

渗流论文选集

沙金焯 著

SHENLIU LUNWEN XUANJI



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

渗流论文选集

◎ 沙金焯 著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书主要内容为作者在地下水不稳定运动及水工建筑物渗流渗透变形等方面提出的一些看法及研究成果。

本书适用于流体力学、岩土力学的科技人员及相关专业的高校师生参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

渗流论文选集 / 沙金焯著. — 北京: 中国水利水电出版社, 2007

ISBN 978-7-5084-4593-9

I. 渗… II. 沙… III. 渗流—水力计算 IV. TV139.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 060660 号

书 名	渗流论文选集
作 者	沙金焯 著
出版 发行	中国水利水电出版社 (北京市三里河路 6 号 100044) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 63202266 (总机)、68331835 (营销中心) 北京科水图书销售中心 (零售) 电话: (010) 88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
经 售	
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	北京市地矿印刷厂
规 格	850mm×1168mm 32 开本 6.25 印张 168 千字
版 次	2007 年 6 月第 1 版 2007 年 6 月第 1 次印刷
印 数	0001—1000 册
定 价	18.00 元

凡购买我社图书, 如有缺页、倒页、脱页的, 本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

渗流从本质上来说属于流体力学范畴，所以流体力学中的一些定律、定理均能适用。但渗流又不完全等同于流体力学，因为它是研究流体在多孔介质中的流动，这种流动受制于岩土本身的几何结构及其物理属性。所以渗流又是岩土力学的一个重要方面，如同剪切、固结等。此外渗流运动还要涉及到影响运动的外部环境，包括各种边界条件、初始条件、补给条件以及渗流场本身的非均匀性和各向异性等一系列问题，错综复杂，故必须借助较高的数理专业知识，因而渗流也就成了一门涉及多种专业的边缘学科。

从19世纪中叶达西定律问世以来，100多年的渗流研究，完全是基于这条定律。但随着大规模工程实践的不断深入，人们愈来愈感到达西定律的局限性，例如发生在堆石坝中的渗流、砂卵石中的渗流，以及高黏性土和淤泥中的渗流等，达西定律已是无能为力了。

以上情况说明了渗流研究的多样性、复杂性，其难度不言而喻。笔者深感水平有限，尽管从事渗流已经半个世纪，但还差得很远，充其量不过是一个入门罢了。

出版这本小册子，目的就是要抛砖引玉，向同行请教、学习，仅此而已。此书共列入1979年及以后发表的部分文章。

本书由水利部南京水利科学研究院专著出版基金资助，特此致谢。

作者

2007年3月

目 录

前 言

水平面内地下水的二维非定常运动	1
非线性蒸发条件下的明沟暗管排水	10
土的渗透变形及反滤层	21
若干渗流理论问题的初步探讨	64
THE APPROXIMATE CALCULATION OF PARTIALLY PENETRATING WELL	78
用保角变换法求解渗流扬压力	87
UNSYMMETRIC FLOW OF GROUNDWATER WITH VARYING BOUNDARIES	102
农田地下水的排水计算	121
地下水资源评价开采的试验研究	132
EFFECT OF NATURAL RECHARGE CONDITIONS UPON FLUCTUATION OF SHALLOW GROUNDWATER	141
农田排水工程计算及试验	156
THE RISE OF GROUNDWATER TABLE FROM IRRIGATION INFILTRATION	182
THE PREDICTION OF GROUNDWATER TABLE FOR WATER RESOURCES PLANNING AND DESIGN	188

水平面内地下水的二维非定常运动*

在介质是各向同性、渗流是缓变流、流速沿铅直方向不变化的假定下，有自由面的二维非定常渗流基本方程为^[1]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\mu}{k} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{k} = 0 \quad (1)$$

式中： k 为渗透系数 (m/d)； μ 为给水度； ε 为地下水蒸发强度 (m/d)； h 为自由面至不透水层的距离 (m)； H 为自基准面算起的水头 (m)。见图 1。

