $x=1$ 也是它的一条对称轴，则 $y=f(x)$ 是以 $T=2(1-0)=2$ 为周期的周期函数.

【例③】（2007·安徽·理11）定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 既是奇函数，又是周期函数，T 是它的一个正周期，若将方程 $f(x)=0$ 在闭区间 $[-T,T]$ 上的根的个数记为 n，则 n 可能为

A. 0　　B. 1　　C. 3　　D. 5

【解】 $\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，$\therefore f(0)=0$.

$\because f(x)$ 周期为 T，$\therefore f(T)=f(0)=f(-T)$.

又∵$f(-\frac{T}{2})=f(-\frac{T}{2}+T)=f(\frac{T}{2})$，且 $f(-\frac{T}{2})=-f(\frac{T}{2})$，

∴$f(-\frac{T}{2})=f(\frac{T}{2})=0$.

∴方程 $f(x)=0$ 在闭区间$[-T,T]$上至少有5个根，故选D.

【答案】 D

【例④】若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数且满足 $f(10+x)=f(10-x)$，$f(20-x)=-f(20+x)$，则 $f(x)$ 是

A. 偶函数且是周期函数

B. 偶函数但不是周期函数

C. 奇函数且是周期函数

D. 奇函数但不是周期函数

【解】 由 $f(10+x)=f(10-x)$ 知 $x=10$ 为函数的对称轴，由 $f(20-x)=-f(20+x)$ 得点(20,0)为函数图像的对称中心，从而函数的周期 $T=4(20-10)=40$，又 $f(-x)=f(20+x)=-f(20-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

【答案】 C

【例⑤】(2006·安徽)函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$，若 $f(1)=-5$，则 $f(f(5))=$________.

【解】 由 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$，得

$f(x+4)=\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$，

∴$f(5)=f(1)=-5$.

∴$f(f(5))=f(-5)=f(-1)$

$=f(3)=\frac{1}{f(1)}=-\frac{1}{5}$.

【答案】 $-\frac{1}{5}$

热身冲刺

1. 已知函数 $f(x)$ 为奇函数且在$[-1,0]$上为增函数，又其图像关于直线 $x=1$ 对称，则该函数在区间$[3,4]$上为 ( )

A. 增函数 B. 减函数 C. 奇函数 D. 偶函数

2. 设 $f(x)$ 是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数，$f(x+2)=-f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x$，则 $f(7.5)$ 等于 ( )

A. 0.5 B. −0.5 C. 1.5 D. −1.5

3. (2007·天津·理7)在 $\mathbf{R}$ 上定义的函数 $f(x)$ 是偶函数，且 $f(x)=f(2-x)$，若 $f(x)$ 在区间$[1,2]$上是减函数，则 $f(x)$ ( )

A. 在区间$[-2,-1]$上是增函数，在区间$[3,4]$上是增函数

B. 在区间$[-2,-1]$上是增函数，在区间$[3,4]$上是减函数

C. 在区间$[-2,-1]$上是减函数，在区间$[3,4]$上是增函数

D. 在区间$[-2,-1]$上是减函数，在区间$[3,4]$上是减函数

4. (2007·江西·理11)设函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上以5为周期的可导偶函数，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=5$ 处的切线的斜率为 ( )

A. $-\frac{1}{5}$ B. 0 C. $\frac{1}{5}$ D. 5

5. (2005·全国·理)设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=$________.

6. 设函数 $y=f(x)$ 是最小正周期为2的偶函数，它在区间$[0,1]$上的图像为如图1−4−1所示的线段 AB，则在区间$[1,2]$上 $f(x)=$________.

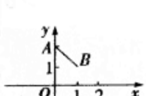

图1−4−1

7. 已知 $f(x)$ 是周期为2的偶函数，且在区间$[1,2]$上是减函数，则 $f(-6.5)$，$f(-1)$，$f(0)$ 的大小关系为________.

8. 函数 $f(x)$ 是奇函数，它关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，在区间$[2,3]$上 $f(x)=-2(x-3)^2+4$，求当 $x\in[1,2]$ 时，$f(x)$ 的解析式.

