高中课程新学案

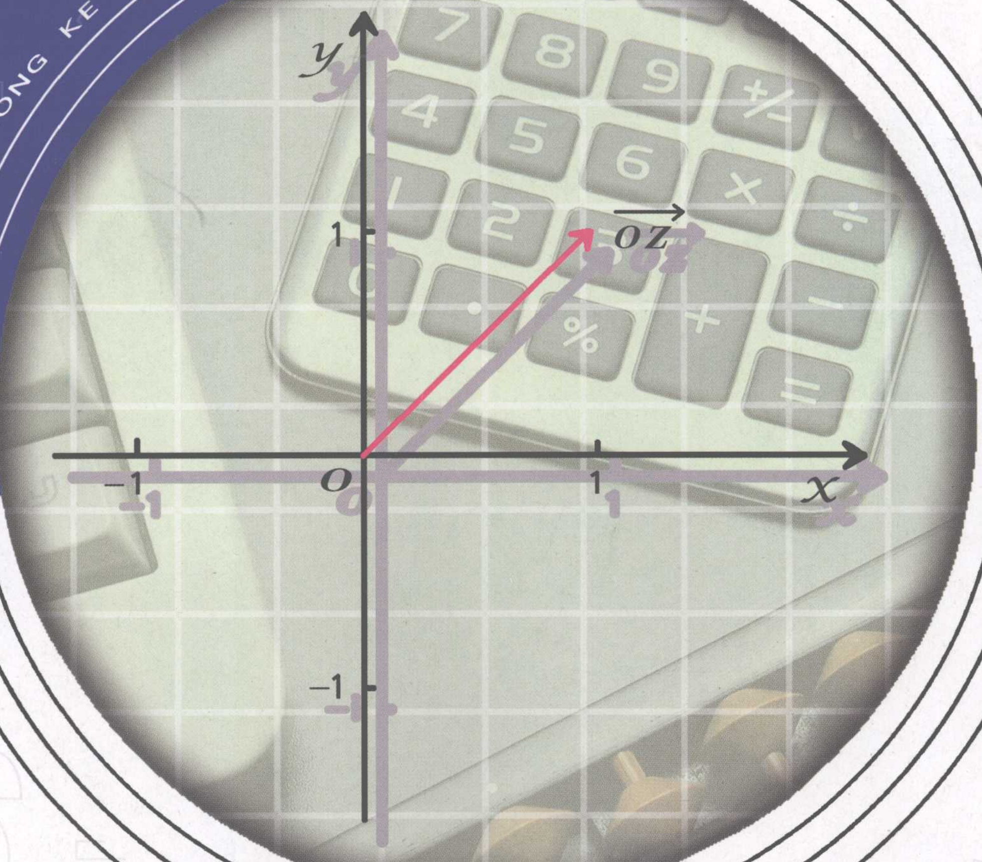
SHUXUE 数学

理

选修 2-2

选修 2-3

GAO ZHONG KE CHENG XIN XUE AN



主编　金立村

郭允远

明天出版社

TOMORROW PUBLISHING HOUSE

高中课程新学案

GAO ZHONG KE CHENG XIN XUE AN

数学(理)

(选修 2–2、2–3)

主　编：金立村　郭允远

副主编：刘建林　秦庆尧

编　者：(排名不分先后)

王平余　李学武　张德国　张　珩　王佃军

张传法　寇学海　沈秀鹏　秦庆尧　岳　峰

周秋霞　王召坤　杨建营　张树文　毛士勇

齐文贵　高元仁　沈　伟　侯元夕

明天出版社

TOMORROW PUBLISHING HOUSE

GAO ZHONG KE CHENG XIN XUE AN
高中课程新学案

编委会名单

高中课程新学案

数　学(理)

（选修2-2、2-3）

*

明天出版社出版

（济南经九路胜利大街39号）

http://www.sdpress.com.cn

http://www.tomorrowpub.com

山东省新华书店发行　　山东新华印刷厂临沂厂印刷

*

889×1194毫米　16开本　13印张　534千字

2008年1月第1版　2008年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5332-5617-3

定价：10.40元

如有印装质量问题，请与印刷厂调换。

（电话：0539—2925659）

前言

为适应基础教育课程改革的要求,推进高中教学改革的深入发展,进一步提高教学效率和质量,使教师的教与学生的学、教学内容与教学过程、知识传授与发展能力等,在课堂教学这一时空内的结合更加科学、和谐、完美,我们在充分搞好调查研究、总结高中学校教改经验的基础上,组织优秀骨干教师和教研人员,编写了《高中课程新学案》,供学生使用.