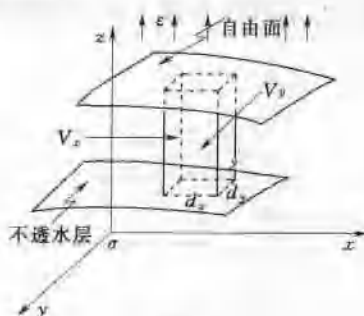


图 1

若把不透水层放在基准面 xoy 上，则式 (1) 中的 H 变为 h ，线性化后^[1]可得

$$\frac{\partial h}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = -\frac{\varepsilon}{\mu} \quad (2)$$

式中： $a^2 = kh_{rp}\alpha/\mu$ (m²/d)； h_{rp} 为渗流平均厚度 (m)； α 为排水沟或暗管的不完整系数。

* 本文发表于中国科学院《力学学报》，1979年第4期。

$$\alpha = 1 / \left\{ 1 + \frac{4T_0}{\pi l} \ln \left[1 / \left(2 \operatorname{sh} \frac{\pi B}{4T_0} \right) \right] \right\}^{[2]} \quad (3)$$

式中: T_0 为沟底离不透水层距离 (m); B 为沟水面宽度 (m); l 为排水沟半间距 (m)。

$$\epsilon = \epsilon_0 [1 - (\Delta/\Delta_0)], \quad \Delta = T - h \quad (4)$$

式中: ϵ_0 为地表水的蒸发强度 (m/d); Δ_0 为地下水蒸发为零时的埋深 (m), 一般为 2~3m; Δ 为地下水埋深 (m)。

在式 (4) 中, 当实有地下水埋深大于 Δ_0 时, 则取 $\epsilon = 0$ 进行计算。以式 (4) 代入式 (2), 则得考虑变量补给时的二维非定常问题的偏微分方程

$$h_t = a^2 (h_{xx} + h_{yy}) - Ah + AT - (\epsilon_0/\mu) \quad (5)$$

式中: $A = \epsilon_0 / (\Delta_0 \mu)$ (1/d); h_t 、 h_{xx} 、 h_{yy} 分别为 h 对 t 、 x 、 y 的一阶及二阶偏微分。按图 2 和图 3 可列出方程 (5) 的边界条件及初始条件

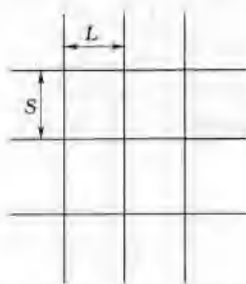


图 2

$$\left. \begin{aligned} h(0, y, t) &= h(L, y, t) = h_0 \\ h(x, 0, t) &= h(x, S, t) = h_0 \end{aligned} \right\} (t \geq 0) \quad (6)$$

$$h(x, y, 0) = H_0 \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \quad (7)$$

式 (5) ~ 式 (7) 在数学上直接求解比较困难, 现作函数^[3] $\bar{h} = h e^{At}$ 进行变换后可得

$$\bar{h}_t - a^2 (\bar{h}_{xx} + \bar{h}_{yy}) = -B e^{At} \quad (8)$$

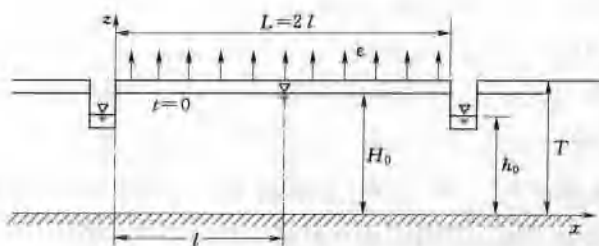


图 3

$$\left. \begin{aligned} \bar{h}(0, y, t) &= \bar{h}(L, y, t) = h_0 e^{At} \\ \bar{h}(x, 0, t) &= \bar{h}(x, S, t) = h_0 e^{At} \end{aligned} \right\} (t \geq 0) \quad (9)$$

$$\bar{h}(x, y, 0) = H_0 \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \quad (10)$$

