普通高等院校“十一五”电子信息与电气学科研究生规划教材

信息传输与正交函数

XINXI CHUANSHU YU ZHENGJIAO HANSHU

张其善 张凤元 杨东凯 著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

国家自然基金(60602046)资助
北京航空航天大学教学改革项目(400216)资助

信息传输与正交函数

张其善　张凤元　杨东凯　著

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

信息传输与正交函数/张其善,张凤元,杨东凯著.北京:国防工业出版社,2008.3

普通高等院校"十一五"电子信息与电气学科研究生规划教材

ISBN 978-7-118-05502-3

Ⅰ.信... Ⅱ.①张...②张...③杨... Ⅲ.①信息传输-研究生-教材②正交函数-研究生-教材

Ⅳ.TN919.1 0174.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 190521 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 **印张** 15½ **字数** 273 千字

2008 年 3 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—3000 册 **定价** 28.00 元

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

前　言

正交函数是电子工程特别是通信工程的数学基础之一。随着通信技术的不断发展,从电子管、晶体管时代演变到现在的集成电路时代,信号传输理论也经历了从模拟信号传输到数字信号传输的过程。在经典的信号传输理论中,是以正余弦函数系作为完备的正交函数系来分解一个信号或以其为负载波进行多路信息传输的。在现代的信号传输理论中,仍然是用正交函数来实现多路信息传输。在多路信号的传输中,选择不同的正交函数组作为分离信号集,则对应不同的多路信号分割方式。目前,多路信号的分割方式主要有频率分割、时间分割和波形(码形)分割三大类,对应的正交函数分别是正余弦三角函数系、方块脉冲函数系、沃尔什函数、哈尔函数、桥函数系等非正弦正交函数系。

本书作者之一张其善教授及其课题组,对非正弦正交函数理论及其在信息传输理论中的应用进行了长期的研究,其研究成果获得国家发明二等奖,基于相关的科研成果于 1988 年出版了专著《信息传输的新方法》,作为研究生、博士生的教材使用多年。为了反映本研究方向的最新研究成果和发展趋势,本书在此基础上,结合近年来课题组的研究成果,重点介绍了正交函数与信息传输理论,以及以沃尔什函数为基础的序率分割多路传输系统,补充了近年来发展迅速的各类信息传输系统与正交函数的关系,包括三代、下一代移动通信,超宽带、超窄带数据传输等内容。

在结构上，本书共分为 9 章：第 1 章介绍基本知识和发展背景；第 2 章介绍各种常用的正交函数；第 3 章是信息传输的基本思想和方法，以及正交函数与移动通信的关系；第 4 章讨论了沃尔什函数的复制理论；第 5 章详细地讨论了信号的复制生成理论；第 6 章介绍了复制序列的相关函数理论；第 7 章介绍了桥函数的生成理论；第 8 章讨论了序率分割多路传输系统；第 9 章给出了统一模型。

本书的出版得到了许多专家学者的大力支持,同时也是课题组研究人员共同的劳动成果,国防工业出版社就本书的出版给予了大力支持,在此一并致谢。

本书的出版得到了国家自然科学基金项目(项目批准号:60602046)和北京航空航天大学教改项目(400216)的资助。

由于作者水平有限,书中错误在所难免,诚挚地希望广大读者批评指正。

作　者

2008 年 1 月于北京

目 录

第1章 序　论

1.1 引　言

正交函数是电子工程特别是通信工程的数学基础之一。长期以来，在通信工程理论中一直以讲正弦函数为主，因为这种正交函数在通信领域内占统治地位。理论与实践都表明正弦余弦正交函数具有良好的数学特性，利用它和由它导出的一系列数学公式，可以解决通信及其它领域中的许多问题。但是，它也不是完美无缺的。随着电子技术的发展，特别是集成电路的发展，人们开始寻求更加适合这种工艺的理论基础和应用基础。20世纪60年代末期，对以沃尔什函数为代表的非正弦正交函数的研究，开拓了一条寻求新理论的道路。从1969年以来，对于沃尔什函数的研究，尤其是应用研究，取得了很大的进展，目前正稳步前进。