编写和使用《新学案》的直接目的,是为了推进课堂教学真正实现教的方式和学的方式的转变,进一步还学生以学习主人地位,更多地给学生以动手、动脑、动口的时间和空间,帮助学生打牢基础,发展能力,减轻负担,提高效率.

《新学案》高一、高二年级本按教材顺序和新授课特点编写,高中三年级本按教材和高考考试大纲要求编写,原则上1~2课时一个学案,每个学案分“学海导航”、“学习探究”、“自我测评”和“拓展提高”四个部分(答案另附),旨在帮助学生明确学习目标,优化学习过程,以学案提供的栏目和问题为线索,理解、掌握和巩固教材的基础知识,并在自我测评和拓展提高的实战练习中发展能力.与其他资料相比,《新学案》的突出特点是:汇集群智,体例创新;以生为本,以学立意;着眼基础,适当超越.这既符合素质教育的要求,也符合高中生参加高考选拔的需要.

《新学案》是近几年高中教学改革的一项新成果,是广大教师集体智慧的结晶,它的使用,必将对中学教学模式的转变和教学质量的提高产生积极的影响.但由于它是新事物,限于我们的认知水平,必定还会有不足和缺陷,恳请广大师生提出宝贵意见和建议.

编　者

2008年1月

目录

选修 2－2

第一章　导数及其应用

§1.1.1　变化率问题

学海导航

【知识要点】 1. 自变量的改变量,因变量的改变量;2. 函数的平均变化率.

【学习要求】 通过熟悉的事例如气球膨胀、高台跳水等,分析计算其中体积的变化率、平均速度,从而认识函数的平均变化率.

学习探究

【要点分析】

1. 对于函数 $y=f(x)$,从其图象上的点 $A(x_1,y_1)$,到点 $B(x_2,y_2)$,自变量 x 的改变量为 x_2-x_1,记作 Δx;函数值的改变量为 y_2-y_1,记作 Δf 或 Δy. 即 $\Delta x=x_2-x_1$,$\Delta f=y_2-y_1=f(x_2)-f(x_1)$.

注:(1)Δx 是一个整体符号,而不是 Δ 与 x 相乘.

(2)Δx 是自变量 x 在 x_0 处的增量,可为正值,也可为负值.

2. 我们把$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$叫做函数 $f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率.

若函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 及其附近有定义,则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率是

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

【例题分析】

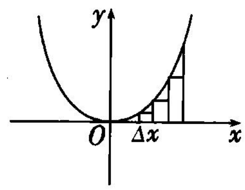
例 1　已知自由落体运动的方程为 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$.

求:(1)落体在 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度 $\bar{v}$;

(2)落体在 $t=10\text{s}$ 到 $t=10.1\text{s}$ 这段时间内的平均速度.

分析:平均速度 $\bar{v}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$,故须先求 Δs,再求 $\bar{v}$.

例 2　求函数 $y=x^2$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率;并结合图象探讨当 Δx 取定值后,随 x_0 取值不同,该函数的平均变化率是否相同.



分析:(1)求平均变化率时注意

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$;

(2)探讨在不同区间上的平均变化率时,要注意"结合图象".

事实上$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$是两点$(x_0,y_0)$,$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$连线的斜率.

自我测评

A 组

1. 一辆汽车在起步的前 10 秒内，按 $s=3t^2+1$ 作直线运动，则在 $2\leqslant t\leqslant 3$ 这段时间内的平均速度是(　　).

(A)4　　(B)13

(C)15　　(D)28

2. 函数 $y=f(x)$，自变量 x 由 x_0 改变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的改变量 Δy 为(　　).

(A)$f(x_0+\Delta x)$　　(B)$f(x_0)+\Delta x$

(C)$f(x_0)\cdot\Delta x$　　(D)$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

3. 一物体运动方程是 $s=2t^2$，则从 2 到 $(2+\Delta t)$ 这段时间内位移的增量 Δs 为(　　).

