

金属塑性成形力学原理

黄重国 任学平 编著



冶金工业出版社

<http://www.cnmp.com.cn>

TG301/16

2008

金属塑性成形力学原理

黄重国 任学平 编著

北 京

冶金工业出版社

2008

内 容 提 要

全书共分9章,内容包括:绪论、应力状态及应力平衡微分方程、应变分析及应变的连续性方程、塑性成形时的屈服准则与应力应变关系、塑性应力应变关系、典型的变形方式及边界条件、塑性成形解析方法、粉末塑性成形的力学基础、粉末材料滑移线场理论与上限法。

本书可供材料或制造工程专业本科生作为教材或参考书,也可供相关专业工程技术人员参考阅读。

图书在版编目(CIP)数据

金属塑性成形力学原理/黄重国,任学平编著. —北京:冶金工业出版社,2008.3

ISBN 978-7-5024-4573-7

I. 金… II. ①黄…②任… III. 金属压力加工—塑性力学
IV. TG301 0344.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第074287号

出 版 人 曹胜利

地 址 北京北河沿大街嵩祝院北巷39号,邮编100009

电 话 (010)64027926 电子信箱 postmaster@cnmip.com.cn

责任编辑 杨盈园 美术编辑 张媛媛 版式设计 张 青

责任校对 白 迅 责任印制 丁小晶

ISBN 978-7-5024-4573-7

北京兴华印刷厂印刷;冶金工业出版社发行;各地新华书店经销

2008年3月第1版; 2008年3月第1次印刷

787mm×1092mm 1/16; 11印张; 263千字; 165页; 1—2000册

32.00元

冶金工业出版社发行部 电话:(010)64044283 传真:(010)64027893

冶金书店 地址:北京东四西大街46号(100711) 电话:(010)65289081

(本书如有印装质量问题,本社发行部负责退换)

前 言

金属塑性成形方法的特点是利用金属的塑性，通过金属体积的转移，获得所需要形状、尺寸的产品。由于金属形状的改变是通过外力来完成的，因此，尽管金属塑性成形方法种类繁多，但各类方法在塑性成形的力学方面有许多共同的规律。塑性成形力学是反映金属塑性成形力学规律的基本理论。

塑性成形力学是在塑性力学一般原理基础上，着重研究材料塑性成形工艺过程中的塑性力学问题。这一类塑性力学问题，由于它的复杂性和实用性，而构成了塑性力学的一个重要分支。计算机技术和有限元分析技术的迅速发展，为求解塑性成形问题创造了便利条件。塑性成形力学的基本方程为塑性成形过程有限元数值模拟奠定了可靠的理论基础。

与弹性力学相比，塑性成形时的应力应变关系是非线性的，应力与应变无对应关系，并且大多数理论是在试验和假说基础之上建立起来的。因此，通常在具备一定塑性成形工艺知识之后，才能正确掌握塑性成形力学的基本原理。为此，作者在编写《金属塑性成形力学原理》时，为了便于掌握塑性成形力学的基本原理，首先在绪论中，着重对各类塑性加工方法的特点及变形区分布做了介绍。由于应力状态与应变状态分析方法及基本方程的相似性，因此，重点对应力状态分析做了尽可能详细的介绍，并通过实例将应力状态分析的基本方法和理论体系做了一个通俗的小结。同时考虑到粉末材料塑性成形技术的发展，在本书的最后部分介绍了粉末塑性成形的力学基础、粉末材料滑移线场理论与上限法。

全书共分九章。内容包括：绪论、应力状态及应力平衡微分方程、应变分析及应变的连续性方程、塑性成形时的屈服准则与应力应变关系、塑性应力应变关系、典型的变形方式及边界条件、塑性成形解析方法、粉末塑性成形的力学基础、粉末材料滑移线场理论与上限法。

全书由北京科技大学黄重国、任学平编写，由北京科技大学周成教授主审。

本书可供材料工程专业本科生用作教材或参考书，也可供相关专业工程技术人员参考阅读。

由于本书编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

编 者

2008 年 3 月

目 录

1 绪论	1
1.1 金属塑性变形特点	1
1.2 金属塑性成形方法及变形区	1
1.2.1 轧制	2
1.2.2 挤压	2
1.2.3 拉拔	3
1.2.4 锻造	3
1.2.5 冲压	4
1.3 塑性加工力学基本假设	4
1.4 塑性加工力学的主要内容及知识要点	5
2 应力状态及应力平衡微分方程	7
2.1 点的应力状态	7
2.1.1 应力	7
2.1.2 点的应力状态	9
2.1.3 主应力及应力张量不变量	11
2.1.4 主切应力和最大切应力	13
2.1.5 应力偏张量和应力球张量	15
2.1.6 八面体应力和等效应力	18
2.1.7 应力莫尔圆	19
2.2 应力平衡微分方程	21
3 应变分析及应变的连续性方程	25
3.1 点的应变状态	25
3.1.1 应变的表示方法	25
3.1.2 点的应变状态	27
3.1.3 体积不变条件	33
3.1.4 主应变与主切应变	34
3.1.5 应变偏张量和球张量	35
3.1.6 八面体应变与等效应变	36
3.2 应变增量和应变速率	37
3.2.1 应变增量	37