正交函数可以粗分为两大类：一是正弦正交函数；二是非正弦正交函数。本书将着重介绍以沃尔什函数为代表的非正弦正交函数在理论与应用研究方面的进展情况。

首先可能会遇到这样的问题：为什么要研究非正弦正交函数？非正弦正交函数为什么以沃尔什函数为代表？

为了说明上述问题，让我们回顾一下历史。迄今为止，通信理论基本上以正弦、余弦正交函数为它的数学基础。一般说来，在通信中使用正弦函数，是与线性时不变的电路组件做成实际可用的形式密切联系的。然而，如果每件事物在时间上都是不变的，那么就不能传输任何信息。报务员的电键、话筒和调幅器都是线性的，但又是时变的器件，不打电键，不对话筒发话或者不把时变调制电压馈送到调制器，传输信息也就停止了。对于信息传输来说，保持时间变化这个条件是一个基本要求。随着问题复杂程度的增加，就迫使我们用变系数方程来描述系统。正、余弦函数不适应于描述时变系统。

正、余弦函数在通信中的应用成功的使人们注意力集中于时间信号。在已出版的有关滤波器的书籍中，讲述的几乎都是有关时间信号的问题。然而，在自然界中存在着大量的空间信号问题，例如黑白照片就是具有两个变量的空间

信号。照片上各处的灰度可以表示为笛卡尔坐标中的 X 和 Y 的函数，或者表示为极坐标中的 r 和 φ 的函数。电视信号是一种具有两维空间变量和一维时间变量的时－空信号。可见，有许多信息不是仅由时间变量组成的。

正弦、余弦函数最重要的特点之一是：大多数用于通信的时间信号，都可以表示为正弦和余弦函数的叠加，傅里叶分析就是进行这种分析的数学工具，它将时间函数变成频率函数。这一点常被许多人看成是必然的事，以致于把话筒和电传发报机的输出电压，主观上认为仅仅是许多正弦和余弦函数的叠加。实际上，用正弦和余弦函数表示时间函数，只是许多函数表示法中的一种。任何一个完备的正交函数系，一般都能用来进行相当于傅里叶分析中的级数展开和用来进行与傅里叶变换相当的变换，因此，可以认为：话筒的输出电压或是沃尔什函数，或是勒让德多项式，或是抛物圆柱函数等的叠加。

在傅里叶分析中，任何一个时间有限的信号要占有无限的频带，而任何频带有限的信号又要占有无限的时间。所以，任一有限信号都占据时间－频率域的无限段。

在理想化网络的响应特性分析中，滤波器在未加入电压之前就产生输出电压。事实上显然是不可能的。

以上几点都说明正弦和余弦函数虽然可以解决通信中许多问题，但是，它仍然是不够完善的。

从历史发展的角度看，在科学发展的道路上，往往是某项技术获得突破，与此相关的理论及其应用就获得迅速发展。19 世纪初，通信技术使用的最重要的函数是方块形脉冲，到 19 世纪末，由于制成了可供使用的电容器，正弦函数第一次获得了实际应用。但是由于所制成的电容器容量很小，而且物理结构也不方便，因此正弦和余弦函数的应用仍受相当的限制。直到 19 世纪末 20 世纪初制成了用来分离不同频率正弦波的实际谐振电路，1915 年又做成了用电感和电容器组成的低通和带通滤波器后，才开创了广泛应用正弦和余弦函数的新时代。

从技术发展的角度看，通信技术经历了电子管、晶体管时代，现在进入了集成电路时代。集成电路和数字电路的进展，数字计算机的普遍使用，促进了通信系统的数字化，这为沃尔什函数和其它非正弦函数的应用提供了物质基础。

有人指出，非正弦载波信号的产生以及对它的调制当然处于现代技术的范围之内。但在发射和接收这些信号时，可能会产生很多困难，对保证接收和传输所需波形的天线系统的设计，虽然是可能的，但也是很困难的。

问题提得非常好，研制实际的发射机和接收机是一个很困难的任务，而且还有许多问题有待解决，哈尔姆斯曾介绍了由恰普曼所创造的发射器。制造这

种发射器时，需要不寻常地把理论知识、实验技巧和个人毅力三者结合起来。凡是尝试过制造这种发射器的人都会很容易地证实这点，用 1975 年的技术和测量设备来进行非正弦波实验，其困难程度大约和 1900 年用正弦波作实验一样，大多数人都会发现，不用电子管和示波器，而用莱顿瓶作电容器，用铅笔芯作电阻，用象牙或琥珀作为绝缘体来研制正弦波发射机和接收机，也是相当困难的。

