中山大学出版社

邓永录　编著

运筹学中的随机模型

运筹学中的随机模型

邓永录　编著

中山大学出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

运筹学中的随机模型/邓永录编著.—广州:中山大学出版社,1996.1
ISBN7—306—01103—0

Ⅰ.运… Ⅱ.邓… Ⅲ.①数学 ②运筹学 ③数学模型 Ⅳ.O22

中山大学出版社出版发行
(广州市新港西路135号　邮编510275)
中山大学印刷厂印刷
广东省新华书店经销
*
850×1168毫米　32开本　15印张　416千字
1996年1月第1版　1996年1月第1次印刷
印数:1—1000　　定价:18.00元

内 容 提 要

本书介绍运筹学中排队论、可靠性理论和储存论的随机模型。本书在讨论这些领域的数学模型时除顾及传统的系统分类外还特别强调描述系统的模型特点并按此归类。这有助读者更好地理解数学模型的数学本质，提高建立数学模型的能力。本书可作为大学数学本科及研究生有关专业的教材。

前　言

随着社会生产和科学技术的发展，社会各部门内和各部门之间出现了许多复杂的计划和管理问题，为了更好地解决这类问题，人们应当利用现代的科学管理方法，帷幄运筹，制定能在一定的条件下用最小的代价获得最大收益的策略，使事物的发展尽可能对决策者有利，运筹学就是在这种背景下产生和发展起来的。我们可以这样说，运筹学是“运用科学方法来解决工业、商业、政府、国防等部门里有关人力、机器、物质、金钱等大型系统的指挥或管理中出现的复杂问题的一门学科”。

运筹学是一门应用十分广泛的学科，它涉及许多不同的部门和领域。对应于各种不同的领域和目的，采用的模型和方法也是多种多样的，据此运筹学又可分为许多不同的分支。其中某些分支，例如排队论、可靠性理论和储存论等具有一个共同的特点，就是在对有关系统进行分析研究时必须着重考虑各种随机因素的影响，因而涉及的数学模型主要是由具有不同分布的随机变量和各种类型的随机过程组成的随机模型。

作者近十年来多次分别给大学生和研究生讲授随机模型及其应用、应用随机过程、随机模型比较方法、排队论和可靠性理论等课程。在这些教学实践和部分科研工作的基础上，于 1991 年底写成了《随机模型及其应用》一书。此书的第一稿含有泊松过程、更新过程、马尔可夫链、平稳过程、时间序列和离散鞅、随机模型比较方法以及排队论、可靠性理论中的随机模型等方面的材料，但是，由于篇幅的限制，在 1992 年交付高等教育出版社出版时只保留了各种类型的随机过程及随机模型比较方法这些较一般的内

容，而将关于排队论和可靠性理论中的随机模型这两章篇幅较长而又较专门的材料暂时割爱，留待以后另书出版。

现在，作者在这两章材料的基础上再加写了两章并冠以《运筹学中的随机模型》的书名单独出版。新补充一章讨论储存论中的随机模型。尽管储存论和排队论、可靠性理论分属运筹学的不同分支，但从数学模型来看它们有许多相通之处，有些学者还试图找出一种把三者统一处理的数学途径。另一章补充必要的预备知识，目的是使本书具有较好的自包含性以便于阅读。这一章的材料基本上是述而不证的（读者想对此进一步了解和学习，可参看《随机模型及其应用》一书的有关部分）。因此，本书既可看作是《随机模型及其应用》一书的续篇，又可以独立成卷。可从中选择不同部分的内容作为大学和研究生有关专业的排队论、可靠性理论及储存论等课程的教学用书。同时对有意学习和在自己的工作领域应用随机运筹学的实际工作者也是一本有益的参考书。

本书的一个重要特点是在讨论排队系统和可靠性系统时，除了顾及传统的系统分类外还特别强调描述系统的模型特点并按此归类，这有助于读者更好理解和掌握模型的数学本质，进而做到举一反三，提高为实际问题选择和建立合适数学模型的能力。