式中: $B = [(\epsilon_0/\mu) - AT]$ ($1/d$), 为了求解 $\bar{h}$, 令 $\bar{h} = \bar{h}^I + \bar{h}^{II}$, 于是有

$$\left[I \right] \begin{cases} \bar{h}_t^I - a^2 (\bar{h}_{xx}^I + \bar{h}_{yy}^I) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$\left[I \right] \begin{cases} \bar{h}^I(0, y, t) = \bar{h}^I(L, y, t) = h_0 e^{At} \\ \bar{h}^I(x, 0, t) = \bar{h}^I(x, S, t) = h_0 e^{At} \end{cases} (t \geq 0) \quad (12)$$

$$\bar{h}^I(x, y, 0) = H_0 \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \quad (13)$$

$$\left[II \right] \begin{cases} \bar{h}_t^{II} - a^2 (\bar{h}_{xx}^{II} + \bar{h}_{yy}^{II}) = -Be^{At} \end{cases} \quad (14)$$

$$\left[II \right] \begin{cases} \bar{h}^{II}(0, y, t) = \bar{h}^{II}(L, y, t) = 0 \\ \bar{h}^{II}(x, 0, t) = \bar{h}^{II}(x, S, t) = 0 \end{cases} (t \geq 0) \quad (15)$$

$$\bar{h}^{II}(x, y, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \quad (16)$$

再令 $\bar{h}^I = V + W^I + W^{II}$, $V = h_0 e^{At}$, 可得

$$\left[III \right] \begin{cases} W_t^I - a^2 (W_{xx}^I + W_{yy}^I) = -Ah_0 e^{At} \end{cases} \quad (17)$$

$$\left[III \right] \begin{cases} W^I(0, y, t) = W^I(L, y, t) = 0 \\ W^I(x, 0, t) = W^I(x, S, t) = 0 \end{cases} (t \geq 0) \quad (18)$$

$$W^I(x, y, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \quad (19)$$

$$W_t^{\parallel} - a^2 (W_{xx}^{\parallel} + W_{yy}^{\parallel}) = 0 \quad (20)$$

$$[IV] \begin{cases} W^{\parallel}(0, y, t) = W^{\parallel}(L, y, t) = 0 \\ W^{\parallel}(x, 0, t) = W^{\parallel}(x, S, t) = 0 \end{cases} \quad (t \geq 0) \quad (21)$$

$$W^{\parallel}(x, y, 0) = H \quad (0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq S) \quad (22)$$

分别解出 $\bar{h}^{\parallel}$ 、 $W^{\perp}$ 、 $W^{\parallel}$ 后即得 $\bar{h} = V + W^{\perp} + W^{\parallel} + \bar{h}^{\parallel}$ 。再通过 $\bar{h}$ 的逆变换，最后求得方程组 (5) ~ (7) 的解

$$h(x, y, t) = h_0 - \frac{16}{\pi^2} e^{-At} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[(Ah_0 + B) \left(\frac{e^{At} - e^{-a^2 \beta_{mn}^2 t}}{A + a^2 \beta_{mn}^2} \right) - He^{-a^2 \beta_{mn}^2 t} \right] \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{S} \quad (23)$$

式中： $H = H_0 - h_0$ ； $\beta_{mn}^2 = (m\pi/L)^2 + (n\pi/S)^2$ 。

若令 $x = L/2$ ， $y = S/2$ ，代入式 (23)，则得中点地下水位随时间的变化规律

$$h(t) = h_0 - \frac{16}{\pi^2} e^{-At} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[(Ah_0 + B) \left(\frac{e^{At} - e^{-a^2 \beta_{mn}^2 t}}{A + a^2 \beta_{mn}^2} \right) - He^{-a^2 \beta_{mn}^2 t} \right] \times \frac{1}{mn} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (24)$$