正弦正交函数、非正弦正交函数都有它各自的优、缺点，可以相信，在科学发展的历史长河中，它们必将发挥各自的长处，作出各自的贡献。

1.2　在通信中的圆和圆函数

在天文学中，天文学家托勒密曾经用圆代替球体来描述行星的运动。它把五大行星、太阳和月亮看成是沿着称之为中心轨迹圆的主圆，围绕地球运动。叠加在中心轨迹圆上的副圆，称为圆周圆(如图 1-1 所示)，另一个圆周就叠加在第一个周转圆上，如此继续下去。说得确切一些，就是用圆的叠加来表示行星的轨迹。托勒密用 36 个圆来表示太阳、月亮和五大行星的轨迹，但这样做还不能与所观测到的资料完全符合，于是就提出用更多的圆以便更好地表示行星的轨道的方法。哥白尼把宇宙运动的中心，从地球的附近移到了太阳的附近，但是他仍然局限于用圆的叠加来表示行星的轨道。对于水星的轨道要用 11 个圆来描述，金星和地球各用 9 个圆，月亮用 4 个圆，其余的行星每个用 5 个圆。这样加起来共用了 48 个圆。

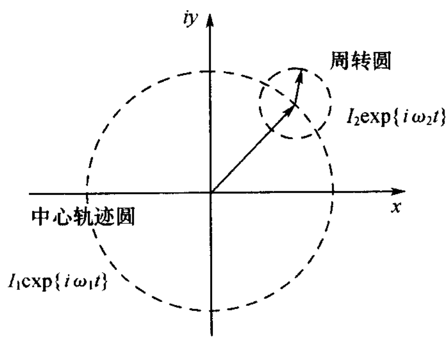

图 1-1　天文学和电气通信中圆的叠加

1609 年，开普勒终止了这种用圆的叠加来描述行星轨迹的方法，在他所写的《天体中行星》一书中，提出了用椭圆来描述行星的轨道。这样就能更好地与观测到的资料相吻合，而且方法更为简单。

一般人都以为是开普勒终止了圆周学说的应用，但是情况并非如此。圆周运动学说从天文学中消失了，却在其它的科学领域中又以另一种面目重新出现。在电气工程和物理学的一个重要组成部分中，又遇到了这个过去的老相识，而赋予了新的名称－指数函数 $e^{i\omega t}$ 或复数平面内的单位圆。凡是具有一般电气通信知识的人，一定不会把图 1-1 看成是一个中心轨迹圆和一个周转圆的叠加，而只会理解为使用复数符号的两个正弦振荡函数 $I_1 \exp\{i\omega_1 t\}$ 和 $I_2 \exp\{i\omega_2 t\}$ 的叠加。的确，图 1-1 是一幅用正弦信号对正弦波进行单边调制的标准示意图。说得通俗些，是把托勒密和哥白尼的圆叠加，变成用复数表示的傅里叶级数展开。

实数拓扑群表示式，看起来似乎与圆周运动无关，但是它的数学符号 $\{e^{ixy}\}$ 却能揭示本质。这个特征群意味着空间－时间的连续拓扑，而这个拓扑又使得把微分运算用于空间和时间的函数成为可能。考虑到微分运算在物理中的普遍应用，我们不得不怀疑，圆周运动学说对今天物理学的影响，是否会像当年对天文学所造成的影响一样大。

探索和研究圆周运动学说的轨迹是沃尔什函数的一个任务。重新回顾一下上述天文学方面的某些问题是值得的。一个椭圆轨道可以用圆的叠加来表示，而不会产生收敛或可微分的问题。过去关于周转圆的概念是对的，只是造成不必要的复杂。根据以太阳位于一个焦点的各个椭圆来表示各行星的轨道的简化方法，终于导致万有引力定理的产生。

1.3　正弦电波在无线电传输中的起源

正弦电波在无线电通信中的广泛应用，使人们觉察不到这个事实：它并非一向如此。海里希・赫兹(1893 年)在其实验中运用火花放电产生了电磁波。这种波今天称为有色噪声。在赫兹的这一实验后的 20 年间，炭电极之间的电弧以及火花隙放电便是当时电波的主要方法，无线电信号就由所迸发出来的或长或短的有色噪声组成。旋转式高频发生器和电子管的研制成功才最终导致了正弦电流及正弦电波的产生。

