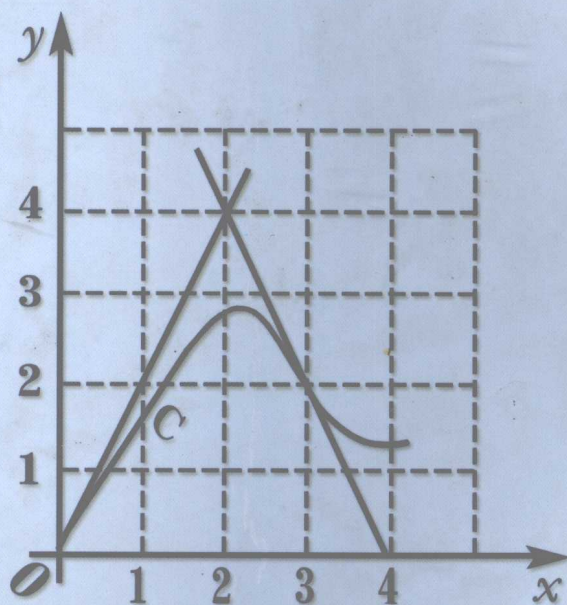


1985—2005 历年考研数学试题详解 数学(二)

吴振奎 主编



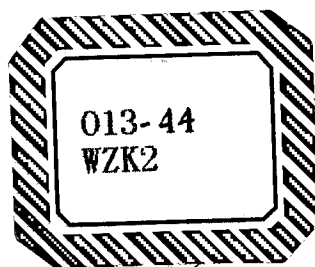
中国财政经济出版社

1985—2005

历年考研数学试题详解

数学(二)

吴振奎 主编



中国财政经济出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

历年考研数学试题详解 / 吴振奎主编. — 北京: 中国财政经济出版社, 2005.3
ISBN 7-5005-7987-X

I. 历… II. 吴… III. 高等数学—研究生—入学考试—习题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 013647 号

1985—2005

历年考研数学试题详解

数学 (二)

吴振奎 主编

中国财政经济出版社出版

URL: <http://www.cfeph.cn>

E-mail: cfeph@cfeph.cn

(版权所有 翻印必究)

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码: 100036

发行处电话: 88190406 财经书店电话: 64033436

河北省财政厅印刷厂印刷 各地新华书店经销

787×1092 毫米 16 开 10.75 印张 261 000 字

2005 年 4 月第 1 版 2005 年 4 月石家庄第 1 次印刷

定价 (全四册): 60.00 元

ISBN 7-5005-7987-X/O·0032

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

目 录

前言	(0-3)
一、全国硕士研究生招生考试数学(二)试题部分	(1-1)
1987 年试题	(1-1)
1988 年试题	(1-2)
1989 年试题	(1-3)
1990 年试题	(1-5)
1991 年试题	(1-6)
1992 年试题	(1-8)
1993 年试题	(1-9)
1994 年试题	(1-11)
1995 年试题	(1-12)
1996 年试题	(1-14)
1997 年试题	(1-16)
1998 年试题	(1-17)
1999 年试题	(1-19)
2000 年试题	(1-21)
2001 年试题	(1-23)
2002 年试题	(1-25)
2003 年试题	(1-27)
2004 年试题	(1-30)
2005 年试题	(1-32)
二、全国硕士研究生招生考试数学(二)试题解答部分	(2-1)
1987 年试题参考答案	(2-1)
1988 年试题参考答案	(2-4)
1989 年试题参考答案	(2-7)
1990 年试题参考答案	(2-11)
1991 年试题参考答案	(2-13)
1992 年试题参考答案	(2-16)
1993 年试题参考答案	(2-19)
1994 年试题参考答案	(2-23)
1995 年试题参考答案	(2-28)

1996 年试题参考答案	(2-31)
1997 年试题参考答案	(2-36)
1998 年试题参考答案	(2-41)
1999 年试题参考答案	(2-47)
2000 年试题参考答案	(2-52)
2001 年试题参考答案	(2-59)
2002 年试题参考答案	(2-64)
2003 年试题参考答案	(2-71)
2004 年试题参考答案	(2-79)
2005 年试题参考答案	(2-89)
三、附录	(3-1)
1985 年上海交大等八院校硕士研究生招生考试高等数学试题(附:参考答案)	(3-1)
1985 年同济大学等八院校硕士研究生招生考试高等数学试题(附:参考答案)	(3-8)
1986 年上海交大等十院校硕士研究生招生考试高等数学试题(附:参考答案)	(3-12)
1986 年华东六省一市硕士研究生招生考试高等数学试题(附:参考答案)	(3-18)

前 言

为帮助我国大学生学好数学,本书汇编了1987年以来硕士研究生招生全国统考试题及其详解的参考答案.应该申明的是:书中给出的解答,也许不是最简的,但从中可以了解重点,突破难点,把握考点,它至少是很好地适应了同学们复习、迎试、竞赛和考研的需要.