若不考虑蒸发，则将 $A = 0$ ， $B = 0$ 代入式 (23)、式 (24) 即可。由式 (24)，可算得任一瞬时流入任一側排水沟的渗流量为

$$q(t) = k[h^2(t) - h_0^2]/L \quad (25)$$

$$q(t) = k[h^2(t) - h_0^2]/S \quad (26)$$

现在简化式 (23)、式 (24)。因为 $h_0 + \Delta_0 \approx T$ ，故可近似取 $(Ah_0 + B) = A(h_0 + \Delta_0 - T) = 0$ ，于是式 (23)、式 (24) 分别简化为

$$h(x, y, t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} He^{-At} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} e^{-a^2 \beta_{mn}^2 t} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{S} \quad (27)$$

$$h(t) = h_0 + \frac{16}{\pi^2} H e^{-At} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} e^{-\frac{a^2}{L^2} \frac{m^2}{n^2} t} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (28)$$

上两式均为收敛级数，取四项已足够精确， t 较大或 S 较小 L 较小时则只需取一项

$$h(x, y, t) = h_0 + (16/\pi^2) H e^{-At} (e^{-Dt} \sin \theta) (e^{-Ft} \sin \phi) \quad (29)$$

$$h(t) = h_0 + (16/\pi^2) H e^{-At} (e^{-Dt}) (e^{-Ft}) \quad (30)$$

式中： $D = (\pi a/L)^2$ ； $F = (\pi a/S)^2$ ； $\theta = \pi x/L$ ； $\phi = \pi y/S$ 。

对于一维问题，只需在式 (23)、式 (24) 中含弃 y 项即可^[3]

$$h(x, t) = h_0 - \frac{4}{\pi} e^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} \left[(Ah_0 + B) \left(\frac{e^{At} - e^{-ct}}{A + c} \right) - H e^{-ct} \right] \frac{\sin Kx}{2m+1} \quad (31)$$

$$h(t) = h_0 - \frac{4}{\pi} e^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} \left[(Ah_0 + B) \left(\frac{e^{At} - e^{-ct}}{A + c} \right) - H e^{-ct} \right] \frac{(-1)^m}{2m+1} \quad (32)$$

式中： $K = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi / l$ ； $c = \left\{ \left[\left(m + \frac{1}{2}\right) \pi a \right] / l \right\}^2$ ； $l = \frac{L}{2}$ 。

同前一样，近似地令 $(Ah_0 + B) = 0$ ，并取少量级数计算，就有

$$h(x, t) = h_0 + \frac{4}{\pi} H e^{-At} \left(e^{-Dt} \sin \theta + \frac{1}{3} e^{-9Dt} \sin 3\theta + \frac{1}{5} e^{-25Dt} \sin 5\theta + \frac{1}{7} e^{-49Dt} \sin 7\theta \right) \quad (33)$$

$$h(t) = h_0 + \frac{4}{\pi} H e^{-At} \left(e^{-Dt} - \frac{1}{3} e^{-9Dt} + \frac{1}{5} e^{-25Dt} - \frac{1}{7} e^{-49Dt} \right) \quad (34)$$

下面举一实例，各原始数据见图 4，计算结果见表 1。计算时，对有蒸发情况是按式 (32) 取三项级数计算的。对无蒸发情况是按式 (34) 令 $A=0$ 后取三项级数计算的。只有 $t=4d$ 时均取四项级数计算。