(A)8　　(B)$8+2\Delta t$

(C)$8\Delta t+2(\Delta t)^2$　　(D)$4\Delta t+2(\Delta t)^2$

4. 对于函数 $y=\frac{1}{x}$，当 $\Delta x=1$ 时，Δy 的值是(　　).

(A)1　　(B)-1

(C)0.1　　(D)不确定

5. 若一质点按规律 $s=8+t^2$ 运动，则在一小段时间[2,2.1]中相应的平均速度是(　　).

(A)4　　(B)4.1

(C)0.41　　(D)-1.1

6. 若 $f(x)=2x^2$ 图象上一点(1,2)及附近一点 $(1+\Delta x,2+\Delta y)$，则$\frac{\Delta y}{\Delta x}$等于(　　).

(A)4　　(B)$4x$

(C)$4+2\Delta x$　　(D)$4+2(\Delta x)^2$

7. 函数 $y=x^2-2x+3$ 在 2 到$\frac{9}{4}$之间的平均变化率为________.

8. 质点运动规律 $s=2t^2+1$，则在时间 $(1,1+\Delta t)$ 中，质点运动距离对时间的变化率为________.

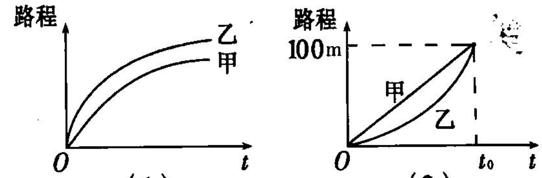
9. 函数 $y=x^2$ 在区间 $[1,\frac{4}{3}]$，$[2,\frac{7}{3}]$，$[\frac{8}{3},3]$ 的平均变化率分别记为 a,b,c，则 a,b,c 的大小关系是________________.

B 组

10. 甲、乙两人跑步路程与时间的关系以及百米赛跑路程和时间的关系分别如图(1)(2)，试问：

(1)根据图(1)判断甲、乙两人哪一个跑得快？

(2)甲、乙两人百米赛跑，问快到终点时，谁跑得较快？



(1)　　(2)

11. 试指出正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{6}]$ 和 $[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$ 的平均变化率哪一个较大.

拓展提高

1. 函数的平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，只能粗略地反映物体在一段时间内的变化情况，并不代表物体在每时每刻的运动情况.

2. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$的几何意义是两点 (x_0,y_0)，$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 连线的斜率. 学会用数形结合的思想去分析函数的平均变化率.

（编者：临沂三中　王平余）

§1.1.2　导数的概念

（第一课时）

学海导航

【知识要点】 1. 瞬时速度；2. 逼近思想在经历由平均速度到瞬时速度的体现.

【学习要求】 1. 通过实例分析，经历由平均变化率到瞬时变化率的过程；2. 体会从有限到无限的逼近思想.

学习探究

【要点分析】

1. 瞬时速度：我们把物体在某一时刻的速度称为瞬时速度（即时速度）.

2. 在研究物体在某一时刻的速度时，我们常用逼近思想，即当 $\Delta t\to 0$ 时，平均速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 趋向于某一常数 L，我们称常数 L 为该物体在该时刻的瞬时速度，记作：$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=L$.

3. 时间的改变量 $\Delta t\to 0$，是指 Δt 从 0 的左右两侧分别趋向于 0，但永远不会等于 0.

【例题分析】

例 1　一辆汽车按规律 $s=3t^2+1$ 作直线运动，求这辆车在 $t=3$ 秒时的瞬时速度（时间单位：秒，位移单位：米）.

分析：（一）利用逼近思想求解

要求这辆车在 $t=3$ 秒时的瞬时速度，我们可以计算在 $[3+\Delta t,3]$ 及 $[3,3+\Delta t]$（其中 $\Delta t>0$）这两个区间上的平均速度，然后分析当 $|\Delta t|\to 0$ 时，平均速度趋向于某一常数.

（二）先求出这辆汽车从 3 秒到 $(3+\Delta s)$ 秒这段时间内位移的增量 Δs，利用 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=L$ 求解.

自我测评

A 组

1. 物体作直线运动所经过的路程 s 可以表示为时间 t 的函数 $s=s(t)$，则物体在时间间隔 $[t_0,t_0+\Delta t]$ 内的平均速度为（　　）.