需要在几部发射机同时工作的情况下，有选择地接收信号，是促使正弦波得到广泛应用的强大动力。马克斯韦尔曾研究了由线圈和电容器组成的电路的一种现象，这种现象现在称之为谐振。许多人曾致力于这种现象的理论和实现方法的研究。传统的发射机和接收机的研制都是以正弦波为基础的。但是，是否只有正弦波才具有谐振现象呢？答案显然是否定的。

下面讨论谐振现象的数学基础。齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0{}^2 v=0 \tag{1-1}$$

的通解为

$$v(t)=V_1\sin\omega_0 t+V_2\cos\omega_0 t \tag{1-2}$$

用外力函数[(2)] $\omega_0{}^2 v_f(t)$ 代换方程(1-1)等号右面的零，得

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0{}^2 v=\omega_0{}^2 v_f(t) \tag{1-3}$$

该非齐次方程的通解由式(1-2)给出的齐次方程的通解加上非齐次方程的一个特解组成。寻求这一特解的传统方法是系数变换法，即拉氏变换法。然而，在简单情况下往往通过猜测一个特解来寻求简化求解过程。

令 $v_f(t)$ 为正弦函数：

$$v_f(t)=V\sin\omega t \tag{1-4}$$

猜出式(1-3)的一个特解

$$v_p(t)=V_0\sin\omega t \tag{1-5}$$

用 $v_p(t)$ 代换 v，用式(1-4)的力函数代换式(1-3)中的 $v_f(t)$ 就得到 V_0：

$$V_0=\frac{\omega_0{}^2}{\omega_0{}^2-\omega^2}V$$

$$v_p(t)=\frac{\omega_0{}^2}{\omega_0{}^2-\omega^2}V\sin\omega t \tag{1-6}$$

显然，猜出的这一特解除了 $\omega=\omega_0$，即所谓谐振状态外，对 ω 的其它值均成立。对于谐振状态，只好另猜一个解

$$v_p(t)=V_0\omega_0 t\cos\omega_0 t+V_1\omega_0 t\sin\omega_0 t \tag{1-7}$$

在式(1-3)中，用 $v_p(t)$ 代换 v，用 $V\sin\omega_0 t$ 代换 $v_f(t)$ 就求得 V_0 和 V_1

$$V_0=-\frac{1}{2}V\text{，}\quad V_1=0 \tag{1-8}$$

因此谐振时方程的特解为

$$v_p(t) = -\frac{1}{2}V\omega_0 t\cos\omega_0 t \tag{1-9}$$

将谐振的纯数学概念与简单电路的谐振联系起来。图 1-2 是一个由电感 L、电容 C 和电阻 R 组成的并联谐振电路。流进电路的电流 $i(t)$ 和电路两端的电压 $v(t)$ 之间的关系用下列微分方程表示

$$\frac{1}{R}v + \frac{1}{L}\int v\mathrm{d}t + C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = i(t) \tag{1-10}$$

对上式求导并整理可得

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}v = \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{1-11}$$

若 R 足够大并满足关系式

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC}, \quad v_f(t) = \frac{1}{\omega_0{}^2C}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

则式(1-3)等于式(1-11)，这样，微分方程谐振的数学概念就与电路谐振的概念联系起来了。

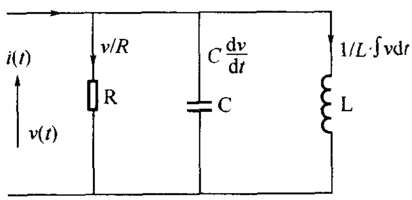

图 1-2　并联谐振电路

至此，所讨论的都是线性常微分方程。这种微分方程只与正弦力函数谐振。更严格地讲，这类函数只与函数 $\exp(-st)$，$\exp(-st)\sin\omega t$ 以及 $\exp(-st)\cos\omega t$ 谐振，其中 s 不能为负实数。此外具有线性时不变组件的集中参数电路总是用线性常系数微分方程来描述，因而它也只与正弦函数谐振。然而，谐振的数学概念的意义更为广泛。特别是，它还适用于变系数线性微分方程。这种方程用来描述具有线性时变组件的集中参数电路。线性时变组件就是开关、话筒以及调制器等。在无线电通信的早期，优质时变组件尚未出现，因而谐振现象就为正弦函数所独有。随着半导体技术的出现，这种情形发生了根本变化。开关是目前最受欢迎的电子组件之一，而且它还是一种线性时变组件。有些书上已经研究了几个具有线性时变组件的集中参数电路，这种电路将与非正弦函数谐振。