沟距可放宽 $\sqrt{2}$ 倍，这就可以大大少挖耕地^①。

下面我们来研究一维流动与二维流动的界限。令式(30)中 $A=0$ ，有 $h(t) = h_0 + (16/\pi^2) H e^{-(D+F)t}$ 。分析此式可知，区分流动状态的界限，主要体现在 $(D+F)$ 之中。当田块为正方形时 $S=L$ ，得到典型二维流动，此时 $R_2 = D+F = (\pi a/L)^2 + (\pi a/S)^2 = 2(\pi a/L)^2$ 。若为一维流动，则有 $R_1 = (\pi a/L)^2$ 。今设

$$\xi = \left[\left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 + \left(\frac{\pi a}{S} \right)^2 \right] / \left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 = \left[\frac{1}{L^2} + \frac{1}{S^2} \right] / \frac{1}{L^2} \quad (37)$$

由上式可知，二维流动时 $\xi=2$ ，一维流动时 $\xi=1$ ，由此可知 $\xi=1 \sim 2$ 。今若不断加大一边，而保持另一沟距不变，则有图5所示的变化。由图可知，大约在 $\sigma = (S/L) \geq 3$ 以后， $\xi \rightarrow 1$ ，此即说明在当 $(S/L) \geq$



图5

3以后，地下水流动可视为一维问题，而在 $(S/L) < 3$ 时，则必须按二维问题处理。其实若在式(35)中， $\sigma \geq 3$ 后，表示二维流动的式(35)也可转化为表示一维流动的式(36) [同时 $(16/\pi^2) \rightarrow (4/\pi)$]。

在某些情况下，沟水位不是常值 h_0 而是按指数规律变化(见图6)。边界条件为

$$h(0, t) = h_1 + (h_0 - h_1) e^{-bt} \quad (38)$$

式中： b 为下降速度指数； $h(0, t)$ 为任意时刻的沟水位； h_0 为 $t=0$ 运动开始时的沟水位； h_1 为下降终了后的沟水位。一般江

① 式(35)和式(36)中， σ 为田块长宽比，由生产单位定出；求得 L 后，则另一边沟距 $S = \sigma L$ ； h_0 为沟水位； $h_{cp} = (H_0 + h_0)/2$ ； H_0 为 $t=0$ 时沟距中点地下水位； $u^2 = kh_{cp}a/\mu$ ；近似取 $a=1$ ； $h(t)$ 为沟距中点地下水位在经历 t 时间后要求达到的高程； $H = H_0 - h_0$ ， $A = \epsilon a / (\Delta \rho \mu)$ 。

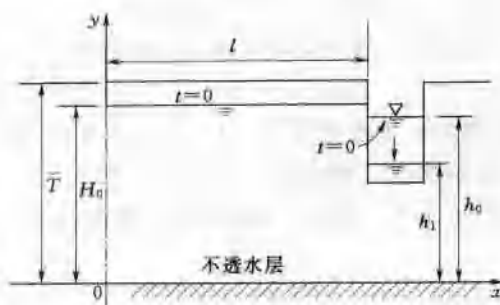


图 6

河及排水沟水位下降规律，总是初期下降快，后期下降慢，及至某一水位 h_1 后基本不变。对于某一具体工程，可由实测资料绘制沟水位过程线 $h-t$ 。自一次降水后，测得沟水位最大值 h_0 （将此时定为 $t=0$ ），然后经历某一时期一直测到最终下降水位 h_1 。于是可由式 (38) 求得

$$b = \ln \left[\frac{h_0 - h_1}{h(0, t) - h_1} \right] / t \quad (39)$$

现在我们列出下列方程组

$$h_t = a^2 h_{xx} - Ah + AT - (\epsilon_0 / \mu) \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} h(0, t) &= h_1 + (h_0 - h_1)e^{-bt} \\ h_x(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} (t \geq 0) \quad (41)$$

$$h(x, 0) = H_0 \quad (0 < x < L) \quad (42)$$

解上述方程组即得本问题的解

$$\begin{aligned} h(x, t) &= h_1 + (h_0 - h_1)e^{-bt} - \frac{4}{\pi}(Ah_1 + B)e^{-At} \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{At} - e^{-ct}}{A + c} \frac{\sin Kx}{2m+1} + \frac{4}{\pi}He^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-ct} \frac{\sin Kx}{2m+1} - \frac{4}{\pi} \\ &\times (A - b)(h_0 - h_1)e^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{(A-b)t} - e^{-ct}}{(A - b) + c} \frac{\sin Kx}{2m+1} \quad (43) \end{aligned}$$

