普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

经济数学基础

侯风波　主编

高等教育出版社

普通高等教育"十五"国家级规划教材

(高职高专教育)

经济数学基础

侯风波　主编

张学奇　孟庆才　杨建法

刘清贵　吴素敏　蔡谋全　编

焦万堂　高小明　刘颖华

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，又是教育部新世纪高职高专教育高等数学课程内容、体系改革与建设项目研究成果。本书是在充分研究当前我国高职高专大众化发展趋势下的教育现状，认真总结、分析、吸收全国高职高专院校经济管理类专业经济数学教学改革经验的基础上编写的。从高职高专教育人才培养目标出发，以教育部新修订的《高职高专教育高等数学教学基本要求》为指导，优选了教学内容。其内容包括函数、极限与连续、导数与微分、一元函数微分学的应用、一元函数积分学、多元函数微分学、常微分方程、行列式与矩阵、线性方程组、线性规划、符号计算系统 Mathematica 及其应用共十一章。本书前六章需要 60 学时，适用于二年制高职高专院校经济管理类专业；后五章需要 46 学时，适用于三年制高职高专院校经济管理类专业。本书特别注意培养学生用数学概念、思想、方法消化吸收经济概念、经济原理的能力，把实际问题转化为数学模型的能力，利用计算机求解数学模型的能力。

本书可作为高职高专经济管理类专业通用数学教材，也可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/侯风波主编. —北京：高等教育出版社，2004.6

ISBN 7-04-014694-0

Ⅰ.经... Ⅱ.侯... Ⅲ.经济数学-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 025764 号

策划编辑 蒋　青　**责任编辑** 李　陶　**封面设计** 杨立新　**责任绘图** 吴文信
版式设计 胡志萍　**责任校对** 杨雪莲　**责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	涿州市星河印刷有限公司		
开　本	787×1092　1/16	版　次	2004年6月第1版
印　张	16	印　次	2004年8月第2次印刷
字　数	380 000	定　价	17.10元

出 版 说 明

为加强高职高专教育的教材建设工作，2000 年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》（教高司[2000]19 号），提出了“力争经过 5 年的努力，编写、出版 500 本左右高职高专教育规划教材”的目标，并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施：先用 2 至 3 年时间，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验，解决好高职高专教育教材的有无问题；然后，再用 2 至 3 年的时间，在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神，有关院校和出版社从 2000 年秋季开始，积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据 1999 年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》（草案）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（草案）编写的，随着这些教材的陆续出版，基本上解决了高职高专教材的有无问题，完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002 年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题，将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略，抓好重点规划”为指导方针，重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设，特别注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材；同时还要扩大教材品种，实现教材系列配套，并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系，在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材（高职高专教育）适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002 年 11 月 30 日

前　　言

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材，又是教育部新世纪高职高专教育高等数学课程内容、体系改革与建设项目研究成果。本书是在充分研究当前我国高职高专大众化发展趋势下的教育现状，认真总结、分析、吸收全国高职高专院校经济管理类专业经济数学教学改革经验的基础上编写的。从高职高专教育人才培养目标出发，以教育部新修订的《高职高专教育高等数学教学基本要求》为指导，优选了教学内容。内容包括函数、极限与连续、导数与微分、一元函数微分学的应用、一元函数积分学、多元函数微分学、常微分方程、行列式与矩阵、线性方程组、线性规划、符号计算系统 Mathematica 及其应用共十一章。书后附有习题答案与提示。本书特别注意培养学生用数学概念、思想、方法消化吸收经济概念和经济原理的能力，把实际问题转化为数学模型的能力，利用计算机求解数学模型的能力。

本书以满足高职高专院校经济管理类专业经济数学教学需要为目标，在教学水平、科学水平、思想水平上均符合人才培养目标及本课程教学基本要求。本书取材合适、深度适宜、分量恰当，符合认知规律，富有启发性，便于学习，有利于激发学生学习兴趣及各种能力的培养。本书还有如下特色：

