高等数学起步

梁进　李芳　王惠文　编著

科学出版社
www.sciencep.com

高等数学起步

梁 进 李 芳 王惠文 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书针对目前中学数学教学与大学数学教学之间的脱节之处，补充讲述了一些学习高等数学的必备知识，意在使读者有坚实、有力的“起步”，在“起跑”线上即赢得学好高等数学的优势.

本书的主要内容有：实数域与函数，三角函数，多项式和因式分解，极坐标和参数方程，复数，推理与归纳以及附章：一元微积分范例选析.

本书是根据国内高校广泛采用的高等数学教学计划，按知识点在教学过程中出现的先后顺序来编排的，各章节之间相互独立，而且各章节均配有习题及知识点小结.

本书可供各类高等院校，各类本、专科专业的学生作学习参考书，也可作为大学数学老师及中学数学老师的课外辅导教材. 对于中学高年级学生而言，也是一本有益的、开拓眼界的课外读物.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学起步/梁进，李芳，王惠文编著. —北京：科学出版社，2008

ISBN 978-7-03-021275-7

I. 高… II. ①梁… ②李… ③王… III. 高等数学-教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 030785 号

责任编辑：范庆奎 房 阳 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：赵德静 / 封面设计：王 浩

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 5 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2008 年 5 月第一次印刷 印张：13 1/2
印数：1—5 000 字数：254 000

定价：28.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈长虹〉)

前 言

本书根据 2006 年普通高等学校招生全国统一考试大纲 (理科 · 数学) 和现行的高等数学教学大纲, 对一些中学数学教学中触及较少或未触及, 但学习高等数学时所必需的数学知识进行了比较系统的论述.

本书侧重于对学习高等数学所需知识点进行针对性的讲述, 而并非对所提到的相关知识点都进行详细完整的叙述. 例如, 关于多项式的理论有丰富的内容, 第 3 章给出的是与高等数学的学习密切相关的知识点, 对其他内容感兴趣的读者可参阅相关书籍.

本书第 1 章简要介绍了实数域的基本性质, 陈述了一些基本的、将来学习中要用到的不等式. 选择性地给出了一些不等式的证明, 其余不等式的证明在课程学习中会有论述或作为习题.

第 2 章是关于三角函数的积化和差、和差化积公式以及反三角函数基本性质的论述.

第 4 章比较系统地介绍了与直角坐标系不同的新的坐标系 —— 极坐标系以及极坐标系中的一些相关知识, 它们将在定积分、曲线积分、曲面积分等章节中被用到. 此外, 对于中学时期触及较少的知识点“参数方程”也作了进一步的讲述.

第 5 章讲述了复数的三角形式及其运算法则, 介绍了复数的指数形式等, 这些知识点将在微分方程的求解以及后继课程“复变函数”中用到.

第 6 章介绍了一些基本的推理和证明知识, 以帮助初学者在高等数学的学习中清楚地认识数学研究方法的本质, 深刻地理解数学概念和数学原理, 为提高数学证明能力打好基础.

为了帮助初学者解决在高等数学学习中可能遇到的困难, 我们还专门附上了“一元微积分范例选析”一章. 读者从中可以看到一些有针对性的范例解答, 而且许多示例的解答方法不止一种, 还有一部分是高等数学通用教材中知识点的补充和延伸. 希望这一章的内容能对读者开拓思路, 提高举一反三和从不同的角度来领悟数学定理、定义之精髓的能力有所帮助. 限于篇幅, 我们只选析了一元微积分中数列的极限、有界闭区间上连续函数的性质、微分学基本定理的应用、不定积分的计算和关于定积分的证明这 5 个方面的一些问题, 其他内容将在后续书籍中补充讲解.

由于本书的阅读对象大多为初学高等数学或中学高年级的读者, 故在定理、命题的证明方面, 在保证逻辑严密的基础上, 尽量避免晦涩难懂, 力求做到简明扼要、通俗易懂.

本书部分章节后配有习题, 供读者练习之用.

本书虽然是为初学者"起步"而编写的, 但在书中的原理和结论的陈述中, 部分涉及了较深的知识, 读者可以一边学习高等数学, 一边阅读体会该部分内容, 这样更能加深对高等数学知识的理解. 真诚希望本书能为读者提供"起步 — 入门 — 提高"的真实体验.