令 $x=l$ ，则得沟距中点地下水位随时间的变化规律

$$\begin{aligned}
h(t) = & h_1 + (h_0 - h_1)e^{-bt} - \frac{4}{\pi}(Ah_1 + B)e^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{At} - e^{-ct}}{A+c} \frac{(-1)^m}{2m+1} \\
& + \frac{4}{\pi}He^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-ct} \frac{(-1)^m}{2m+1} - \frac{4}{\pi}(A-b) \\
& \times (h_0 - h_1)e^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{(A-b)t} - e^{-ct}}{(A-b)+c} \frac{(-1)^m}{2m+1} \quad (44)
\end{aligned}$$

若令 $b=0$ ，则式 (43) 表示沟水位不作式 (38) 的变化，即从 $t=0$ 开始，沟水位就在 h_0 不变。于是得到与文献 [3] 相同的结果

$$h(x,t) = h_0 - \frac{4}{\pi}e^{-At} \sum_{m=0}^{\infty} \left[(Ah_0 + B) \left(\frac{e^{At} - e^{-ct}}{A+c} \right) - He^{-ct} \right] \frac{\sin Kx}{2m+1} \quad (45)$$

此结果即式 (31)。同前一样，也可将式 (43)、式 (44) 作简化并取少量级数进行近似计算。

参 考 文 献

- [1] B. H. 阿拉文, C. H. 努米罗夫, 滤流理论, 北京: 高等教育出版社, 1957
- [2] 瞿兴业, 水利学报, 1962. 6
- [3] 沙金焯, 蒸发作用下的明沟排水, 江苏省力学学会第一届年会, 1964

非线性蒸发条件下的明沟暗管排水*

蒸发对地下水动态的影响，愈来愈为人们所重视，近 20 多年来，各国学者相继开展了这一课题的研究，但多数局限于线性蒸发问题，而对于非线性蒸发则甚少研究。本文拟对此问题作一探讨。

(一) 非线性蒸发作用下的地下水运动方程及其求解

蒸发随地下水埋深而变，国内外一般均采用下式描述

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} \right)^n \quad (1)$$

$$\Delta = T - h \quad (2)$$

式中： ε_0 为地下水接近地表面时之蒸发强度，一般视土质、植被、气象等因素而变，可近似地采用当地当时之水面蒸发强度代替之 (m/d)； Δ_0 为地下水蒸发为零值时之埋深，一般在 1.5~3.0m 之间； n 为指数，对于全剖面为砂土或粉砂土等轻质土 $n=1$ ，即线性蒸发，若表层有黏土覆盖或中位层具有一定厚度的黏土夹层时 $n=2-3$ ； ε 为不同地下水埋深 Δ 时之蒸发强度 (m/d)； Δ 为地下水埋深 (m)； T 为自地面至不透水层面之距 (m)； h 为地下水水面至不透水层面之距 (m)。

现在，对于 $n=1$ 的线性蒸发作用下的地下水排水问题，已经有了一些研究。下面主要对 $n=2$ 的非线性蒸发进行讨论。当 $n=2$ 时，则式 (1) 化为

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\Delta}{\Delta_0} \right)^2 \quad (3)$$

* 本文发表于水利学报，1983 年第 2 期。

将式 (2) 代入式 (3), 又因 $\Delta_0 = T - h_{\Delta_0}$, 于是式 (3) 化为

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\Delta_0^2} (h - h_{\Delta_0})^2 \quad (4)$$

式中: h_{Δ_0} 为地下水停止蒸发的高程 (m)。

对于具有补给项的地下水二元不稳定运动方程为

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] - \frac{\varepsilon}{\mu} \quad (5)$$