1. 在本书第十一章介绍了"符号计算系统 Mathematica 及其应用"，有利于培养学生用计算机及相应数学软件包求解数学模型的能力；

2. 在保证数学概念准确的前提下，尽量借助于几何直观，力求使抽象的数学概念形象化，便于读者理解；

3. 注重数学概念与实际问题的联系，特别是与经济问题的联系，例题丰富便于学习；

4. 结合具体内容进行数学建模训练，注重双向翻译能力的培养；

5. 理论推导或证明以解释清楚有关结论为度，不追求理论上的系统性；

6. 行列式采用归纳定义法，避开了逆序数定义法，适合高职高专学生学习的特点；

7. 矩阵乘法先引入行向量左乘列向量，再介绍两个矩阵的乘法，便于学生接受；

8. 课程的每一主题都尽量从几何、数值、代数三方面加以体现。

9. 在本书主编负责的网络课程中，给出了本书习题的全部答案及学法和教法建议，使用本书的学生和教师可以通过访问网络课程(http://hv.hep.com.cn)的相应板块得到帮助。

经济数学是高职高专学校经济管理类专业必修的一门重要的基础课程。它对培养和提高学生的思维素质、创新能力、科学精神、治学态度以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。

致教师：

经济数学中每一个重要概念都有其实际背景。从实际问题出发引出概念可激发学生的求知欲，提高教学效果。教师的教学活动表面上以完成教学基本要求(或教学大纲)中所规定的知识点的教学为目标，实质上，结合人才培养目标去思考确定课程的知识、能力、素质的具体培养目标才更有现实意义。高职高专教育以培养应用性人才为教育目标。那么，作为支持高职高专教育应用性人才培养目标的重要基础课程——经济数学课程应该具体培养学生哪些方面的能力？学数学是为

了用数学。这是人人都接受的观点。那么，用到哪儿？怎么用？却仁者见仁，智者见智。而诸如经济数学要为学习后继课程服务、要为培养学生的思维能力服务、要为获得新知识服务、要为解决实际问题服务等等均在一定程度上引起了共识。但是，在一定程度上也存在着争议。通过多年的教学研究与实践，我们认识到：高职高专院校经济管理类专业的数学教育必须培养如下四方面的能力：一是用数学的思想、概念、方法消化吸收经济概念和经济原理的能力；二是把实际问题转化为数学模型的能力；三是求解数学模型的能力；四是培养创造性思维的能力。培养用数学思想、概念、方法消化吸收经济概念和经济原理的能力，必须重视数学概念的教学；培养学生把实际问题转化为数学模型的能力，必须重视数学建模训练；培养学生求解数学模型的能力，必须结合数学软件包进行数学教学。另外，数学是最好的思维体操，作为数学教师应有意识地去结合教学内容培养学生的逻辑思维、类比思维、发散思维及联想思维等各种思维能力，帮助他们欣赏数学美。进而，培养学生的创新能力。这些都是我们在教学中努力尝试的。在本书的编写过程中，也试着将这些观点与有关内容适度结合，但做得还远远不够。愿我们在今后的教学实践中共勉。

致学生：

为什么要学习经济数学？经济数学是学习后继课程的基础，是打开科学大门的钥匙，是高科技的核心。数学主要是研究现实世界中物质数量关系与空间形式的科学。现实世界中，凡是涉及量的大小、量的变化、量与量之间的关系，都要用到数学。客观世界中一切实在的物体都有形。因此，宇宙之大，粒子之微，光速之快……无处不用数学。要想实在地学到并掌握专业知识，必须掌握数学。

在学习经济数学过程中，必须特别注意如下 4 方面的问题：(1)要认真听课。同一个问题听老师讲懂要比自己看明白容易得多。(2)要善于记笔记。俗话说，好记性不如懒笔头。(3)要认真规范地做作业。这样不但有助于对所学知识的复习巩固，而且还有助于培养训练严谨认真的工作作风。(4)要善于用数学软件包 Mathematica 在计算机上求解数学模型，以训练用数学解决实际问题的能力。