本书的编写工作得到国家自然科学基金的支持，中山大学教务处和出版社对本书的出版也鼎力相助，作者对此表示衷心的感谢。

如果本书的出版能对国内随机运筹学和应用概率的教学、研究工作起到微薄的推动作用，作者将感到极大的快慰。

由于作者学识有限，书中难免存在不当或错误之处，敬请同行和读者批评指正。

邓永录

1995 年春于中山大学

目　　录

第一章 预备知识

第一节 失效率、无记忆性和有关的分布

设 X 是一非负的连续随机变量，它的分布函数 F 有密度 f。我们定义 X（或对应的分布函数 F）的**失效率**（又称**故障率**或**临危函数**）为

$$\lambda(x) \equiv \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{f(x)}{\overline{F}(x)}, \quad F(x)<1 \tag{1-1-1}$$

人们常把 $\overline{F}(x)=1-F(x)=P(X>x)$ 称做**存活函数**或**可靠性函数**。当给出了 $F(x)$（从而 $f(x)=F'(x)$ 也就确定了）时，由(1-1-1)式可求出 $\lambda(x)$。反之，若已知 $\lambda(x)$，则 $F(x)$ 也容易由 $\lambda(x)$ 算出。事实上，若 $F(0)=0$，和 $F(\infty)=1$，则 $\overline{F}(x)=1-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 或 $\overline{F}'(x)=f(x)$。于是由(1-1-1)式有

$$\lambda(x)\mathrm{d}x = -\mathrm{d}\overline{F}(x)/\overline{F}(x) = -\mathrm{d}\log\overline{F}(x)$$

将上式积分得

$$\int_0^x \lambda(t)\mathrm{d}t = -\left[\log\overline{F}(t)\right]_0^x = -\log\overline{F}(x)$$

于是有

$$\overline{F}(x) = \exp\{-\int_0^x \lambda(t)\mathrm{d}t\} \tag{1-1-2}$$

或

$$F(x) = 1-\exp\{-\int_0^x \lambda(t)\mathrm{d}t\} \tag{1-1-3}$$

这里 $\exp\{x\}=\mathrm{e}^x$ 是指数函数，对上式求导得

$$f(x) = \lambda(x)\exp\{-\int_0^x \lambda(t)\mathrm{d}t)\}, \quad x \geqslant 0 \tag{1-1-4}$$

这表明任一非负连续随机变量的分布都可用它的失效率来描述。

因为

$$
\begin{aligned}
&P(X\in(x,x+\mathrm{d}x]\mid X>x)\\
=&P(X\in(x,x+\mathrm{d}x]/P(X>x)\\
=&f(x)\mathrm{d}x/\overline{F}(x)=\lambda(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{1-1-5}
$$

故若 X 表示个体的寿命，则 $\lambda(x)\mathrm{d}x$ 给出一个年龄为 x 的个体将在时间区间 $(x,x+\mathrm{d}x]$ 内失效（或死亡）的概率，因此，$\lambda(x)$ 反映一个年龄为 x 的个体随即要失效的可能性的大小。一般来说，失效率 $\lambda(x)$ 是年龄 x 的函数，如果它不随 x 变化而恒等于某一常数 $\lambda>0$；于是有

$$
f(x)=\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x},\quad x\geqslant 0 \tag{1-1-6}
$$

这是参数为 λ 的指数分布密度，它的分布函数、存活函数和 L 变换依次是

$$
F(x)=1-\mathrm{e}^{-\lambda x} \tag{1-1-7}
$$

$$
\overline{F}(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x} \tag{1-1-8}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(s)&=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}f(x)\mathrm{d}x\left(=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-sx}\mathrm{d}F(x)\right)\\
&=\lambda/(\lambda+s)
\end{aligned}
\tag{1-1-9}
$$

其数学期望和方差分别是

$$
EX=-\varphi'(0)=1/\lambda \tag{1-1-10}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}X&=E(X^2)-(EX)^2\\
&=\varphi''(0)-[-\varphi'(0)]^2=1/\lambda^2
\end{aligned}
\tag{1-1-11}
$$