3.2.2 应变速率	38
3.3 应变的连续方程	39
3.4 有限变形	41
4 塑性成形时的屈服准则与应力应变关系	42
4.1 屈服准则的一般概念	42
4.1.1 简单拉伸实验结果	42
4.1.2 屈服准则的一般形式	44
4.1.3 屈服表面	45
4.2 两个常用的屈服准则	46
4.2.1 屈雷斯加屈服准则	46
4.2.2 米塞斯屈服准则	47
4.2.3 两个屈服准则的比较	49
4.2.4 应变硬化材料的屈服准则	53
5 塑性应力应变关系	54
5.1 弹性应力应变关系	54
5.2 塑性应力应变关系	55
5.2.1 增量理论	55
5.2.2 全量理论	57
5.2.3 应力应变顺序对应规律	59
5.3 等效应力—等效应变曲线的单一性	60
5.3.1 单向拉伸实验	60
5.3.2 单向压缩实验	61
5.3.3 平面应变压缩实验	61
5.4 等效应力—等效应变曲线的简化模型	61
5.4.1 理想弹塑性材料模型	61
5.4.2 理想刚塑性材料模型	62
5.4.3 幂指数硬化材料模型	62
5.4.4 刚塑性非线性硬化材料模型	63
5.4.5 弹塑性线性硬化材料模型	63
5.4.6 刚塑性线性硬化材料模型	63
5.5 例题	63
6 典型的变形方式及边界条件	68
6.1 塑性成形问题解的概念	68
6.2 基本方程的简化	68
6.2.1 平面应变问题	69
6.2.2 平面应力问题	69

6.2.3 轴对称问题	71
6.3 应力边界条件与速度边界条件	72
6.3.1 应力边界条件	72
6.3.2 摩擦边界条件	72
6.3.3 自由边界条件	73
6.3.4 准边界条件	73
6.3.5 速度边界条件	74
7 塑性成形解析方法	75
7.1 主应力法	75
7.1.1 主应力法的基本原理	75
7.1.2 长矩形板镦粗问题	75
7.1.3 圆柱体镦粗问题	77
7.1.4 拉拔	79
7.1.5 轧制	83
7.2 滑移线场理论	90
7.2.1 基本概念	90
7.2.2 汉盖应力方程	92
7.2.3 滑移线的性质	92
7.2.4 塑性区的应力边界条件	94
7.2.5 常见的滑移线场类型	96
7.2.6 受内压无限长厚壁圆筒的滑移线场	96
7.2.7 盖林格尔速度方程及速度图	98
7.2.8 滑移线场理论的应用	101
7.2.9 滑移线场图解分析法	106
7.3 上限法	110
7.3.1 界限法的力学基础	110
7.3.2 下限定理	113
7.3.3 上限定理	113
7.3.4 上限法的应用	115
8 粉末塑性成形的力学基础	129
8.1 粉末塑性变形与致密	129
8.1.1 质量不变条件	129
8.1.2 泊松比与相对密度	129
8.1.3 低屈服强度和低延伸率	130
8.2 粉末材料的屈服准则	131
8.2.1 Kuhn 屈服准则	131
8.2.2 Kuhn 屈服准则的物理意义	133

8.2.3 粉体材料屈服准则的实验验证	133
8.3 粉末材料塑性应力应变关系	135
8.4 典型的变形方式	136
8.4.1 粉体圆柱体均匀单向压缩	136
8.4.2 平面应变	136
8.4.3 轴对称状态	137
8.4.4 复压	138
8.4.5 等静压	139
9 粉末材料滑移线场理论与上限法	140
9.1 应力方程	140
9.1.1 应力莫尔圆	140
9.1.2 应力莫尔圆的包络线方程	141
9.1.3 粉末材料平面应变滑移线应力方程	142
9.1.4 α 线与 β 线的确定	146
9.2 滑移线的性质	147
9.3 速度方程	149
9.4 应力间断与速度间断	151
9.4.1 应力间断	151
9.4.2 速度间断	151
9.5 滑移线场理论的应用	153
9.5.1 平冲头压入半无限高坯料问题	153
9.5.2 锥形模平面应变挤压问题	156
9.6 上限法简介	158
9.6.1 上限法	158
9.6.2 应用实例: 楔形模无摩擦平面挤压	160
练习与思考题	162
参考文献	165