全书按不同专业招生的试题,共分为数学(一)、数学(二)、数学(三)、数学(四)等四个分册.书末还附录了全国硕士生招生统考前两年(即1985年和1986年)部分院校联合命题的试卷及参考答案,从中也可看出考研数学试卷不断演化与完善的历程.

俗说“温故知新”,历史也许不会重复,但考试却不然,几年、十几年前的题目,又会被改头换面地拿出来,甚至原封不动地“克隆”.了解这些看上去也许有些“陈旧”的试题,细细品味,有时仍感新鲜、别致,不信就请查一查近年的考卷,你总会有“似曾相识”之感,因为正如后文所说:数学内容就那么多,好的试题也就那么一些.这恰似时尚的流行,一个周期下来,便是旧时尚的复制与翻版(当然不是简单的重复).

学好数学除了要“做”题外,还要会“读”题,可以毫不夸张地说:对绝大多数人来讲,做数学只是一种模仿或类比,能有发现、创新者实在寥寥,即便是对于以数学为职业的人士.

这样对考研题乃至竞赛题的了解与赏析,往往会使我们开阔眼界、打通思路,因为这些题目中的匠心、立意、解法、技巧,不仅使我们阅后会有茅塞顿开之感,有时更会让我们恍然大悟,甚至大吃一惊,啊哈!原来如此.

看来,了解历年考研试题中的动向,学会解题方法,掌握必要技巧,对我们的复习应考关系重大.而学会分析、梳理、归类、总结,更是立于不败之地的重要法宝.

从1978年起,国家开始恢复研究生招生工作,这无疑给各路学子们提供了一个继续深造的极好契机.

由于大多数理工类和某些文科类(如经济、管理等)专业对于数学的需求日深,“高等数学”便成为一门重要的考试科目.起初,试卷由各院校自行命题.由于这些试卷水平难易不一,这往往给研究生录取工作带来了一定的困难(标准无法统一),特别是当考生需要进行院校乃至专业调剂时.

1985⁴年,上海交大、天津大学、浙江大学等八院校率先采取联合命题,同时同济大学、上海海运学院、上海工业大学等八校也采用联合命题方式;1986年上海交大、天津大学、浙江大学等联合命题院校扩大到了十所(使用该试卷的院校不止它们),且以此方式联合命题的院校越来越多.

从1987年起,国家教委决定全国高校工学各专业、经济学部分专业硕士研究生招生中,数学考试进行全国统一命题,理、医、农、管各专业,一般亦由招生院校按专业性质,选用相应的试题种类.当时试题共分五套,分别称为数学(一)、数学(二)、数学(三)、数学(四)和数学(五),各类试题包含的数学科目大体如下表所列:

类 型	试卷包含科目
数学(一)	微积分、线性代数;此外概率论与复变函数任选一门
数学(二)	微积分、线性代数
数学(三)	微积分
数学(四)	微积分、线性代数、概率论
数学(五)	微积分、线性代数、概率论

考试题型为填空题、选择题、判断题(仅数学(四)、数学(五)有此题型,且于1990年以后取消)和计算与证明题。

每份试卷填空、选择题各约4~5道,计算、证明题10道左右;1990年以后各试卷填空、选择题各5道,计算、证明题8道或10道(数学(二)、数学(三)8道,数学(一)、(四)、(五)为10道)。

下表给出当时五套试题所适用的专业范围:

类 型	适用的招生专业
数学(一)	力学、仪器仪表、动力机械及工程热物理、电工、电子学及通信、计算机科学与技术、自动控制、管理工程、船舶、原子能科学与技术、航空与宇航技术、兵器科学与技术。
数学(二)	机械设计与制造、金属材料、土壤、水利、测绘、非金属材料、化学工程和工业化学、地质勘探、矿业石油、铁道、公路、水运等,以及建筑学、纺织、轻工、林业工程和技术科学史几个学科中对数学要求较高的专业。
数学(三)	建筑学、纺织、轻工、林业工程和技术科学史几个学科中对数学要求较低的某些专业。
数学(四)	国民经济计划和管理(含经济系统分析)、工业经济、运输经济、基本建设经济、技术经济、工业企业管理、统计学、数量经济学。
数学(五)	农业经济、商业经济、物资经济、国际贸易、劳动经济、农业企业管理、商业企业管理、财政学、货币银行学(含保险)、国际金融、会计学。
注 记	政治经济学、世界经济、经济地理学三个专业是否选用统考试题,由招生单位自定。

1997年,国家考试中心据1996年重新修订的全国工学、经济学硕士研究生入学考试《数学考试大纲》,对数学试卷内容和卷种作了调整:

调整前试卷编号	调整后试卷编号	试卷包含的科目
数学(一)、(二)	合并为数学(一)	微积分、线性代数、概率论(含数理统计)
数学(三)	改为数学(二)	微积分、线性代数
数学(四)	改为数学(三)	微积分、线性代数、概率论(含数理统计)
数学(五)	改为数学(四)	微积分、线性代数、概率论

调整后题型仍为三大类:填空题、选择题和计算、证明题(包括综合和应用题)。试题总量为21道左右,填空、选择题各5~6道,计算、证明题9~10道。主、客观性试题在试卷中所占分数

比例约为 7:3.

试卷命题原则为:以考查数学基本概念、基本方法和基本原理为主,在此基础上加强对考生运算能力、抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识解决实际问题能力的考查.具体地讲,**填空题**以考查基本概念、基本方法和基本原理为宗旨,一般无大的计算和证明,难度中等;**选择题**主要考查考生对数学基本概念、性质的理解,能通过简单计算、推理、判断和比较,作出正确选择;**计算、证明题**(综合题)则是对考生运算、推理、抽象、概括、逻辑思维、综合(各学科分支的有机结合),以及应用能力(结合考生报考的具体专业所具有的共性相关背景知识)的全面考查.

另外,各试卷种类中诸学科分支内容所占比例大致为下表:

试 卷 种 类	学科分支所占试卷题目分数比例		
	微 积 分	线 性 代 数	概 率 论
数学(一)	60%	20%	20%
数学(二)	80%	20%	0%
数学(三)	50%	25%	25%
数学(四)	50%	25%	25%

由于数学在各学科研究中的重要地位,为增加数学在考试中的权重,从 2003 年起,数学试卷卷面总分为 150 分,填空、选择各 6 道,计算、证明题 10 题;2004 年试卷中,填空、选择题各 6 道,计算、证明题 11 道.

考研辅导专家们曾对报考研究生的考生提出过忠告,且给出了“法宝”(或经验),数学复习应采取的方法是:一是认真领会掌握基本概念;二是看、做考研真题;三是多动手训练(做题).

对于如何看、做考研试题我们想说几句,之前,除了复习好必要的基础知识外,还要了解、掌握一些解题思想与方法.数学解题中有一个重要的思想即化归与转化.其实说穿了,解数学题就是将未知(或要求、要证)的结论,转化为(或利用)已知结论的过程,这种转化不仅贯穿数学解题过程的始终,也贯穿数学自身发展的始终.在演算数学问题时,如果你能从中找出这种转化关系,乃至能将一类问题之间的联系看清、摸透,你的解题能力和技巧将会大有提高,因为你此时至少已经掌握了这一类问题(而非一道问题)的解法.要做到这一点,重要的是要对各类试卷去做综合、分析、比较,看看能否找到规律性的东西.各种数学试卷难免会有交叉、重复、再者也要注意问题的演化规律.

这里想以下面一道行列式计算为例,看看近年来这类问题在考研试题中的演化及变形.

1997 年数学(四)中(以下简记如(1997④),余类同)有问题(填空题):

问题★ (1997④) 设 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

其实它是行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix} \quad (*)$$

或它的推广

$$\widetilde{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b & b \\ c & a_2 & b & \cdots & b & b \\ c & c & a_3 & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a_{n-1} & b \\ c & c & c & \cdots & c & a_n \end{vmatrix} \quad (**)$$

或其他变形的特例.