在本书的编写过程中, 我们参考了许多相关的优秀读物和书籍, 在此对其作者表示诚挚感谢. 中国科学技术大学数学系谢盛刚教授审订了全书, 并提出了宝贵的建议, 我们向他表示衷心的感谢. 数学系研究生张俊、林羽、朱星星阅读了全书, 并提出了一些修改建议, 在此一并表示感谢.

在高等数学正式教材之外写一本相关的起步读物作为学生的课外阅读书, 是一种新的尝试. 既要让学生比较系统地掌握所需知识点, 又要尽量少而精, 要做到这样的二者兼顾, 难免有失. 我们殷切希望得到读者的反馈意见和建议, 使本书的不足以及疏漏之处得以改进和完善.

编　者

2008 年 1 月

常 用 符 号

$\forall$　任意 (一个), 任取

$\exists$　存在或存在某个

$\in$　属于

$\notin$　不属于

$\equiv$　恒等于

$\varnothing$　空集

$\Rightarrow$　蕴含着, 推导出

$\Leftrightarrow$　等价于

自然数集合　$\mathbf{N} := \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$

整数集合　$\mathbf{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots, \pm n, \cdots\}$

有理数集合　$\mathbf{Q} := \left\{ \dfrac{p}{q} \,\middle|\, q, p\text{为互素的整数}, q \neq 0 \right\}$

正有理数集合　$\mathbf{Q}^{+} := \{x \mid x \in \mathbf{Q}, x > 0\}$

实数集合　$\mathbf{R} := \{x \mid x\text{为实数}\}$

正实数集合　$\mathbf{R}^{+} := \{x \mid x \in \mathbf{R}, x > 0\}$

复数集合　$\mathbf{C} := \{x + y\mathrm{i} \mid x, y \in \mathbf{R}\}$

开区间　$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$

闭区间　$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

半开半闭区间　$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$ 或 $[a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$

无穷区间　$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$ 或 $[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$

$(-\infty, a] = \{x \mid x \leqslant a\}$ 或 $(-\infty, a) = \{x \mid x < a\}$

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R}$

任意区间可用记号I表示

max　最大, maximum 的缩写

min　最小, minimum 的缩写

目　　录

第 1 章　实数域与函数

1.1　实数域及其性质

高等数学研究的基本对象是定义在实数集上的函数，为此先简要叙述有关实数的概念.

我们已经知道，实数由有理数和无理数两大部分组成，每个有理数均可表示为分数 $\frac{p}{q}$(p, q 为整数，$q \neq 0$) 的形式，也可以用有尽十进制小数或无尽十进制循环小数表示，而无尽十进制不循环小数则表示无理数. 因此，实数可以看成是全体无尽小数的集合.

此外，我们知道，数轴上的任何一点都可以用一个实数来表示，每个实数也对应着数轴上的一个点，可见全体实数正好铺满了数轴，这个性质称为实数的连续性.

定义 1.1.1　*设 P 为包含数 $0, 1$ 在内的数集，若 P 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零) 仍然为 P 中的数，则称集合 P 为一个***数域.**

在此定义下，有理数集、实数集和复数集均为数域，分别称为有理数域、实数域和复数域，分别用记号 $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ 来表示. 显然，整数集 $\mathbf{Z}$ 和自然数集 $\mathbf{N}$ 就不是数域.

在高等数学的学习中将会遇到一系列利用实数性质或与其性质有关的证明题，故需要了解实数域的基本性质.

实数域有以下特性：

(1) 有序性. 对于任意 $a, b \in \mathbf{R}$, 必满足下述三个关系之一：

(i) $a < b$,

(ii) $a = b$,

(iii) $a > b$.

(2) 阿基米德 (Archimedes) 性. 对任意 $a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a > 0, b > 0$, 则存在正整数 n, 使得 $na > b$.

这个性质的严格证明通常需要建立在一个公理 (如戴德金 (Dedekind) 定理或确界原理①) 的基础上来完成，详细的证明过程已超出教学大纲的范围，故略去证明.

(3) 任意两个不相等的实数之间必然存在一个有理数.

---

① 见附录 B.