将式 (4) 代入式 (5) 则得

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] - \frac{\varepsilon_0}{\Delta_0^2 \mu} (h - h_{\Delta_0})^2 \quad (6)$$

式中: k 为渗透系数 (m/d); μ 为土的给水度。

令 $A_z = \varepsilon_0 / \Delta_0^2 \mu$, $h' = h - h_{\Delta_0}$, 代入式 (6) 则得

$$\frac{\partial h'}{\partial t} = \frac{k h_{cp}}{\mu} \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'}{\partial y^2} \right) - A_z h'^2 \quad (7)$$

式中: $h_{cp} = h' + h_{\Delta_0} = h$ [式 (6) 中圆括号内之 h]。

式 (7) 可以化为

$$\frac{\partial h'^2}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 h'^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h'^2}{\partial y^2} \right) - 2h' A_z h'^2 \quad (8)$$

式中: $a^2 = k h_{cp} \alpha / \mu$ 。再令 $u = h'^2$, $2h' = 2(h - h_{\Delta_0}) = 2(h_{cp} - h_{\Delta_0}) = h'_{cp}$, 则得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - 2A_z h'_{cp} u \quad (9)$$

式 (9) 就是经过两次线性化后的在非线性蒸发作用下的二元地下水不稳定运动方程。若在上式中舍弃 y 项, 即为一元问题, 文献 [1] 的作者曾对此研究过。

现在列出方程 (9) 的初始条件和边界条件

$$\left. \begin{aligned} h(0, y, t) &= h(L, y, t) = h_0 \\ h(x, 0, t) &= h(x, B, t) = h_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$h(x, y, 0) = H_0 \quad (11)$$

仿照前述, 将上面的边界条件和初始条件作同样的变换而有

$$\left. \begin{aligned} u(0, y, t) = u(L, y, t) &= (h_0 - h_{\Delta_0})^2 \\ u(x, 0, t) = u(x, B, t) &= (h_0 - h_{\Delta_0})^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$u(x, y, 0) = (H_0 - h_{\Delta_0})^2 \quad (13)$$

解方程组 (9)、(12)、(13) 得到地下水随时间和空间的变化规律

$$\begin{aligned} h(x, y, t) = h_{\Delta_0} + & \left\{ (h_0 - h_{\Delta_0})^2 + \frac{16}{\pi^2} [(H_0 - h_{\Delta_0})^2 - (h_0 - h_{\Delta_0})^2] e^{-A't} \right. \\ & \times \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} e^{-\beta t} \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{B} - \frac{16}{\pi^2} A' (h_0 - h_{\Delta_0})^2 \\ & \times e^{-A't} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{e^{A't} - e^{-\beta t}}{A' + \beta} \right) \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \\ & \left. \times \sin \frac{n\pi y}{B} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (14) \end{aligned}$$

令 $x=L/2$, $y=B/2$, 代入式 (14), 则得田块中点地下水位随时间的变化规律

$$\begin{aligned} h(t) = h_{\Delta_0} + & \left\{ (h_0 - h_{\Delta_0})^2 + \frac{16}{\pi^2} [(H_0 - h_{\Delta_0})^2 - (h_0 - h_{\Delta_0})^2] e^{-A't} \right. \\ & \times \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{e^{-\beta t}}{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{16}{\pi^2} A' (h_0 - h_{\Delta_0})^2 e^{-A't} \\ & \left. \times \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{e^{A't} - e^{-\beta t}}{A' + \beta} \right) \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (15) \end{aligned}$$

式中

$$A' = 2 \frac{\varepsilon_0}{\Delta_0^2 \mu} (h_{cp} - h_{\Delta_0})$$

$$h_{cp} = \frac{1}{2} (H_0 + h_0)$$

$$\beta = \left(\frac{m\pi a}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi a}{B} \right)^2$$

$$a^2 = \frac{k h_{cp} a}{\mu}$$