1 绪 论

1.1 金属塑性变形特点

金属在外力作用下将产生变形。为了确定这种变形是弹性变形还是塑性变形，需要看卸载时变形的恢复情况。当卸载后，金属的变形完全恢复，则将这种变形称为弹性变形；如果卸载后，金属的变形没有完全恢复，有一定程度的残余变形，这种残余变形属于永久变形，则将这一残余变形称为塑性变形。金属所具有的这种塑性变形的能力称为金属的塑性。利用金属的塑性，将其加工成所需要制品的方法称为金属塑性成形方法。

金属塑性成形方法是通过改变金属的形状，获得所需要的产品。随着变形的发生与发展，材料原有的组织和性能也随之发生变化，而且塑性变形是永久变形，每一微小阶段的塑性变形所导致的组织和性能变化都要保留下来。因此，通过塑性变形可以改变金属的组织，获得所需要的材料性能。图 1-1 为部分典型塑性加工产品。

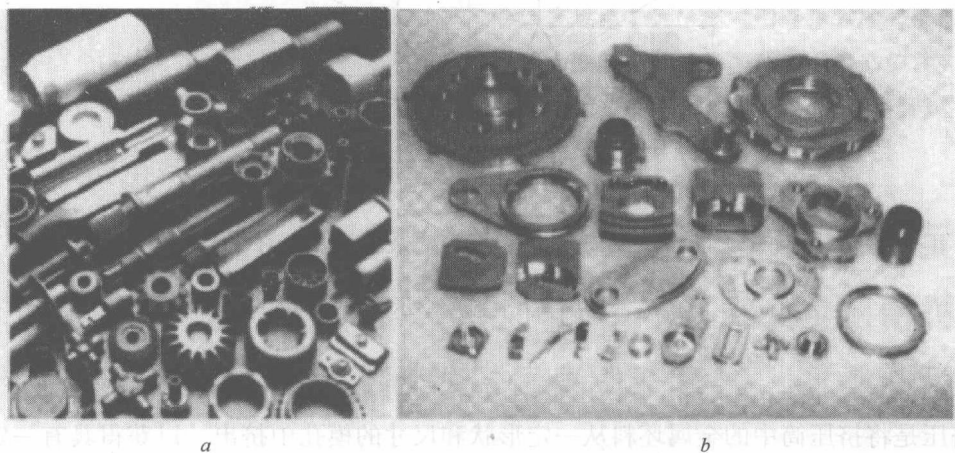


图 1-1 部分典型塑性加工产品

a—用于汽车上的部分精锻产品；*b*—用于电器上的精锻产品

1.2 金属塑性成形方法及变形区

金属塑性成形方法的特点是利用金属的塑性，通过金属体积的转移，获得所需要形状、尺寸的产品。金属塑性成形方法大致可以分为轧制、拉拔、挤压、锻造以及冲压五大类。金属塑性成形方法种类繁多，但是，各类成形方法在塑性加工的力学方面有许多共同的规律，了解和掌握各类塑性加工方法的特点及变形区分布，有利于探讨塑性加工过程中的力学规律。

1.2.1 轧制

轧制是使金属坯料通过两个旋转着的轧辊间的特定空间,使其发生塑性变形,以获得具有一定截面形状材料的塑性成形方法。在金属材料的总产量中,只有一小部分是采用铸造和锻造等方法直接生产的,而90%以上都是经过轧制成形的。采用轧制成形方法可以生产金属板材、管材、型材以及棒线材等。

轧制成形过程变化如图1-2所示。在轧制过程中,靠近变形区的出口端,轧件的流动速度大于轧辊的线速度,而在靠近变形区的入口端,轧件的流动速度小于轧辊的线速度。在均匀变形假设条件下,变形区内一定存在着轧件的流动速度等于轧辊线速度的平面,称为中性面。由中性面至出口端,称为前滑区,中性面至入口端,称为后滑区。轧制时的变形区只由前滑区和后滑区两部分组成,并且在轧制过程中,变形区形状基本保持不变,可视为稳态变形过程。其他区域为刚性区。中性面与接触弧的交点,称为中性点。中性点两侧的摩擦力方向是相反的,并且均指向中性点。中性点所对应的圆周角 γ ,称为中性角。整个接触弧所对应的圆周角 α ,称为咬入角。