证明　设 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 且 $\alpha < \beta$. 由阿基米德性, 必存在自然数 N, 使得

$$N(\beta - \alpha) > 1, \quad 即 \quad \beta - \alpha > \frac{1}{N}.$$

任意取定有理数 $\gamma_0 < \alpha$, 由于 $\frac{1}{N} > 0$, $\alpha - \gamma_0 > 0$, 故由阿基米德性, 存在 $m \in \mathbf{N}$, 使得 $\gamma_0 + \frac{m}{N} > \alpha$. 可见, 数列 $\left\{\gamma_0 + \frac{n}{N}\right\}$ 中总有一项大于 α.

设 $\gamma_0 + \frac{n_0}{N}$ 为此数列中第一个大于 α 的项, 于是 $\gamma_0 + \frac{n_0 - 1}{N} \leqslant \alpha$, 故

$$\begin{aligned}\gamma_0 + \frac{n_0}{N} - \beta &\leqslant \alpha - \frac{n_0 - 1}{N} + \frac{n_0}{N} - \beta \\ &= \alpha + \frac{1}{N} - \beta \\ &< 0,\end{aligned}$$

即 $\alpha < \gamma_0 + \frac{n_0}{N} < \beta$, 而 $\gamma_0 + \frac{n_0}{N}$ 显然为有理数, 即证. □

类似可以证明: 任意两个不相等的实数之间必存在一个无理数. 于是有: 任意两个不相等的实数之间必有一个实数.

性质 (3) 也可以被描述为: 在任意一个区间 (α, β) 内都存在有理数.

由此可见, 有理数在实数集中是密集分布的, 但仍有“缝隙”, 这些“缝隙”则由无穷多的无理数填满.

任意取定正整数 q, 在数轴上将单位长度等分成 q 份, 找到点 $\frac{1}{q}$, 继而对于任意整数 p, 也能找到点 $\frac{p}{q}$. 如果固定 q, 让 p 取遍所有整数, 则 $\frac{p}{q}$ 可将数轴分成一些长度为 $\frac{1}{q}$ 的区间, 于是对于任意取定的实数 x, 都可以找到一个整数 p 使得

$$\frac{p}{q} \leqslant x < \frac{p+1}{q},$$

即

$$0 \leqslant x - \frac{p}{q} < \frac{1}{q} \quad 或 \quad \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}.$$

若将 q 取得充分大, 可见任何一个实数 x 都可用有理数去逼近, 而且误差可以任意小. 这说明有理数在数轴上是稠密的, 即在实数集中是稠密的.

关于实数域更多的性质, 感兴趣的读者可参考有关实数域理论的书籍.

习　题　1.1

1. 设 a 为有理数, x 为无理数, 试证:

(1) $a + x$ 为无理数.　(2) 当 $a \neq 0$ 时, ax 为无理数.

2. 设 p 为正整数, 证明: 若 p 不是完全平方数, 则 $\sqrt{p}$ 为无理数.

1.2 有理数集是可数集

我们已经知道, 每个有理数可以表示为分数 $\dfrac{p}{q}\,(p,\,q\in\mathbf{Z},q\neq 0)$ 的形式, 也可以用有尽十进制小数或无尽十进制循环小数表示.

此外, 有理数在数轴上是稠密的, 但从某种意义上说, 有理数又很“稀少”, 下面来说明这一事实.

首先引入集合的势的定义.

定义 1.2.1 设 A, B 为两个集合, 若存在一个 A 到 B 上的一一映射, 就称集合 A 与集合 B 有相同的**势**, 或说 A 与 B **等价**, 用 $A\sim B$ 表示.

显然, 这里的关系“$\sim$”具有自反性、对称性和传递性 ①.

易见, “势”是有限集合中“元素个数”这一概念的推广. 对于有限集 A, B 而言, 具有相同的势即等价于它们的元素个数相同.

对于两个无限集合, 只需看它们之间能否建立一个一一映射, 从而确定它们是否有相同的势.

下面比较有理数集与自然数集的势.