该行列式及它的衍生或变形是线性代数中较典型的一类,其计算方法有四五种之多.此前或尔后的试题中与该行列式计算有关的命题很多,比如:

1. 涉及矩阵运算的问题

问题 1: (1993④) 已知三阶矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, 试求其伴随矩阵的逆.

它的变形或引申问题是:

问题 2: (2003③) 设三阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, 若 A 的伴随矩阵的秩为 1, 则必有 ()

(A) $a = b$ 或 $a + 2b = 0$

(B) $a = b$ 或 $a + 2b \neq 0$

(C) $a \neq b$ 且 $a + 2b = 0$

(D) $a \neq b$ 且 $a + 2b \neq 0$

问题再推广或引申:

问题 3: (2001①) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$, 且秩 $r(A) = 3$. 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

该命题的又一次引申或推广形式为(从 3 阶、4 阶, 终于推广到了 n 阶的情形, 如果从命题年份上看, 前者例是后者的特例):

问题 4: (1998③) 设 $n (n \geq 3)$ 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ a & 1 & a & \cdots & a & a \\ a & a & 1 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 & a \\ a & a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix},$$

[illegible]

其中 $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$. 试讨论 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 和 b 满足何种关系时:

(1) 方程组仅有零解;

(2) 方程组有非零解. 在有非零解时, 求此方程组的一个基础解系.

显然它是问题 8 的变形,容易看出,这个问题虽是求解线性方程组,但其关键仍是要计算行列式(它们是行列式(**)的引申)

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_1 + b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix} = b^{n-1} \left(b + \sum_{i=1}^n a_i \right).$$

接下来的问题几乎与上面的问题无异(或者视为它的特例).

问题 10: (2004①) 设有齐次线性方程组

[illegible]

($n \geq 2$) 试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

显然,这也是要考虑方程组系数矩阵或其行列式

$$A = \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{bmatrix},$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ 3 & 3 & 3+a & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{vmatrix} = \left[a + \frac{n(n+1)}{2} \right] a^{n-1}.$$

注意该问题只是问题 9 的特例或变形而已(注意它们的系数矩阵间转置关系).

显然 2004 年数学(二)中的问题:只是上面问题 10 的特例情形(对于数学(二)和数学(四)试卷而言,常有与之类同的情形,如同年份试卷中,数学(二)、(四)中的某些题目往往是数学(一)、(三)中某些问题的简化或特例情形,但其解题思想是类同的).

问题 (2004②) 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + (3+a)x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (4+a)x_4 = 0. \end{cases}$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

3. 涉及矩阵特征问题

问题 11: (1992④) 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的非零特征值是_____.

注意到 $|A - \lambda I| = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$, 它亦化为前述行列式(*)的计算.

这个问题稍稍推广又出现在了 1999 年数学(一)试题中. 请看:

问题 12: (1999①) 设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1, 则 A 的 n 个特征值是_____.

显然该问题是问题 11 的推广(由 4 阶推广至 n 阶), 当然关键还是计算行列式(*).

五年之后, 同样的问题(只是稍加推广与引申)又出现在了 2004 年数学(三)试卷中.

问题 13: (2004③) 设 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(I) 求 A 的特征值和特征向量;

(II) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

其实它的解答无非还是计算行列式(*)而已. 我们简单回顾或复述一下这个问题的解法.

讨论 b 的取值:

(1) 当 $b \neq 0$ 时, 考虑

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -b & \cdots & -b \\ -b & \lambda - 1 & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b & -b & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix} = [\lambda - 1 - (n-1)b][\lambda - (1-b)]^{n-1},$$

得 A 的特征值为 $\lambda_1 = 1 + (n-1)b$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1 - b$. 然后再解线性方程组求解特征向量.

(2) 当 $b = 0$ 时, 则由

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^n,$$

知 A 的特征值为 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$, 此时任意非零向量均为其特征向量.

4. 涉及二次型问题

熟悉了上面诸问题, 下面的问题你当然不会感到陌生.