(A) $\bar{v}=\Delta s$

(B) $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$

(C) $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

(D) $\frac{\Delta t}{\Delta s}$ 的极限

2. 物体的运动方程是 $s=-4t^2+16t$，在某一时刻的速度为零，则相应时刻为（　　）.

(A) $t=1$　　(B) $t=2$

(C) $t=3$　　(D) $t=4$

3. 质点 M 按规律 $s=2t^2+3$ 作直线运动（位移单位：m，时间单位：s），则质点 M 在 $t=2$ 时瞬时速度是（　　）.

(A) 2　(B) 6　(C) 4　(D) 8

4. 质点的运动方程是 $s=s(t)=t^2+\frac{3}{t}$，则质点在时刻 $t=4$ 的瞬时速度和质点在 $[4,4.5]$ 这段时间内的平均速度为（　　）.

(A) $\frac{131}{16},\frac{25}{3}$　　(B) $\frac{125}{16},\frac{26}{3}$

(C) $\frac{125}{16},\frac{25}{3}$　　(D) $\frac{131}{16},\frac{26}{3}$

5. 运动方程为 $s=t^3$ 的物体，在时刻 $t=4$ 时的瞬时速度为________.

6. 某物体作匀速直线运动，其方程为 $s=vt+b$，则该物体在运动过程中其平均速度与任何时刻的瞬时速度的关系是________.

7. 一物体的运动方程为 $s=7t^2-13t+8$，则其在 $t=$________的瞬时速度为 1.

8. 若 $s=vt-\frac{1}{2}gt^2$. 求：

(1) 在 $t_1=1,t_2=1+\Delta t$ 之间的平均速度（设 $\Delta t=1,0.1,0.01$）；

(2) 在 $t=1$ 时的瞬时速度.

9. 一质点按规律 $s=2t^2+2t$(位移单位:米,时间单位:秒)作直线运动,求:(1)该质点在前 3 秒内的平均速度;(2)质点在 2 秒到 3 秒内的平均速度;(3)质点在 3 秒时的瞬时速度.

10. 质点运动规律是 $s=t+t^2$(位移单位:m,时间单位:s).(1)求在 $10\leqslant t\leqslant 10+\Delta t$ 时间内物体的平均速度.①$\Delta t=1$;②$\Delta t=0.1$;③$\Delta t=0.01$.

(2)当 $t=10$ 时,物体的速度是多少?

B 组

11. 某物体的运动速度与时间的关系为 $v(t)=2t^2-1$,求 $t=2$ 时的加速度.

(提示:加速度 a 即为 $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 在 $\Delta t\to 0$ 时的值)

12. 一物体运动方程为

$$s(t)=\begin{cases}3t^2+20 & (0\leqslant t<2),\\ 29+3(t-3)^2 & (t\geqslant 2),\end{cases}$$ 求此物体在 $t=1$ 和 $t=3$ 时的瞬时速度.

拓展提高

1. 如果物体的运动规律是 $s=s(t)$,那么,物体在时刻 t 的瞬时速度 v,就是物体在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内,当 $\Delta t\to 0$ 时,$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 趋向的某一常数,即 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$.

2. Δt,Δs 是一个整体,$(\Delta t)^2$ 不能写成 Δt^2.

(编者:临沂三中　王平余)

§1.1.2　导数的概念

（第二课时）

学海导航

【知识要点】 1. 函数的瞬时变化率；2. 导数的定义.

【学习要求】 1. 了解瞬时速度与瞬时变化率的关系，知道瞬时变化率即为导数；2. 掌握导数的定义，并体会导数的思想及其内涵.

学习探究

【要点分析】

1. 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 附近有定义，当自变量在 $x=x_0$ 附近改变 Δx 时，函数值相应地改变 .

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果当 Δx 趋近于 0 时，平均变化率 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 趋近于一个常数 L，则常数 L 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的瞬时变化率，记作：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=L.$$

2. 一般地，函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

我们称它为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

由 1、2 可知函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率即为 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$.

【例题分析】

例 1　求函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=1,2$ 处的瞬时变化率.

分析：函数 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=1,2$ 处的瞬间变化率，即为函数 $f(x)$ 在该处的导数，因此只须求 $f'(1)$，$f'(2)$ 便可 .

例 2　利用导数的定义，求出函数 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 的导数，并据此求函数在 $x=1$ 处的导数.