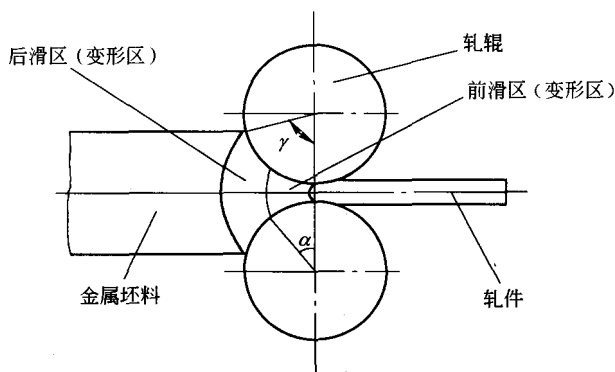


图 1-2 轧制成形示意图

1.2.2 挤压

挤压是将挤压筒中的金属坯料从一定形状和尺寸的模孔中挤出,以获得具有一定截面形状材料的塑性成形方法。挤压被广泛地应用于管材、型材、棒线材以及零件的生产。

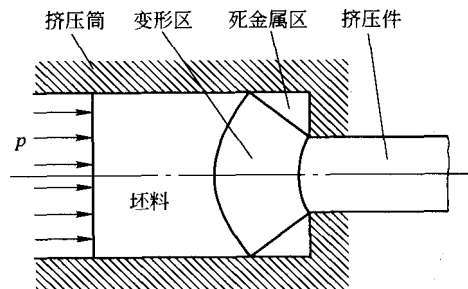


图 1-3 挤压成形示意图

与轧制成形相比,虽然挤压成形的生产效率不如轧制成形高,但是;由于挤压时的三向等静压力成分要大得多,因此许多塑性较低的金属和合金,在相同情况下,采用轧制方法成形难度较大,甚至不能成形时,可以采用挤压方法来成形。

挤压成形过程变化如图1-3所示。在挤压过程中,变形区只限于挤压模孔附近,并

且在挤压过程中,变形区形状基本保持不变,可视为稳态变形过程。变形区之外,包括挤压变形区左侧的坯料、死金属区、挤压件均为刚性区,不发生塑性变形。

1.2.3 拉拔

拉拔是将金属坯料从一定形状和尺寸的模孔中拉出,以获得具有一定截面形状材料的塑性成形方法。拉拔被广泛地应用于管材、型材以及棒线材制品的生产。拉拔成形方法适合于高速、连续生产小断面长尺寸制品,被广泛地应用于管材、型材、棒线材以及零件的生产。

拉拔成形过程变化如图 1-4 所示,拉拔时的变形区在拉拔模内,拉拔模外端为刚性区。并且在拉拔过程中,变形区形状基本保持不变,可视为稳态变形过程。

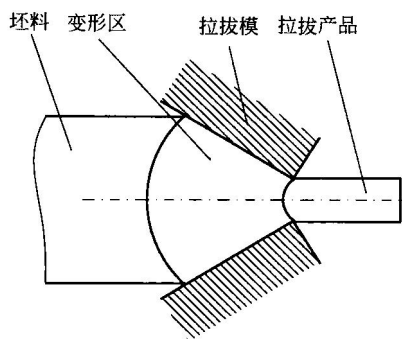


图 1-4 拉拔成形示意图

1.2.4 锻造

锻造通常分为自由锻和模锻两大类。自由锻一般是在锻锤或液压机上利用一些简单的工具将金属坯料锻成所要求形状和尺寸的塑性成形方法。模锻是将金属坯料放在与成品形状、尺寸相同的模具型腔内使其产生塑性变形,获得所要求形状和尺寸的塑性成形方法。

锻造成形过程变化如图 1-5 所示。对于自由锻来说,在变形过程中,由于模具与工件之间存在摩擦力,因此,在模具与工件之间将形成死金属区,该区为刚性区,不发生塑性变形。摩擦力还会使自由表面形成鼓形(如图 1-5a 中虚线所示)。除死金属区外均为变形区。无论是自由锻还是模锻,在成形过程中,变形区和死金属区的形状是变化的,因此,锻造属于非稳态变形过程。