问题 14: (2001①) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 与 B ()

(A) 合同且相似

(B) 合同但相似

(C) 不合同但相似

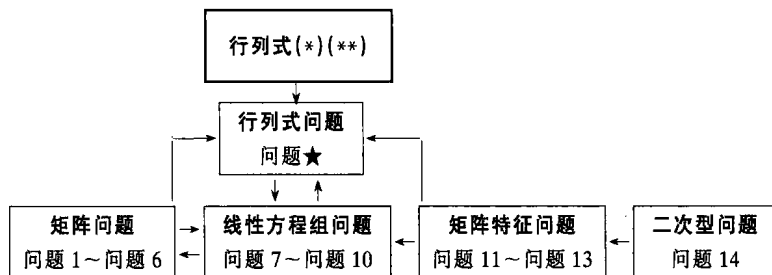
(D) 不合同且不相似

问题显然是要讨论它们的特征值情况, 因而最终还是化归计算.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix},$$

进而解 $|A - \lambda I| = 0$ 的问题.

至此我们已经看到了上述诸问题与我们介绍的行列式(*)与(**)间的关系, 这也可从下图中看得更为清晰(这里 $\rightarrow$ 表示转化关系):



这样一来, 如果再遇到这类问题, 不管它以何形式或面目出现, 你总不会感到陌生、感到无从下手了, 这对于各种考试(不仅仅是考研)来讲, 还有何愁?

我们再从另一角度看看一道考研不等式问题演化的历程.

全国硕士研究生入学考试 1993 年数学(二)试卷中有这样一道题目:

问题 1: 设函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上有连续导数, 且 $f(0) = 0$. 试证 $\left| \int_0^a f(x) dx \right| \leq \frac{Ma^2}{2}$, 这里 $M = \max_{0 \leq x \leq a} |f'(x)|$. (1993②)

它的证明不很难, 比如有下面证法:

证 1: 任取 $x \in (0, a]$, 由微分中值定理

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)x, \quad \xi \in (0, x).$$

又由 $f(0) = 0$, 则 $f(x) = f'(\xi)x$, $x \in (0, x)$. 故

$$\left| \int_0^a f(x) dx \right| = \left| \int_0^a f'(\xi) x dx \right| \leq \int_0^a |f'(\xi)| x dx \leq M \int_0^a x dx = \frac{M}{2} a^2.$$

证 2: 设 $x \in (0, a]$, 由 $f(0) = 0$, 知

$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) = f(x).$$

令 $M = \max_{0 \leq x \leq a} |f'(x)|$, 由积分性质及题设有

$$|f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq M \int_0^x 1 dt = Mt,$$

$$\text{故 } |f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq \int_0^a M dx = \frac{M}{2} a^2.$$

该问题其实只是下面一个较为经典问题的特例而已, 这个问题是:

问题 2: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = 0$. 试证

$$\frac{2}{(b-a)^2} \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

仿照上面的解法不难证得该问题. 下面再给出一个较为新颖的证法:

证: 由积分性质且注意到 $f(a) = 0$ 有 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b dx \int_0^x f'(t) dt$, $a \leq x \leq b$.

$$\text{故 } \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b \int_a^x f'(t) dt dx \right| \leq \int_a^b \int_a^x |f'(t)| dt dx$$

$$\leq \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \int_a^b (x-a) dx$$

$$= \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_a^b$$

$$= \max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \cdot \frac{(b-a)^2}{2}.$$

即要证不等式成立. 与题 2 类似的问题还有:

问题 3: 设 $f(x)$ 的一阶导数在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 则

$$\max_{x \in [a, b]} |f'(x)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx.$$

这里题目的条件中多了一个 $f(b) = 0$ 的条件, 如此一来它的结论稍有加强.

证: 若 $x \in (a, b)$, 在 $[a, x]$ 及 $[x, b]$ 上对 $f(x)$ 应用 Lagrange 中值定理有

$$f(x) - f(a) = f'(\xi_1)(x-a), \quad a < \xi_1 < x, \quad (1)$$

$$f(x) - f(b) = f'(\xi_2)(x-b), \quad a < \xi_2 < b, \quad (2)$$

又 $f(a) = f(b) = 0$, 由 $f'(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 故 $|f'(x)|$ 在 $[a, b]$ 上亦连续, 则 $|f'(x)|$ 必有最大值 M , 即

$$|f'(x)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| = M.$$

再由式 (1), (2) 有 $|f'(x)| \leq M(x-a)$, $|f'(x)| \leq M(b-x)$.