将正有理数按分母、分子大小作如下排列:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & \rightarrow & \frac{1}{6} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \frac{2}{4} & & \frac{2}{5} & & \frac{2}{6} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{3}{5} & & \frac{3}{6} & & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & \\
\frac{4}{1} & & \frac{4}{2} & & \frac{4}{3} & & \frac{4}{4} & & \frac{4}{5} & & \frac{4}{6} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & & & & & \\
\frac{5}{1} & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{3} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{5} & & \frac{5}{6} & & \cdots \\
 & \swarrow & & & & & & & & & & & \\
\frac{6}{1} & & \frac{6}{2} & & \frac{6}{3} & & \frac{6}{4} & & \frac{6}{5} & & \frac{6}{6} & & \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

① 自反性: $A\sim A$; 对称性: 若 $A\sim B$, 则 $B\sim A$; 传递性: 若 $A\sim B$ 且 $B\sim C$, 则 $A\sim C$.

上述排列中虽然有些数重复出现, 但包括了全体正有理数, 即

$$1, \frac{1}{2}, 2, 3, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{4}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots$$

将这些数视为排在一条直线上的节点, 将这些节点用自然数 $1, 2, 3, \cdots$ 编号, 这就建立了正有理数集与自然数集 $\mathbf{N}$ 之间的对应, 若去掉重复出现的正有理数, 则也可以与自然数集建立一一对应.

可见, 正有理数集与自然数集有相同的势.

同样, 若将 0 加入刚才排好序的第一个节点前, 再把每一个负有理数加在对应的 (绝对值相等的) 正有理数后面, 则仍然可用自然数 $1, 2, 3, \cdots$ 给这些节点编号.

这说明有理数集与自然数集有相同的势, 即 $\mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$.

将该直线视为数轴, 其上的节点表示有理数, 则可见节点在直线上所占位置极少, 即有理数在数轴上所占份额极少, 数轴上的其他位置被无理数占据, 所以说有理数很“稀少”.

把与自然数集 $\mathbf{N}$ 有相同的势的集合称为**可数集**(或**可列集**), 因此, 有理数集 $\mathbf{Q}$ 为可数集.

由于可数集 A 与自然数集 $\mathbf{N}$ 之间可以建立一一映射, 故若设与 n 对应的元素为 a_n, 则 A 的全体元素可以排成一个无限序列:

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots.$$

反之, 若集合 A 的元素可以排成上面的无限序列, 则映射 $f: a_n \to n$ 为 A 到 $\mathbf{N}$ 的一一映射, 故 A 可数, 因此, A 为可数集的等价说法是 A 的全体元素可以排成一个无限序列.

不能与自然数集 $\mathbf{N}$ 建立一一对应关系的无限集合称为**不可数集**(或**不可列集**).

实数集就是一个不可数集, 即无法建立实数集与自然数集之间的一一对应关系, 或者说实数不可列.

下面先就区间 $(0, 1)$ 上的实数来说明.

假设已将区间 $(0, 1)$ 上的全体实数排成一个无限序列, 设为

$$(0, 1) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}.$$

将 $(0, 1)$ 中的实数用十进制无尽小数表示, 设为

$$x_1 = 0.a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots,$$

$$x_2 = 0.a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n = 0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$

其中, 所有的 a_{ij} 都在 $0\sim 9$ 中取值, 并且对每个 i, 数列 $\{a_{ij}\}$ 中有无限项不为 0.

构造数 $b=0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$($b_i$ 在 $0\sim 9$ 中取值, $i=1,2,\cdots,n,\cdots$), 其中,

$$b_1\neq a_{11},\quad b_2\neq a_{22},\quad b_3\neq a_{33},\quad b_4\neq a_{44},\quad \cdots,\quad b_n\neq a_{nn},\quad \cdots,$$

且 $b_i\neq 0$, 不全为 9. 显然 $b\in(0,1)$, 但 b 与任何一个 x_i 都不相等, 故 b 不在已排序的序列中, 矛盾. 由此可见, 区间 $(0,1)$ 内的实数是不能被排成序列的, 故区间 $(0,1)$ 是不可数集.

建立映射

$$f: x\to \tan\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right),$$

则易见 f 为从区间 $(0,1)$ 到区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的一一映射, 即区间 $(-\infty,+\infty)$ 与区间 $(0,1)$ 有相同的势, 故实数集 $\mathbf{R}$ 是不可数集.

由此可见, 区间 $(0,1)$ 与实数集有相同的势.

事实上, 任何区间与实数集有相同的势.