如果自由锻时,模具与工件之间处于无摩擦状态,则与单向应力状态相同,不会形成死金属区,在自由表面也不会形成鼓形,整个坯料均为变形区,为一种典型的均匀变形过程。

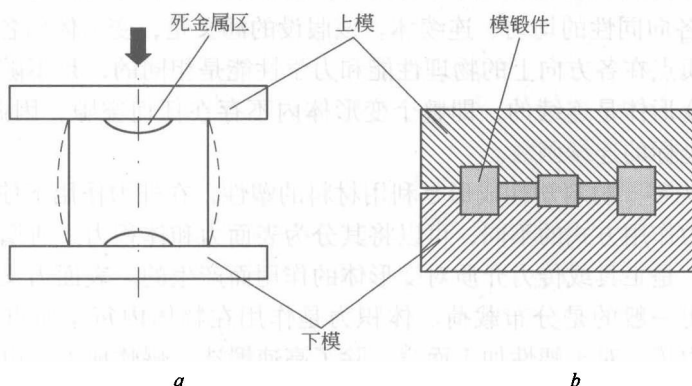


图 1-5 锻造成形示意图

a—自由锻; b—模锻

1.2.5 冲压

冲压又称为板料成形,是利用专门的模具,将金属薄板加工成所需要形状、尺寸零件的塑性成形方法。

通常锻造属于体积成形,变形体是在三向应力状态下发生变形。而板料成形大多是在平面应力状态下进行的,垂直于板面方向(板料厚向)上的应力为零,或很小,可以忽略不计。

拉深成形及应力状态如图1-6所示。在冲压成形中,最典型的为拉深成形。对于拉深成形,变形区只限于法兰部位,其他部位为刚性区,不发生变形。

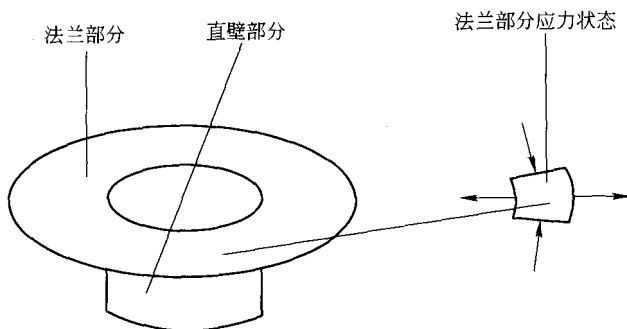


图1-6 拉深成形及应力状态

1.3 塑性加工力学基本假设

塑性加工力学是在塑性力学一般原理基础上,着重研究材料塑性成形工艺过程中的塑性力学问题。这一类塑性力学问题,由于所研究问题的复杂性和实用性,而构成了塑性力学的一个重要分支。

由于材料塑性成形是一个非常复杂的过程,同时也受到现时数学上处理问题的限制,获得塑性加工问题的精确解是非常困难的,因此,为了得到对工程设计和实际生产有指导意义的解,在研究材料塑性成形的力学行为时,通常采用以下假设和近似处理,即:

(1) 材料是各向同性的均匀、连续体。该假设的涵义是,变形体内各质点的组织、化学成分相同,各质点在各方向上的物理性能和力学性能是相同的,是不随坐标的改变而变化的。由于假设变形体是连续的,即整个变形体内不存在任何空隙,因此,应力、应变、位移等物理量是坐标的连续函数。

(2) 体积力为零。材料塑性成形是利用材料的塑性,在外力作用下使其成形的一种加工方法。根据外力作用方式的不同,可以将其分为表面力和体积力。所谓表面力是作用在物体表面上的力,是工具或传力介质对变形体的作用而产生的。表面力又称面力,面力可以是集中力,但更一般的是分布载荷。体积力是作用在物体内部每个质点上的力,例如重力、磁力和惯性力等。对于塑性加工而言,除了高速锻造、爆炸成形、电磁成形等少数情况外,体积力相对于面力是很小的,可以忽略不计。

(3) 变形体在外力作用下处于平衡状态。在塑性加工理论中,将工具或变形体的整体作为研究对象时,通常假设工具或变形体是处于平衡状态的,当把这个整体划分为有限个

单元体作为基本研究对象时,每个单元体仍处于平衡状态。而变形体处于平衡状态的充分和必要条件是,作用于变形体的整体以及从整个变形体中分离出来的每个单元体上的外力系的矢量和必定为零,并且,外力系对任一点的总力矩也必定为零。

(4) 初始应力为零。物体在没有受到外力作用时,也存在着内力。内力是物体内部各质点之间的相互作用力,是材料本身所具有的特性。在外力作用下,物体内部原有的内力将发生变化,即产生了抵抗外力的附加内力,这种附加的内力会使物体形状发生改变,当附加内力达到一定值时,就可以产生塑性流动。由于本书所讨论的是材料在外力作用下的变形问题,因此,与变形无关的内力将不予考虑,也就是说,物体在受外力作用之前是处于自然平衡状态的,附加内力为零,即初始应力为零。