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{4}{(b-a)^2} \int_a^b |f(x)| dx &= \frac{4}{(b-a)^4} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \right] \\ &\leq \frac{4}{(b-a)^2} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x) dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4M}{(b-a)^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{2} - a \right)^2 + \frac{1}{2} \left(b - \frac{a+b}{2} \right)^2 \right] \\
 &= M = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.
 \end{aligned}$$

当然它(问题3)的特例情形是:

问题4: 设函数 $f(x)$ 的一阶导数在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1) = 0$. 试证明

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{4} \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

证: 对于积分计算可先凑微分, 再用分部积分, 这样可有

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) d\left(x - \frac{1}{2}\right) = \left[\left(x - \frac{1}{2}\right) f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 f'(x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx \\
 &= - \int_0^1 f'(x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx,
 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^1 f(x) dx \right| &\leq \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx \\
 &= \max_{x \in [0,1]} |f'(x)| \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x \right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) dx \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|,
 \end{aligned}$$

故

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{4} \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

问题3的另外变形是一道原苏联大学生数学竞赛题:

问题5: 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数, 又 $f'(a) = f'(b) = 0$. 试证在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 满足 $|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|$.

证: 由 $f(x)$ 在 $c = \frac{a+b}{2}$ 点 Taylor 展开且注意到 $f'(a) = 0$, 可有

$$\begin{aligned}
 f(c) &= f(a) + f'(a) \cdot (c-a) + \frac{f''(\xi_1)}{2} (c-a)^2 \\
 &= f(a) + \frac{f''(\xi_1)}{8} (b-a)^2 \quad (a < \xi_1 < c),
 \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
 f(c) &= f(b) + f'(b) \cdot (c-b) + \frac{f''(\xi_2)}{2} (b-a)^2 \\
 &= f(b) + \frac{f''(\xi_2)}{8} (b-a)^2 \quad (c < \xi_2 < b),
 \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 |f(b) - f(a)| &= \frac{1}{2} (b-a)^2 |f''(\xi_2) - f''(\xi_1)| \\
 &\leq \frac{1}{8} (b-a)^2 [|f''(\xi_2)| + |f''(\xi_1)|] \\
 &\leq \frac{1}{4} (b-a)^2 |f''(\xi)|,
 \end{aligned}$$

即

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

其中 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$.

问题6: 设函数 $f(x)$ 的二阶导数连续, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 又 $\min_{x \in [0,1]} f(x) = -1$, 试证

$$\max_{x \in [0,1]} f''(x) \geq 8.$$

证: 设 $f(x)$ 在 a 处取得最小值, 显然 $a \in (0,1)$.

则 $f'(a)=0$, $f(a)=-1$. 依 Taylor 公式有 (式中 ξ 在 x, a 之间)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(\xi)(x-a)^2 = -1 + \frac{1}{2} f''(\xi)(x-a)^2.$$

因 $f(0)=f(1)=0$, 故 当 $x=0, x=1$ 时:

$$0 = -1 + f''(\xi_1) \cdot \frac{a^2}{2}, \Rightarrow f''(\xi_1) = \frac{2}{a^2}.$$

$$0 = -1 + f''(\xi_2) \cdot \frac{1}{2}(1-a)^2, \Rightarrow f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-a)^2}.$$

故 $a < \frac{1}{2}$ 时, $f''(\xi_1) > 8$; $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $f''(\xi_2) \geq 8$. 即知 $\max_{x \in [0,1]} f''(x) \geq 8$.

注: 下面的问题是本例的变形或对偶问题:

设函数 $f(x)$ 的二阶导数连续, 且 $f(0)=f(1)=0$, 又 $\max_{x \in [0,1]} f(x)=2$. 试证 $\min_{x \in [0,1]} f''(x) \leq -16$.

问题 3 的另外变形或引申可见 (它曾作为北方交通大学 1994 年大学生数学竞赛题):

问题 7: 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数, 且 $f(0)=f(1)=0$. 又 $x \in (0,1)$ 时

$$f(x) \neq 0. \text{ 试证 } \int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq 4.$$

证: 记 $M = |f(x_0)| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$, 在区间 $[0, x_0]$ 和 $[x_0, 1]$ 上分别对 $f(x)$ 使用微分中值定理, 有

$$f(x_0) = f'(\xi_1)x_0, \quad 0 < \xi_1 < x_0,$$

及

$$-f(x_0) = f'(\xi_2)(1-x_0), \quad x_0 < \xi_2 < 1.$$

则

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx &\geq \int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{M} \right| dx = \frac{1}{|M|} \left[\int_0^{x_0} |f''(x)| dx + \int_{x_0}^1 |f''(x)| dx \right] \\ &\geq \frac{1}{|M|} \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x) dx \right| = 4. \end{aligned}$$

作为 $\max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$ 下界的对偶问题可有 (它是上海交通大学 1991 年大学生数学竞赛题):

问题 8: 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数, 试证 $\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx \geq \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

证: 由设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 故 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也连续, 从而有 $x_0 \in [a,b]$, 使 $|f(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$.