本书可作为高职高专经济管理类各专业高等数学教材，也可作为工程技术人员的高等数学知识更新教材。

本教材的基本教学时数不少于 60 学时，适用于二年制高职高专院校经济管理类专业；标有 * 号的内容要另行安排 46 学时，适用于三年制高职高专院校经济管理类专业。

参加本书编写的有侯风波（承德石油高等专科学校）、张学奇（承德石油高等专科学校）、孟庆才（河北工程技术高等专科学校）、杨建法（石家庄铁路职业技术学院）、刘清贵（石家庄职业技术学院）、吴素敏（石家庄职业技术学院）、蔡谋全（承德石油高等专科学校）、焦万堂（郑州工业高等专科学校）、高小明（番禺职业技术学院）、刘颖华（承德石油高等专科学校）。全书框架结构、统稿、定稿由侯风波承担。

教育部新世纪高职高专教育高等数学课程内容、体系改革与建设项目组（宣立新、任开隆、陈洪、朱卓宇、王建军、范书香）认真审阅了本书的全部原稿，提出了许多有价值的意见，在此，编者对项目组全体人员表示衷心的感谢。

由于我们水平所限，时间也比较仓促，对本书中的不足之处，敬请读者斧正。

编　者

2003 年 12 月 30 日

目　　录

第一章　函　　数

千姿百态的物质世界无不处在运动、变化和发展之中. 16 世纪，随着社会的发展，为适应社会生产力发展的需要，运动变化就成为自然科学研究的主题，对各种变化过程和过程中的变量间的依赖关系的研究产生了函数概念. 函数是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型. 其思想是：通过某一事实的信息去推知另一事实. 数学上最重要的函数是那些可根据某变量的取值而推知另一变量的取值的函数.

17 世纪笛卡儿把变量引入了数学，使数学从研究常量进一步发展到研究变量，从而产生了微积分. 微积分是研究变量以及变量间依赖关系即函数关系的一门学科，用微积分研究经济问题离不开函数关系. 本章将在中学数学已有函数知识的基础上，进一步研究函数的概念与性质，为微积分的学习打下必要的基础.

第一节　函数的概念

一、函数的概念

函数的概念，在 17 世纪之前，一直与公式紧密关联，到了 1837 年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet，1805—1859)抽象出了直至今日为人们易于接受，并且较为合理的函数概念.

1. 函数的定义

定义 1　设有两个变量 x 和 y，若当变量 x 在实数的某一范围 D 内，任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律 f，有惟一确定的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中变量 x 称为自变量，变量 y 称为函数(或因变量). 自变量的取值范围 D 称为函数的定义域.

若对于确定的 $x_0\in D$，通过对应规律 f，函数 y 有惟一确定的值 y_0 与之对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作

$$y_0=y|_{x=x_0}=f(x_0).$$

函数值的集合，称为函数的值域，记作 M.

若函数在某个区间上的每一点都有定义，则称这个函数在该区间上有定义.

2. 函数的两个要素

函数的对应规律和定义域称为函数的两个要素. 两函数相同的充分必要条件是其定义域、对应规律分别相同. 例如，$\omega=\sqrt{u}$与 $y=\sqrt{x}$就是相同的函数.

(1) 对应规律

例 1　$f(x)=2x^2+3x-1$ 就是一个特定的函数，f 确定的对应规律为：

$$f(\quad)=2(\quad)^2+3(\quad)-1$$

例 2 设 $y=f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$,求 $f\left(\frac{2}{\pi}\right)$.

解
$$y|_{x=\frac{2}{\pi}}=f\left(\frac{2}{\pi}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

例 3 设 $f(x+1)=x^2-3x$,求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$,则 $x=t-1$,所以
$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-5t+4$$
所以
$$f(x)=x^2-5x+4$$

(2) 定义域

自变量的取值范围称为函数的定义域.