例如, 易见

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{1}{n+2},\ n=1,2,\cdots,\\ x, & x\neq 0\ \text{且不是自然数的倒数}\end{cases}$$

为区间 $(0,1)$ 到区间 $[0,1]$ 上的一一映射, 即有 $(0,1)\sim[0,1]$.

此外, 对于任意实数 a,b, 当 $a<b$ 时, 建立映射

$$f: x\to (b-a)x+a,$$

易见 f 为区间 $(0,1)$ 到区间 (a,b) 上的一一映射, 即 $(0,1)\sim(a,b)$; 当然, f 也可以看作区间 $[0,1]$ 到区间 $[a,b]$ 上的一一映射, 故 $[0,1]\sim[a,b]$, 于是

$$(0,1)\sim[0,1]\sim[a,b]\sim(-\infty,+\infty).$$

由此可见, 有限长的直线段上的点与无限长直线上的点是一一对应的, 即数轴上任何连成一片的实数集的子集与实数全集有一一对应关系, 也就是说有相同的势. 数学上称连成一片的数集为连续统, 它们都是不可数集.

习 题 1.2

1. 全体正偶数与全体自然数的势相同吗?

2. 大小不等的两个同心圆圆周上的点是否“一样多”?

3. 设在平面上以坐标为有理数的点为中心, 以有理数为半径作圆, 证明所有这种圆组成的集合 A 是可数的.

1.3 绝对值与不等式

1.3.1 绝对值

将一些常用的绝对值的性质罗列如下:

(1) $|a| \leqslant b, b > 0 \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b$. 特别地, $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

(2) $|a| > b > 0 \Leftrightarrow a > b$ 或 $a < -b$.

(3) $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a+b| \leqslant |a| + |b|$.

(4) $|ab| = |a||b|$.

(5) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|, \quad a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}$.

(6) $|a + a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \geqslant |a| - (|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|)$.

(7) 平均值不等式. $x^2 + y^2 \geqslant 2|xy|, \dfrac{|x| + |y|}{2} \geqslant \sqrt{|xy|}$.

1.3.2 不等式

(1) **伯努利 (Bernoulli) 不等式**. 设 $h > -1, n \in \mathbf{N}$, 则 $(1+h)^n \geqslant 1 + nh$.
由数学归纳法易见这个不等式对一切自然数成立.

(2) **伯努利 (Bernoulli) 不等式**. 设 $x \geqslant -1,\ 0 < \alpha < 1$, 则

$$(1+x)^\alpha \leqslant 1 + \alpha x.$$

若 $\alpha < 0$ 或 $\alpha > 1$, 则不等式反向.
此不等式由函数的单调性可证.

(3) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdots \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

证明　由于

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}\right)^2 &< \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdots \left(\frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-2}{2n-1}\right)\left(\frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1},\end{aligned}$$

故原不等式成立. □

(4) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2, n\in\mathbf{N}$.

证明

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\\&<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\&=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=2-\frac{1}{n}<2.\end{aligned}$$

该不等式说明数列 $\left\{S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right\}$ 有界①. □

(5) $2^n>n,\ n=0,1,2,\cdots$.

证明 当 $n=0$ 时, 不等式显然成立.

当 $n\geqslant 1$ 时, 由二项式定理知

$$2^n=(1+1)^n=1+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n>\mathrm{C}_n^1=n.$$ □

(6) $2^n>n^2,\ n=5,6,\cdots$.

证明 当 $n=5$ 时, 不等式显然成立. 设 $2^k>k^2$ 对某个大于 5 的整数成立, 再注意到 $\left(\frac{k+1}{k}\right)^2<2$, 故必有

$$2^{k+1}>k^2\cdot 2>(k+1)^2.$$

由数学归纳法立知结论成立. □

(7) $2\sqrt{n+1}-2<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}$.

证明 由于

$$2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}<\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}-2\sqrt{k-1},$$

故将上式中的 k 分别取 $1, 2, \cdots, n$ 就会得到 n 个不等式, 再将这 n 个不等式相加, 即得证. □

(8) 对于非负实数 a, b 及自然数 n, 有

$$a^n+b^n\leqslant(a+b)^n.$$

① 数列 $\{a_n\}$ 有界的定义: 若 $\exists M>0$, 使 $\forall n\in\mathbf{N}$, 有 $|a_n|\leqslant M$, 则称 $\{a_n\}$ 有界.