又由积分中值定理有 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\xi)$, $\xi \in [a,b]$, 故

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| + \int_a^b |f'(x)| dx = |f(\xi)| + \int_a^b |f'(x)| dx \\ &\geq |f(\xi)| + \left| \int_{\xi}^{x_0} f'(x) dx \right| = |f(\xi)| + |f(x_0) - f(\xi)| \\ &\geq |f(\xi) - f(x_0) - f(\xi)| = |f(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|. \end{aligned}$$

当然问题还可写如:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \leq \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| + \int_a^b |f'(x)| dx,$$

只须注意到 $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ 即可.

这样与题 2 结合可有不等式(注意到 $f(a) = 0$):

$$\frac{2}{(b-a)^2} \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)| \leq \left| \frac{f(b)}{b-a} \right| + \int_a^b |f'(x)| dx.$$

作为题 8 的特例或引申便是研究生入学考试 1996 数学(一)的题目:

问题 9: 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有二阶导数, 且满足条件 $|f(x)| \leq a, |f''(x)| \leq b$, 其中 a, b 都是非负常数, c 是 $(0, 1)$ 内任意一点. 证明 $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$. (1996①)

证: 由上面一阶泰勒公式, 分别令 $x=0$ 和 $x=1$, 则有

$$f(0) = f(c) - f'(c)c + \frac{f''(\xi_1)}{2!}c^2, \quad 0 < \xi_1 < c < 1,$$

$$f(1) = f(c) + f'(c)(1-c) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-c)^2, \quad 0 < c < \xi_2 < 1.$$

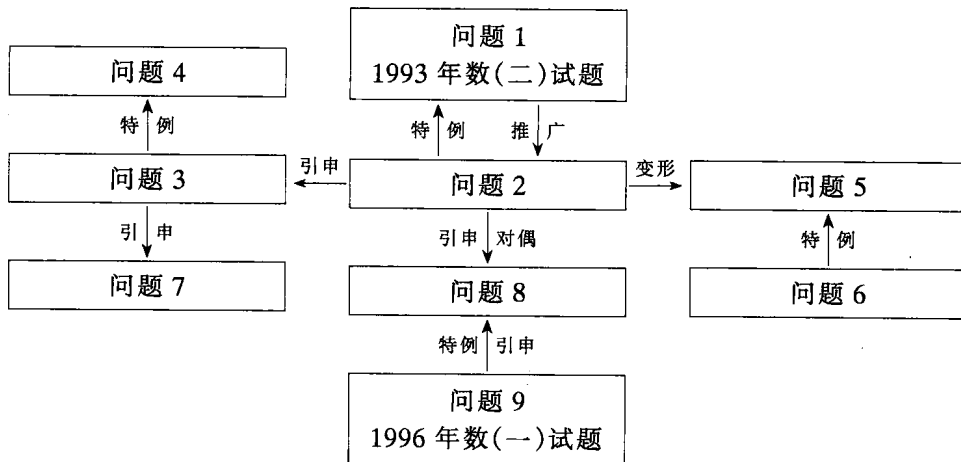
两式相减得

$$f(1) - f(0) = f'(c) + \frac{1}{2!}[f''(\xi_2)(1-c)^2 + f''(\xi_1)c^2].$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } |f'(c)| &\leq |f(1)| + |f(0)| + \frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-c)^2 + \frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2 \\ &\leq a + a + \frac{b}{2}[(1-c)^2 + c^2]. \end{aligned}$$

又因 $c \in (0, 1)$, 有 $(1-c)^2 + c^2 \leq 1$, 故 $|f'(c)| \leq 2a + \frac{b}{2}$.

由上我们已经看出这些问题间的内在联系:



搞清这些问题之间的关联, 从中不仅可以学会掌握解这类问题的方法, 更重要的可以看清这些问题彼此间是如何联系及转化的, 如前所言解数学问题就是将未知转化为已知的过程. 此外弄清这些关系, 也可看透拟题者的匠心与立意, 因为特例、推广、引申和对偶也是拟造数学命题的重要手段和方法.