例 4 求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$定义域.

解 这是两个函数之和的定义域,先分别求出每个函数的定义域,然后求其公共部分即可.

使 $\sqrt{x^2-x-6}$ 有意义的 x 必须满足 $x^2-x-6\geqslant 0$,即
$$(x-3)(x+2)\geqslant 0,$$
解得
$$x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant -2.$$
而使 $\arcsin\frac{2x-1}{7}$ 有意义的 x 必须满足 $\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$,即
$$-7\leqslant 2x-1\leqslant 7,$$
解得
$$-3\leqslant x\leqslant 4.$$
于是,所求函数的定义域是:
$$[-3,-2]\cup[3,4]$$

例 5 说明函数 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 是否相同?

解 因为 $y=\ln x^2$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $y=2\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$. 因此 $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是相同的函数.

3. 函数的记号

y 是 x 的函数,可以记作 $y=f(x)$,也可以记作 $y=\varphi(x)$或 $y=F(x)$等,但同一函数在讨论中应取定一种记法,同一问题中涉及多个函数时,则应取不同的记号分别表示它们各自的对应规律. 为方便起见,有时也用记号 $y=y(x)$,$u=u(x)$,$s=s(x)$等表示函数.

4. 函数的表示法

函数可以用至少三种不同的方法来表示:表格法、图像法和公式法.

例 6 中央电视台每天都播报天气预报,经统计,某地 1999 年 9 月 19—29 日每天的最高气温如表 1.1 所示.

表 1.1

日期(9月)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
最高气温/℃	28	28	27	25	24	26	27	25	23	22	21

这个表格确实表达了温度是日期的函数(像这样,用表格形式表示函数的方法称为函数的表格表示方法,简称表格法),这里不存在任何计算温度的公式,但是每一天都会产生出一个惟一的

最高气温.即,对每个日期 t,都有一个与 t 相应的惟一最高气温 N.

例 7　王先生到郊外去观景,他匀速前进.离家不久,他发现一骑车人的自行车坏了,便帮助这个人把自行车修好,随后又上路了.请把王先生离家的距离与时间的函数关系用图形描述出来.

解　王先生离家的距离与时间的函数图形如图 1-1 所示(像这样,用图形表示函数的方法称为函数的图像表示方法,简称图像法).

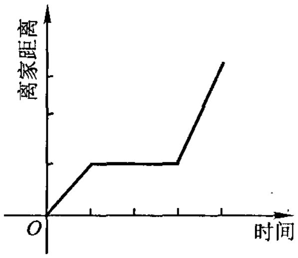

图 1-1

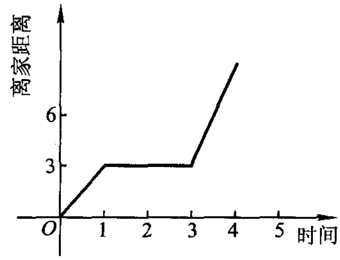

图 1-2

如果给图 1-1 标明具体的数值如图 1-2,则函数关系可由解析表达式表示(像这样,用数学式子表示函数的方法称为函数的公式表示法,也称为解析法)为

$$f(x)=\begin{cases}3x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 3, & 1<x\leqslant 3\\ 3x-6. & 3<x\leqslant 5\end{cases}$$

该函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0,5]$,但它在定义域内不同的区间上是用不同解析式来表示的,这样的函数称为分段函数.分段函数是定义域上的一个函数,不要理解为多个函数,分段函数需要分段求值,分段作图.

例 8　作出下面分段函数的图形:

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x\leqslant 0\\ x^2, & 0<x\leqslant 1\\ 3-x. & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

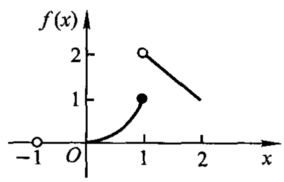

图 1-3

解　该分段函数的图形如图 1-3 所示.