9. 已知 $g(x)=x(2-x)(0\leqslant x<1)$，$g(1)=0$，若函数 $y=f(x)(x\in\mathbf{R})$ 是以2为周期的奇函数，且在区间$[0,1]$上 $f(x)=g(x)$，画出 $y=f(x)(-2\leqslant x\leqslant 2)$ 的图像并求解析式.

第五讲 反函数题型及解题技巧

典例精讲

与反函数有关的问题在高考中反复露面，题型具有小、巧、灵活的特色. 近年的一些试题令人耳目一新，佳题选出. 许多同学解答时，不能以简捷的思维方式快速解决，有小题大做之嫌. 本节选用高考题型剖析求解技巧.

一、确定存在反函数的充要条件

【例①】函数 $f(x)=x^2-2ax-3$ 在区间$[1,2]$上存在反函数的充分必要条件是

A. $a\in(-\infty,1]$

B. $a\in[2,+\infty)$

C. $a\in[1,2]$

D. $a\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

【解析】因为此二次函数图像的对称轴是直线 $x=a$，当 $a\leqslant1$ 时，$f(x)$在$[1,2]$上严格单调递增；当 $a\geqslant2$ 时，$f(x)$在$[1,2]$上单调递减；而当 $a\in(1,2)$时，$f(x)$在$[1,2]$上先减后增，故应选 D.

【答案】 D

二、求反函数

【例②】(2007·天津·理 5)函数 $y=\log_2(\sqrt{x+4}+2)$ $(x>1)$的反函数是

A. $y=4^x-3^{x+2}(x>2)$　　B. $y=4^x-2^{x+1}(x>1)$

C. $y=4^x-2^{x+2}(x>2)$　　D. $y=4^x-2^{x+2}(x>1)$

【解析】由 $y=\log_2(\sqrt{x+4}+2)$　$(x>0)$

得 $\sqrt{x+4}+2=2^y$，

$\therefore x+4=(2^y-2)^2$，

$\therefore x=4^y-2^{y+2}$.

反函数为 $y=4^x-2^{x+2}$.

再由 $x>0$ 知 $\sqrt{x+4}+2>4$，

$\therefore y>2$.

得答案 C.

【答案】 C

【点评】此题考查函数的求法，尤其是由原函数的定义域出发求值域，即反函数的定义域.

三、求反函数的值

【例③】已知 $y=f(x)$是奇函数，当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)=3^x-1$，设 $f(x)$的反函数是 $g(x)$，则 $g(-8)=$________.

【解】 解法一　易得出 $x\leqslant0$ 时，$f(x)=1-3^{-x}$.

令 $y=1-3^{-x}$，则 $3^{-x}=1-y$，$x=-\log_3(1-y)$.

$\therefore x\leqslant0$ 时，$g(x)=-\log_3(1-x)(x\leqslant1)$.

$\therefore g(-8)=-\log_3 9=-2$.

解法二　利用反函数的还原性.

若 $f(a)=b$，则 $f^{-1}(b)=a$.

$\because$ 当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)=1-3^{-x}$，

由 $-8=1-3^{-x}$，解得 $x=-2$，

$\therefore g(-8)=-2$.

【答案】 -2

四、函数与其反函数的图像关系

【例④】(2007·陕西·理 8)若函数 $f(x)$的反函数为 $f^{-1}(x)$，则函数 $f(x-1)$与 $f^{-1}(x-1)$的图像可能是

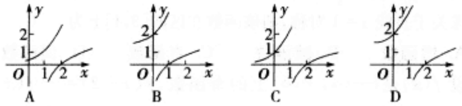

图 1—5—1

【解析】因为 $y=f(x)$的图像与 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称，而 $y=f(x-1)$的图像是把 $y=f(x)$的图像向右平移一个单位长度得到的，$y=f^{-1}(x-1)$是把 $y=f^{-1}(x)$的图像向右平移一个单位长度得到的. 所以 $y=f(x-1)$的图像与 $y=f^{-1}(x-1)$的图像关于直线 $y=x-1$ 对称，故选 A.