我们说非负随机变量 X（或它的分布 F）是无记忆（或无后效）的，如果对任意 $s,t\geqslant 0$ 有

$$
P(X>s+t\mid X>t)=P(X>s) \tag{1-1-12}
$$

这又等价于

$$
\overline{F}(s+t)=\overline{F}(s)\overline{F}(t) \tag{1-1-13}
$$

由(1-1-8)式易知指数分布满足(1-1-13)式，即指数分布是无记忆的。反之，可以证明若一个非负连续随机变量 X 具有无记忆性，则它的分布必是指数分布。

无记忆性在排队论、可靠性和储存论的研究中起着重要的作用，因为这种性质能使许多问题得到简化而易于处理。然而，在实际中遇到的分布不仅限于指数分布。例如，若 X_1 和 X_2 是两个相互独立且具有相同指数分布(参数为 λ)的随机变量，则它们之和 $X=X_1+X_2$ 的分布就不再是指数分布。事实上，X 的分布是 X_1 和 X_2 的分布的卷积，由 L 变换的性质知 X 的分布密度 $f(x)$ 的 L 变换是 $[\lambda/(\lambda+s)]^2$，由求逆 L 变换立得

$$f(x)=\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x},\quad x\geqslant 0 \qquad (1\text{-}1\text{-}14)$$

更一般的，任意有限 k 个相互独立同指数分布随机变量之和的分布密度是

$$f_{\lambda,k}(x)=\lambda^k x^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}/\Gamma(k),\quad x\geqslant 0 \qquad (1\text{-}1\text{-}15)$$

式中 $\Gamma(k)$[①] $=(k-1)!$，如果再进一步允许 k 取任意正数值，同时令

$$\Gamma(k)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{k-1}\mathrm{d}t$$

我们把密度函数形如(1-1-15)式的分布称做**伽玛分布**，并记作 $\Gamma(\lambda,k)$，其中 λ 和 k 是任意正数，它们分别称做分布的**尺度参数**和**形状参数**。伽玛分布密度的 L 变换(亦即分布函数的 L-S 变换)，数学期望和方差依次是

$$\varphi(s)=[s/(s+\lambda)]^k \qquad (1\text{-}1\text{-}16)$$

$$EX=k/\lambda \qquad (1\text{-}1\text{-}17)$$

$$\mathrm{Var}X=k/\lambda^2 \qquad (1\text{-}1\text{-}18)$$

如果在伽玛分布密度的表示式(1-1-15)中用 λk 代换 λ 就得到

$$f_{\lambda k,k}(x)=(\lambda k)^k x^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda kx}/\Gamma(k)\quad x\geqslant 0 \qquad (1\text{-}1\text{-}19)$$

---

① 这样定义的函数称做伽玛函数，当 k 是正整数时恰有 $\Gamma(k)=(k-1)!$

我们把具有如上形式的密度的分布称做 Erlang-k 分布，并记作 $E_k(\lambda)$，注意其中的 λ 是任意正数，k 是任意正整数。

利用 L 变换容易证明若 X_1和 X_2是相互独立的随机变量，它们分别有伽玛分布 $\Gamma(\lambda,k_1)$和 $\Gamma(\lambda,k_2)$，则 $X=X_1+X_2$有伽玛分布 $\Gamma(\lambda,k_1+k_2)$，即伽玛分布具有可加性。

下面再介绍一类较伽玛分布更为广泛，但和指数分布仍有密切关系的分布。我们把 L-S 变换是有理函数的分布称做 **Cox 分布**。设 F 是任一 Cox 分布，则按定义它的 L-S 变换 $\varphi(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}dF(x)$可通过分部分式写成

$$\varphi(s)=c_0+\sum_{j=1}^{k}c_j\frac{\lambda_j}{s+\lambda_j} \tag{1-1-20}$$

其中 $\sum_{j=1}^{k}c_j=1$。上式又可改写成

$$\varphi(s)=b_0+\sum_{i=1}^{k}a_0a_1\cdots a_{i-1}b_i\prod_{j=1}^{i}\frac{\lambda_j}{s+\lambda_j} \tag{1-1-21}$$