(5) 体积不变假设。弹性变形时,体积变化必须考虑。而在塑性变形时,虽然体积也有微量变化,但与塑性变形量相比是很小的,可以忽略不计。因此,一般假设材料在塑性变形前后的体积保持不变。

1.4 塑性加工力学的主要内容及知识要点

塑性加工力学的主要内容包括应力分析、应变分析、屈服准则、塑性应力应变关系以及解析方法。应力分析包含两部分内容,即点的应力状态和应力平衡微分方程。当单独论述应力分析问题时,则应力分析中的基本理论,对于弹性变形和塑性变形是不加区分的,对二者均适用;应变分析也是包含两部分内容,即点的应变状态和应变的连续性条件。当单独论述应变分析问题时,纯粹是一个几何学上的问题。本书关于应变的理论是建立在小变形条件基础之上的,因此,应变分析中所涉及到的基本理论,对于弹性变形和塑性变形是不加区分的,对二者均适用;屈服准则则是塑性加工力学的核心内容。屈服准则描述不同应力状态下变形体内某点由弹性状态进入塑性状态,并使塑性变形状态持续进行所必须遵守的条件;弹性变形与塑性变形的区别主要表现在应力应变关系上。对于弹性变形,应力应变关系为线性的,满足虎克定律,应变可由应力唯一确定。但是,在塑性变形范围内,应力与应变的关系是非线性的,应变不能由应力唯一确定,而是与变形历史有关;塑性加工力学的解析方法很多,在此只介绍最基本的主应力方法、滑移线法和上限法。此外,本书在最后介绍了粉末等多孔材料塑性加工力学的基本理论和解析方法。

塑性成形问题的解包括变形体内部的应力分布 σ_{ij} 、应变分布 ε_{ij} 或应变速率分布 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 、位移分布 u_{ij} 或位移速度分布 $\dot{u}_{ij}$ 。由变形体内部的应力分布可以计算出变形所需要的变形力、变形功以及变形功率,预测可能出现的缺陷,为加工设备的选择、工装模具设计以及工艺方案的优化奠定理论基础;由变形体内部的应变分布、位移速度分布 $\dot{u}_{ij}$ 可以确定变形体的外形尺寸和尺寸精度,并可以分析变形体内部的硬度分布、纤维组织的形成以及晶粒度的变化,由此可以达到优化毛坯形状,确定成形极限的目的,为提高产品的力学性能提供科学依据。

目前塑性加工力学体系日趋完善,对于弹塑性材料的塑性变形,有 3 个应力平衡微分方程、6 个几何方程、6 个本构方程(应力应变关系)、1 个屈服准则,共计 16 个方程,有 6 个应力分量、6 个应变分量、3 个位移分量以及比例系数 $d\lambda$, 共计 16 个未知数,方程数和未知数相等。对于刚塑性材料,还需要满足体积不变条件,未知数增加 1 个平均应力 σ_m , 即 17 个方程、17 个未知数,方程数和未知数也是相等的。因此,从形式上看,在一

定的应力边界条件、速度边界条件下,是可以求出塑性加工问题解的。显而易见,在体积不变条件下,为了求解塑性加工问题的精确解,需要联解 17 个方程,而且塑性加工时的边界条件通常是应力和速度的混合边界条件,即在一部分边界上已知应力而速度未知,在另一部分边界上应力未知而速度已知,因此,求解塑性加工问题的精确解是非常困难的,甚至是不可能的。为了适应工程上的需要,常常放松精确解的部分条件,仅要求满足其中的一部分条件,由此所得到的解,称为近似解。如果在求解时,仅要求满足应变几何方程、体积不变条件和速度边界条件,即满足运动许可条件,而对静力许可条件(应力平衡微分方程、屈服准则和应力边界条件)不予考虑,这样所得到的解,称为上限解,上限解是精确解的上限;如果在求解时,仅要求满足应力平衡微分方程、屈服准则和应力边界条件,而对运动许可条件不予考虑,这样所得到的解,称为下限解,下限解是精确解的下限。求近似解的方法很多,其所追求的目标是尽量采用简单的数学处理方法,从多个上限解中求得最小的上限解,从多个下限解中求得最大的下限解,如果一个问题的上限解和下限解相等,这个解就是精确解。

计算机技术以及有限元分析技术的发展,为求解塑性加工问题带来了方便。采用有限元分析塑性加工问题的基础是塑性加工力学理论。相对完善的金属塑性加工理论与传热学理论,为塑性加工过程有限元数值模拟奠定了可靠的理论基础。