例 9　复利计算公式　设初始本金(现值)为 P(元),年利率为 R.每年末将当年的本利和存入银行,试求第 n 年末的本利和 S_n.

解　第 1 年末应得利息 PR,本利和用 S_1 表示,则

$$S_1=P+PR=P(1+R).$$

将本利和 S_1 再存入银行,第 2 年末的本利和为

$$S_2=S_1+S_1R=P(1+R)^2$$

再把本利和存入银行,如此反复,第 n 年末得本利和 S_n 为

$$S_n=P(1+R)^n \tag{1.1.1}$$

这就是以年为期的复利基本计算公式.也是用解析法表示变量 n(年)和本利和 S_n 的函数关系.

以上用解析法表达的函数关系都是自变量与因变量各占等号的一边,明显地揭示出了由自

变量通过怎样的运算关系得到因变量.这样表达的函数,称之为显函数.

用解析法表示函数还有一种是因变量 y 与自变量 x 的数量关系由方程来确定,如 $x^2+y^2=a^2$,$6x+3y=1$,等等.在这种表达式中,x 与 y 的函数关系隐含在方程之中.如方程 $6x+3y=1$ 隐含着 $y=-2x+\frac{1}{3}$;方程 $x^2+y^2=a^2$ 隐含着 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 及 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$.通常把未解出因变量的方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 x 与 y 之间的函数关系叫做隐函数.

二、函数的几种特性

1. 有界性

定义 2 设函数 $f(x)$ 在数集 I 上有定义,若存在正数 M,$\forall x\in I$,(其中,$\forall$ 读作"对任意的"),都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 I 上有界

例 10 说明 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界;$\varphi(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

解 因为对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $|\sin x|\leqslant 1$,所以 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界;

又因为对于任意给定的大正数 $M(M>1)$,当 $x<\frac{1}{M}\in(0,1)$ 时,有 $|\varphi(x)|>M$.因此 $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界.

2. 单调性

定义 3 对于区间 I 内任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加,区间 I 称为单调增区间;若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少,区间 I 称为单调减区间.单调增区间或单调减区间统称为单调区间.

3. 奇偶性

定义 4 设 D 关于原点对称,若对于任意 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

4. 周期性

定义 5 若存在不为零的数 T,使得对于任意 $x\in I$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,并称 T 为 $f(x)$ 的周期.

三、反函数

定义 6 设给定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$,如果把 y 当作自变量,x 当作函数,则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

习惯上总是用 x 表示自变量,而用 y 表示函数,因此,往往把函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$,称为 $y=f(x)$ 的矫形反函数,记作

$$y=f^{-1}(x)$$

而常称函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 为直接反函数.

思考题 1.1

1. 确定一个函数需要哪几个因素?

2. 思考函数的几种特性的几何意义.

3. 函数 $y=f(x)$ 的直接反函数为 $x=\varphi(y)$，其矫形反函数为 $y=f^{-1}(x)=\varphi(x)$.

(1) $x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 是否为同一函数？

(2) $y=f(x)$、$x=\varphi(y)$、$y=\varphi(x)$，在同一坐标系中的几何表现是什么？

习作题 1.1

1. 设自变量 $x\in\{1,2,3,4\}$，判断下列数学结构哪些是函数？哪些不是函数？为什么？

(1) $f:\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 0&2&1&-1\end{array}$；　(2) $\varphi:\begin{array}{cccc}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&1&1&1\end{array}$；

(3) $y:\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&1\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 2&3&0&1&4\end{array}$；　(4) $h:\begin{array}{ccc}1&2&3\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\\ 1&2&3\end{array}$.

2. 一位旅客住在旅馆里，图 1-4 描述了他的一次行动.