其中 $a_i+b_i=1, i=0,1,\cdots,k-1; b_k=1$。在上两式中每一分式 $\lambda_j/(s+\lambda_j)$恰好是一个参数为 λ_j 的指数分布的 L-S 变换，因此 Cox 分布实际上是由 k 个独立的指数分布用如下方式构成：设 X 是有分布 F 的随机变量和 X_j 是有参数为 λ_j 的指数分布随机变量，则 $X=0$ 的概率是 $c_0=b_0$；若已知 $X>0$，则 $X=X_1$ 和 $X\geqslant X_1$ 的（条件）概率分别是 b_1 和 a_1；若已知 $X\geqslant X_1$，则 $X=X_1+X_2$ 和 $X>X_1+X_2$ 的（条件）概率分别是 b_2 和 a_2；一般地，对 $i=1,2,\cdots,k$，有

$$P(X=\sum_{j=1}^{i}X_j)=a_0a_1\cdots a_{i-1}b_i$$

$$P(X>\sum_{j=1}^{i}X_j\,|\,X>\sum_{j=1}^{i-1}X_j)=a_i$$

$$P(X=\sum_{j=1}^{i}X_j\,|\,X>\sum_{j=1}^{i-1}X_j)=b_i$$

这就是说，Cox 分布可以看作是有 k 个相位的指数分布，因此，尽管这种分布总体上没有无记忆性，但在每一个相位中都是无记忆的，所以仍能在一定程度上利用无记忆性使有关问题的研究得到简化。

注意当 X 表示服务时间时，多半假定 $c_0=b_0=0$。

许多常用的分布都是 Cox 分布的特殊情形。例如，(1)$c_0=b_0=0,a_1=0$ 和 $b_1=1$ 时就是指数分布。(2)当 $c_0=b_0=0,a_1=1,b_1=0,\cdots,a_{k-1}=1,b_{k-1}=0,a_k=0,b_k=1$ 和 $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=\lambda$ 时就是伽玛分布 $\Gamma(\lambda,k)$。(3)当 $c_0=0,c_1>0,\cdots,c_k>0$ 和 $c_1+\cdots+c_k=1$ 时就得到有如下密度函数的混合指数分布：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}c_i\lambda_i e^{-\lambda_i x},\quad x\geqslant 0$$

近年来在运筹学的许多分支中日益广泛应用的位相型分布的 $L\text{-}S$ 变换也是有理函数，因此也是一类特殊的 Cox 分布，这类分布具有许多良好的性质，详见 Neuts(1981)或邓永录(1994)。

第二节　随机过程和计数过程

我们知道，随机变量是定义在基本事件空间 Ω 上(满足一定的可测性条件)的函数 $X(\omega)$。给定一个随机变量 X 也就是给定一个变元为 $\omega\in\Omega$ 的函数 $X(\omega)$，而随机过程实质上是一族随机变量，它们的分布律有一定的内在联系。确切地说，随机过程$\{X(t,\omega);t\in T,\omega\in\Omega\}$(通常略去 ω 简记为$\{X(t),t\in T\}$)是一个(满足一定可测性条件的)二元函数 $X(t,\omega)$，它的两个变元 ω 和 t 分别取值于基本事件空间 Ω 和参数集 T。当 $t=t_0$ 固定时，$X(t_0,\omega)$作为 ω 的函数是一个随机变量；当 $\omega=\omega_0$ 固定时，$X(t,\omega_0)$是参数 t 的函数，我们称之为随机过程的一个(对应于基本事件 ω_0 的)**样本函数**(又称**现实**或**轨道**)。在随机过程的一般定义中，对参数集 T 并没

有什么限制，但最常见的情形是取 T 为某一实数集合并赋予它以时间的含义，这时，随机过程就是一族随时间演化的随机变量，如果参数 T 是可数集(通常取 T 为 $Z_+=\{0,1,2,\cdots\}$ 或 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$)，过程就称做**离散时间随机过程**(又称**随机序列**)；如果 T 是整条实数直线 R 或它的一个有限或无限的子区间(特别地，$T=R_+=[0,\infty)$)，则过程称做**连续时间随机过程**。

随机过程 $\{X(t),t\in T\}$ 的可能值的集合 E 称做**状态空间**或**相空间**，如果 E 只含可数多个元素，就把 E 称做**离散的**，否则就称做**连续的**。