目前可以用于求解塑性加工问题的有限元软件很多,并且比较成熟。采用有限元分析软件求解塑性加工问题,需要预先给定材料的特性和边界条件。材料力学特性的主要内容为等效应力与等效应变的关系。由于材料的力学特性随组织的变化而不同,因此,在求解塑性加工问题之前,需要精确测定材料的等效应力与等效应变的关系。由于等效应力与等效应变关系与应力状态无关,是唯一的,即等效应力与等效应变假设呈单一曲线关系。这样就可以采用最简单的测试方法,测定对象材料的等效应力与等效应变关系。由于等效应力在数值上等于单向均匀拉伸(或压缩)时的拉伸(或压缩)应力,因此,多采用单向拉伸或单向压缩方法测定材料的等效应力与等效应变关系。

边界条件的确定是求解塑性加工问题的关键技术,也是制约提高有限元数值模拟精度的瓶颈。由于塑性加工理论和有限元分析技术的不断发展和日趋完善,使得求解复杂塑性加工问题成为可能。可以说,如果能够准确地获得具体塑性加工问题的边界条件,则采用有限元分析技术求解塑性加工问题时的计算精度是非常高的。

塑性加工制品的最终力学性能取决于其组织的变化。而材料的组织是由塑性加工工艺决定的。因此,人们迫切希望了解塑性加工,尤其是热塑性变形过程中金属材料的组织演变规律,由此,通过控制材料的组织,获得所需要的材料力学性能,即实现材料力学性能预报。但是,由于材料组织演变及控制方面的相关理论发展相对缓慢,从而限制了热变形过程中材料组织演变数值模拟技术的发展。因此,热塑性变形过程中金属材料的组织演变规律及相关理论是材料加工领域的重点发展方向之一。显然,关于材料的组织演变及控制理论,需要材料学、材料加工、力学、物理学以及冶金学等领域学者的共同努力来建立。

2 应力状态及应力平衡微分方程

2.1 点的应力状态

2.1.1 应力

所谓应力，是由外力引起的物体内部单位截面面积上的内力。在一般情况下，物体内部各点的内力是不相同的，因此，有必要以点为基本研究对象来分析内力。

现考察一物体，在外力系 F_1 、 F_2 、 F_3 ……作用下处于平衡状态（如图 2-1 所示）。为了研究该受力物体内部某一点 P 处的内力，假想用经过 P 点的一个截面 A 将该物体分为 V_1 、 V_2 两部分，并将 V_2 部分移去，此时可以将 A 面看作是 V_1 部分的外表面。为了使剩下的部分 V_1 仍处于平衡状态，则 V_2 部分必然有力作用于 V_1 部分的 A 截面上，根据作用与反作用定律， V_1 部分也以大小相同、方向相反的力作用于 V_2 部分。 V_1 与 V_2 之间相互作用的力就构成了物体在截面 A 上的内力。因此，将 V_2 部分移去之后， V_2 部分对 V_1 部分的作用就可以用内力来表示。该内力与作用在 V_1 部分上的外力相平衡。

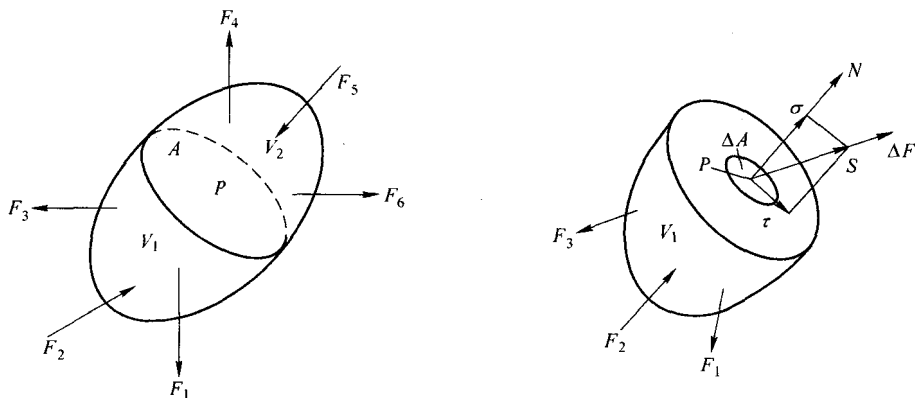


图 2-1 变形体在外力作用下处于平衡状态

在 A 面上围绕 P 点取一微小面积 ΔA ，设作用在该微小面积上内力的合力为 ΔF ，则 A 面上 P 点的全应力可由下式定义，即

$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \quad (2-1)$$

由于 ΔF 对于 ΔA 可以有任意的方向，通常将合力 ΔF 按截面 ΔA 的法向 N 和切向 t 分解为两个分量 ΔF_N 和 ΔF_t ，则定义

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_N}{\Delta A} = \frac{dF_N}{dA} \quad (2-2)$$