【答案】 A

五、确定反函数的图像

【例⑤】已知函数 $y=\log_2 x$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，则函数 $y=f^{-1}(1-x)$的图像是

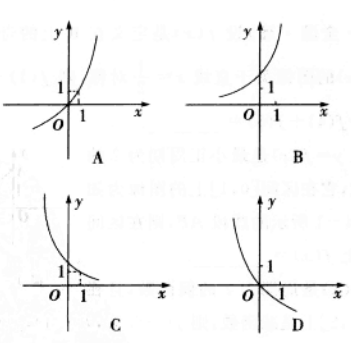

图 1—5—2

【解】 解法一 本题可直接求出 $f^{-1}(x)=2^x$，则 $f^{-1}(1-x)=2^{1-x}=2(\frac{1}{2})^x$，画出其草图，便知选 C.

解法二 (单调性法)

∵ $f(x)=\log_2 x$ 是定义域内的增函数，

∴ $y=f^{-1}(x)$ 也是定义域内的增函数，

因而 $y=f^{-1}(1-x)$ 是其定义域内的减函数.

故可排除 A、B.

再由 $y=f^{-1}(1-x)$ 的图像过点(1,1)，可知应选 C.

【答案】 C

六、求函数与其反函数图像的交点

【例⑥】 已知函数 $f(x)=(\frac{1}{2}x+1)^2-2, x\in[-2,+\infty)$，解方程 $f(x)=f^{-1}(x)$.

分析 直接求得 $f^{-1}(x)$，再解方程 $f(x)=f^{-1}(x)$ 较为繁琐，学生容易想到方程 $f(x)=f^{-1}(x)$ 的解是函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=x$ 交点的横坐标，且满足 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域.

【解】 令 $\begin{cases} y=x, \\ y=(\frac{1}{2}x+1)^2-2, \end{cases}$

消去 y，得 $x^2-4=0$，

解之得原方程的解为 $x_1=2, x_2=-2$.

热身冲刺

1. 设 $f^{-1}(x)$ 是函数 $f(x)=\log_2(x+1)$ 的反函数，若 $[1+f^{-1}(a)][1+f^{-1}(b)]=8$，则 $f(a+b)$ 的值为 ( )

A. 1　B. 2　C. 3　D. $\log_2 3$

2. 设 $k>1$，$f(x)=k(x-1)(x\in\mathbf{R})$. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴交于 A 点，它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像与 y 轴交于 B 点. 并且这两个函数的图像交于 P 点，已知四边形 $OAPB$ 的面积是 3，则 k 等于 ( )

A. 3　B. $\frac{3}{2}$　C. $\frac{4}{3}$　D. $\frac{6}{5}$

3. (2006·陕西)设函数 $f(x)=\log_a(x+b)(a>1, a\neq1)$ 的图像过点(2,1)，其反函数的图像过点(2,8)，则 $a+b$ 等于 ( )

A. 3　B. 4　C. 5　D. 6

4. 函数 $y=\begin{cases} 2x, x\geqslant0 \\ -x^2, x<0 \end{cases}$ 的反函数是 ( )

A. $y=\begin{cases} \frac{x}{2}, x\geqslant0 \\ \sqrt{-x}, x<0 \end{cases}$　B. $y=\begin{cases} 2x, x\geqslant0 \\ \sqrt{-x}, x<0 \end{cases}$

C. $y=\begin{cases} \frac{x}{2}, x\geqslant0 \\ -\sqrt{-x}, x<0 \end{cases}$　D. $y=\begin{cases} 2x, x\geqslant0 \\ -\sqrt{-x}, x<0 \end{cases}$

5. 函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x+1}-1)(x>0)$ 的反函数 $f^{-1}(x)=$ ________.

6. (2007·江西·理 13)设函数 $y=4+\log_2(x-1)(x\geqslant3)$，则其反函数的定义域为________.

7. 已知点(1,2)既在函数 $y=\sqrt{ax+b}$ 的图像上，又在它的反函数的图像上，求 a,b 的值.

8. 已知函数 $f(x)=1+\sqrt{2x-3}$ 有反函数，且点 (a,b) 既在 $f(x)$ 的图像上又在其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像上，求 a,b 的值.