今后，我们常用 $\{X(t),t\in T\}$ 或 $\{X_t,t\in T\}$ 表示一个随机过程，在离散时间的情形还会用 n 代替 t。

设 $\{X(t,\omega),t\in T\}$ 是一随机过程，对任意固定的 $t_1\in T$，$X(t_1,\omega)$ 是一随机变量并记为 $X(t_1)$，我们用 $F_1(x,t_1)=P(X_{t_1}\leqslant x)$ 表示它的分布函数。对于任意有限多个 $t\in T$ 的集合 $t_1,\cdots,t_n(n=1,2,\cdots)$，对应的 n 个随机变量 $X(t_1),\cdots,X(t_n)$ 的联合分布函数是 $F_n(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=P(X(t_1)\leqslant x_1,\cdots,X(t_n)\leqslant x_n)$。当 n 取遍所有正整数值，$t_1,\cdots,t_n$ 取遍参数集 T 时，我们就得到一族有限维联合分布族(称做过程 X 的有限维分布族)。根据著名的柯尔莫果洛夫定理，一个随机过程在统计上完全可用它的有限维分布族来表征。这就是说，给定一族满足如下相容性条件的有限维分布：

(1) 对任意正整数 n，任意 $t_1,\cdots,t_n\in T$ 和任意 n 个实数 $x_1,\cdots,x_n$，如果 $(k_1,\cdots,k_n)$ 是 $(1,\cdots,n)$ 的任一排列，则

$$F_n(x_1,\cdots,x_n;t_1,\cdots,t_n)=F_n(x_{k_1},\cdots,x_{k_n};t_{k_1},\cdots,t_{k_n})$$

(2) $$\lim_{x_n\to\infty}F_n(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n;t_1,\cdots,t_{n-1},t_n)$$
$$=F_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1};t_1,\cdots,t_{n-1})$$

就相当于给定一个以它为有限维分布族的随机过程。

在实际中人们常常需要随着时间的推移计算某种随机事件的

发生次数，这就引导到要研究一类特殊的随机过程——计数过程。我们说随机过程$\{N_t, t\geqslant 0\}$是计数过程，如果N_t表示在时间区间$(0,t]$中发生的某种“事件”(因为假定“事件”的发生时间是时间轴上的一个点，所以人们也把“事件”称做“点”)的总数。由以上定义易知，计数过程$\{N_t, t\geqslant 0\}$满足：

(1) N_t取非负整数值或无穷值；

(2) 若$s<t$，则$N_s\leqslant N_t$；

(3) 对于$s<t$，$N_{s,t}=N_t-N_s$等于在时间区间$(s,t]$中发生的事件数。

为了研究的方便，我们假设N_t只取有限值。这就是说，在任意有限区间中发生的“事件”数必为有限。因此，若给定了计数过程的初始状态，则它的样本函数是定义在$[0,\infty)$上取值于非负整数集Z_+的逐段常值，右连续单调不减函数。

对于$n=1,2,\cdots$，若以S_n表示第n个“事件”的发生时间，则$T_n=S_n-S_{n-1}$(约定$S_0=0$)是第$n-1$个“事件”到第n个“事件”的(时间)间距。易见

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= T_1 \\ S_2 &= T_1 + T_2 \\ &\cdots\cdots \\ S_n &= T_1 + \cdots + T_n \end{aligned}\right\} \tag{1-2-1}$$

因为在$(0,t]$内有不多于n个“事件”发生相当于要求第$n+1$个“事件”在时刻t之后发生，所以集合$\{N_t\leqslant n)\}$和$\{S_{n+1}>t\}$是一样的，从而它们的余集$\{N_t>n\}$和$\{S_{n+1}\leqslant t\}$也相等。于是有

$$\begin{aligned} \{N_t = n\} &= \{N_t \leqslant n\} \cap \{N_t > n-1\} \\ &= \{S_{n+1} > t\} \cap \{S_n \leqslant t\} \\ &= \{S_{n+1} > t\} \cap \{S_n > t\} \end{aligned}$$

从而

$$P(N_t = n) = P(S_{n+1} > t) - P(S_n > t)$$