为全应力 S 的法向分量, 称为正应力。定义

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_t}{\Delta A} = \frac{dF_t}{dA} \quad (2-3)$$

为全应力 S 的切向分量, 称为切应力。显然

$$S^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (2-4)$$

过变形体内某点 P 有无限多个截面, 每个截面上都作用有应力。对于三维应力状态问题, 为了研究问题的方便, 在 P 点的无限多个截面中, 取相互垂直的 3 个截面, 在直角坐标系中, 这 3 个截面的法线方向分别与 3 个坐标轴 x 、 y 、 z 平行, 因此, 又称为坐标面。这里将法线方向与 x 坐标方向一致的截面称为 x 面, 与 y 坐标方向一致的截面称为 y 面, 与 z 坐标方向一致的截面称为 z 面。3 个截面上的全应力分别为 S_x 、 S_y 、 S_z 。为了使研究对象更加直观、清晰, 通常采用一个无限小的平行六面体来表示相互垂直的 3 个截面, 将其称为单元体。设单元体非常小, 可视为一点, 因此, 单元体上互相平行的两个平面可视为过该点的同一平面, 只需在 3 个相互垂直的平面上标注出全应力即可, 而另外 3 个相互垂直的平面上不必进行标注 (如图 2-2a、图 2-2b 所示)。将 3 个截面上的全应力 S_x 、 S_y 、 S_z 分别沿 3 个坐标方向进行分解, 每一个全应力均可分解为 1 个法向应力分量和两个切向应力分量。这样, 过变形体内一点的 3 个相互垂直的平面上共有 9 个应力分量, 即 3 个正应力分量, 6 个切向应力分量 (如图 2-2c 所示)。显然有

$$\left. \begin{aligned} S_x^2 &= \sigma_{xx}^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 && \text{— 作用在 } x \text{ 面上} \\ S_y^2 &= \tau_{yx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \tau_{yz}^2 && \text{— 作用在 } y \text{ 面上} \\ S_z^2 &= \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 + \sigma_{zz}^2 && \text{— 作用在 } z \text{ 面上} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

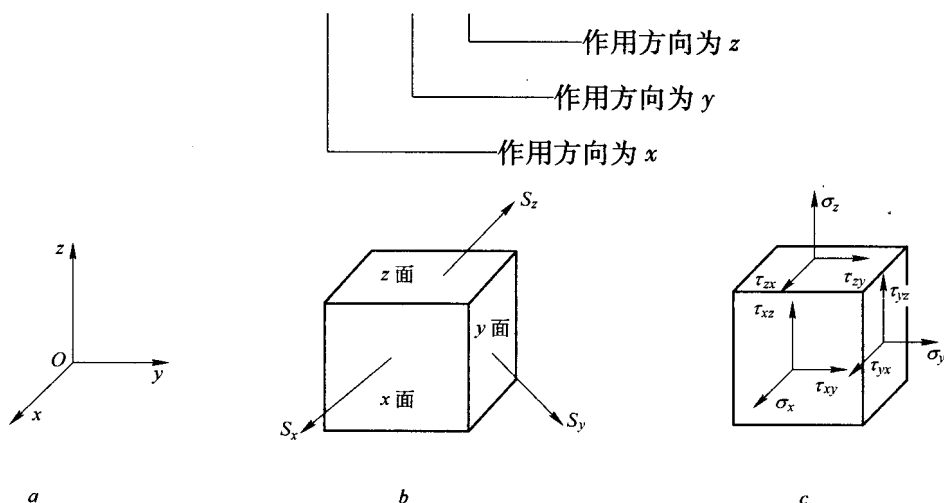


图 2-2 单元体的应力状态

a—直角坐标系; b— x 、 y 、 z 平面上的全应力; c—相互垂直 3 个平面上的 9 个应力分量

每个应力分量均有两个下标。第一个下标表示应力作用面法线的方向, 第二个下标表示该应力的作用方向。为了简单起见, 通常省略正应力的第二个下标 (如图 2-2c 所示)。

应力分量的正负号可按如下规定来确认, 即:

(1) 如果某一截面上的外法线方向是沿着坐标轴的正方向, 则作用在这个截面上的应