证明　由二项式定理易见结论成立. □

(9) **贝祖[①]不等式**. 对于 $a > b > 0$, $n \in \mathbf{N}$ 有

$$n(a-b)b^{n-1} < a^n - b^n < n(a-b)a^{n-1}.$$

证明　由 $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, 立知结论成立. □

(10) 设 $x, y \geqslant 0$, $m, n \in \mathbf{N}$, 则

$$x^m y^n + x^n y^m \leqslant x^{m+n} + y^{m+n},$$

等号当且仅当 $x = y$ 时成立.

证明　等价于证

$$x^m y^n + x^n y^m - x^{m+n} - y^{m+n} \leqslant 0,$$

即

$$x^m(y^n - x^n) + y^m(x^n - y^n) = (x^n - y^n)(y^m - x^m) \leqslant 0.$$

易见, 当 $x, y \geqslant 0$, $m, n \in \mathbf{N}$ 时, $x^n - y^n$ 与 $y^m - x^m$ 异号, 即证. □

(11) 设 $n \in \mathbf{N}$ 且 $x, y \geqslant 0$, 则

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^n,$$

等号当且仅当 $x = y$ 时成立.

证明　归纳法. 当 $n = 1$ 时, 不等式显然成立.

假设当 $n = k$ 时, 命题正确, 则当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+y}{2}\right)^{k+1} &= \left(\frac{x+y}{2}\right)^k \cdot \frac{x+y}{2} \leqslant \frac{x^k + y^k}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \\ &= \frac{x^{k+1} + y^{k+1} + x^k y + x y^k}{4} \\ &\leqslant \frac{x^{k+1} + y^{k+1} + x^{k+1} + y^{k+1}}{4} \quad (\text{由不等式 } (10)) \\ &= \frac{x^{k+1} + y^{k+1}}{2},\end{aligned}$$

即证. □

(12) 设 $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$, $b, d > 0$, 则 $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.

---

① 贝祖 (Etienne Bezout), 1730~1783, 法国数学家.

证明 由 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$ 知, $ad<bc$, 故 $a(b+d)<b(a+c)$, 即证第一个不等式. 同理, 由 $ad+cd<cb+cd$ 即证第二个不等式. □

(13) 设 $S=\left\{\dfrac{a_1}{b_1},\dfrac{a_2}{b_2},\cdots,\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$, 其中, $b_k>0,\quad k=1,2,\cdots,n$, 则

$$\min S\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\leqslant\max S.$$

证明 归纳法. 当 $n=1$ 时, 不等式显然成立.
假设当 $n=k$ 时, 命题正确, 则当 $n=k+1$ 时, 令

$$\alpha=\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\cdots,\frac{a_k}{b_k}\right\},\quad \beta=\max\left\{\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\cdots,\frac{a_k}{b_k}\right\}.$$

记 $A=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i$, $B=\sum\limits_{i=1}^{k}b_i$, 由归纳假设得 $\alpha\leqslant\dfrac{A}{B}\leqslant\beta$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{b_1+b_2+\cdots+b_{k+1}}&=\frac{A+a_{k+1}}{B+b_{k+1}}\geqslant\min\left\{\frac{A}{B},\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right\}\quad(\text{由不等式 (12)})\\&\geqslant\min\left\{\alpha,\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right\}\\&=\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\cdots,\frac{a_k}{b_k},\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right\}.\end{aligned}$$

同理可证,

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{b_1+b_2+\cdots+b_{k+1}}\leqslant\max\left\{\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\cdots,\frac{a_k}{b_k},\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right\},$$

即当 $n=k+1$ 时结论成立. □

(14) 设 $n\geqslant2$, $a_i>-1$, $i=1,2,\cdots,n$ 且同号, 则

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)>1+(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

(15) 设 $n\geqslant2$, $0<a_i<1$, $i=1,2,\cdots,n$, 则

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-(a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

由数学归纳法不难证明不等式 (14), (15).

(16) **均值不等式**. 对于 $a_i\in\mathbf{R}^+$, $i=1,2,\cdots,n$, 有

$$\frac{n}{1/a_1+1/a_2+\cdots+1/a_n}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$