请你根据图形给纵坐标赋予某一个物理量后，再叙述他的这次行动. 你能给图 1-4 标上具体的数值，精确描述这位旅客的这次行动并且用一个函数解析式表达出来吗？

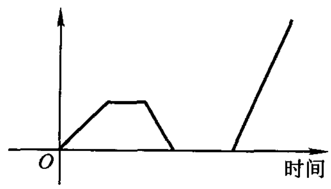

图 1-4

3. 称区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为以 x_0 为中心的 δ 邻域，记为 $N(x_0,\delta)$，试分别写出 $N(0,0.1)$，$N(-1,0.01)$ 所表示的区间.

4. 称区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 为以 x_0 为中心，δ 为半径的去心邻域，记为 $N(\overset{\wedge}{x_0},\delta)$，试写出以 1 为中心，$\delta$ 为半径的去心邻域 $N(\overset{\wedge}{1},\delta)$ 所表示的区间.

第二节 初等函数

微积分研究的对象主要是初等函数，而初等函数是由基本初等函数组成的.

一、基本初等函数

常数函数　$y=C$　（C 为常数）；

幂函数　$y=x^{\mu}$　（μ 为实数）；

指数函数　$y=a^{x}$　（$a>0,a\neq1,a$ 为常数）；

对数函数　$y=\log_a x$　（$a>0,a\neq1,a$ 为常数当 $a=\mathrm{e}$ 时记为 $y=\ln x$）；

三角函数　$y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$；

这六种函数统称为基本初等函数，这些函数的性质、图形在中学已经学过，今后会经常用到它们.

二、复合函数

设 $y=f(u)$，其中 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值全部或部分落在 $f(u)$ 的定义域内，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数，而 u 称为中间变量.

例 1　函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2,u=\sin x$ 复合而成的复合函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=\sin x$ 的定义域；函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u},u=1-x^2$ 复合而成的，其定义域为

$[-1,1]$,它是 $u=1-x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的一部分;$y=\arcsin u$,$u=2+x^2$ 在实数域 $\mathbf{R}$ 内不能复合成一个函数,因为 $u=2+x^2$ 的函数值大于 2,不在 $y=\arcsin u$ 的定义域之内.

例 2 分析下列复合函数的结构

(1) $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$;(2) $y=\mathrm{e}^{\sin\sqrt{x^2+1}}$.

解 (1) $y=\sqrt{u}$,$u=\cot v$,$v=\frac{x}{2}$;

(2) $y=\mathrm{e}^u$,$u=\sin v$,$v=\sqrt{t}$,$t=x^2+1$.

例 3 设 $f(x)=x^2$,$g(x)=2^x$,求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$

解 $f[g(x)]=[g(x)]^2=(2^x)^2=4^x$,$g[f(x)]=2^{f(x)}=2^{x^2}$.

三、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所构成,且能用一个解析式表示的函数,叫做初等函数.

例 4 下列函数统称为双曲函数

双曲正弦函数 $\mathrm{sh}\,x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$

双曲余弦函数 $\mathrm{ch}\,x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$

双曲正切函数 $\mathrm{th}\,x=\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$

它们都是初等函数.

今后我们讨论的函数,绝大多数都是初等函数.

思考题 1.2

1. 任意两个函数都可以复合成一个复合函数吗? 你是否可以用例子说明?
2. 两个函数的加法是如何定义的? 任何两个函数相加都有意义吗? 为什么?
3. 任何初等函数的定义域都能写成一个区间吗? 举例说明.

习作题 1.2

1. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$,求 $f(3x)$ 的定义域.
2. 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$,求 $f[f(x)]$.
3. 写出由 $y=u^3$,$u=\ln v$,$v=2t+3$ 复合而成的复合函数.
4. 说明下列表达式中,哪个是初等函数?

(1) $f(x)=\frac{1-\sin x}{x^3}$;(2) $f(x)=\ln\ln x+\sqrt{x^4+1}$;(3) $f(x)=\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

5. 两个初等函数相加所得的关系式一定是初等函数吗? 举例说明.