分析：利用导数的定义，结合求函数平均变化率的方法进行计算.

自我测评

A 组

1. 函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数可表示为 $y'|_{x=x_0}$，即（　　）.

(A) $f'(x_0)=f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)$

(B) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]$

(C) $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x}$

(D) $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

2. 如果函数 $y=f(x)$ 的瞬时变化率处处为 0，则下列函数可以满足本条件的是（　　）.

(A) $y=2x+3$

(B) $y=3x$

(C) $y=c$（c 为常数）

(D) $y=x^2+5$

3. 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有导数，则 $\lim\limits_{h\to a}\dfrac{f(h)-f(a)}{h-a}$ 为（　　）.

(A) $f(a)$　　(B) $f'(a)$

(C) $f'(h)$　　(D) $f(h)$

4. 已知函数 $f(x)=2x^2-1$ 图象上一点 $(1,1)$

及邻近一点$(1+\Delta x,1+\Delta y)$，则$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$等于(　　).

(A)4　　(B)$4x$

(C)$4+2\Delta x$　　(D)$4+2(\Delta x)^2$

5. 设函数$f(x)$在点x_0附近有定义，且有$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=a\Delta x+b(\Delta x)^2$($a,b$为常数)，则(　　).

(A)$f'(x)=a$　　(B)$f'(x)=b$

(C)$f'(x_0)=a$　　(D)$f'(x_0)=b$

6. 已知函数$y=x^3-1$，当$x=2$时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=$________.

7. 设函数$f(x)=x^2$，则$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$等于________.

8. 设函数$f(x)$在点x_0处可导且$f'(x_0)=1$，试求下列各极限的值.

(1)$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(2)$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

9. 竖直向上弹射一小球，小球的初速度为100m/s，那么小球何时速度为0？($g=9.8\text{m/s}^2$)

B组

10. 画出$y=|x|$的图象，计算在$-\dfrac{1}{3}$到0之间以及0到$\dfrac{1}{3}$之间的平均变化率，并讨论在$x=0$处的瞬时变化率.

拓展提高

在$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$这个表达式中，我们研究的是两个变量$\Delta y$与$\Delta x$的比值变化的情况，尽管$\Delta x$、$\Delta y$变化中都趋近于0，但若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，我们便说函数$y=f(x)$在点$x_0$处有导数，否则就说导数不存在(如B组第10题).

(编者：临沂三中　王平余)

§1.1.3　导数的几何意义

（第一课时）

学海导航

【知识要点】 1. 曲线切线的定义;2. 导数的几何意义.

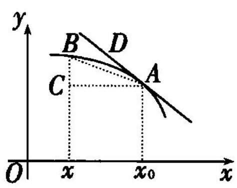
【学习要求】 1. 进一步了解导数产生的背景;2. 掌握曲线切线的概念,理解切线的斜率的含义和求法;3. 通过对曲线的切线形成过程的分析,帮助学生理解数学概念的发生定义方式,认识数学推理的严密性和科学性.

学习探究

【要点分析】

1. 设函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示:AB 是过点 $A(x_0,f(x_0))$ 与点 $B(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$ 的一条割线,此割线的斜率是:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$



可见曲线割线的斜率就是函数的平均变化率,当点 B 沿曲线趋近于点 A 时,割线 AB 绕点 A 转动,直到 AD 这一位置,这条直线 AD 叫做曲线在点 A 处的切线,于是,当 $\Delta x\to 0$ 时,割线 AB 的斜率趋向于过点 A 的切线 AD 的斜率,即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\text{切线 }AD\text{ 的斜率}.$$

2. 由导数的几何意义可知,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线的斜率等于 $f'(x_0)$.

【例题分析】

例 1　求曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线的斜率.

分析:因为点 $(1,1)$ 在曲线 $y=x^2$ 上,故过该点的切线斜率即为 $y'|_{x=1}$.

例 2　求曲线 $y=2x-x^3$ 在 $(-1,-1)$ 处切线的倾斜角.

分析:先求曲线 $y=2x-x^3$ 在点 $(-1,-1)$ 处的斜率 k,然后利用 $k=\tan\alpha$ 求直线的倾斜角.

例 3　求抛物线 $y=x^2$ 在哪一点处的切线平行于直线 $y=4x-5$.

分析:由于函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,先求其导函数(或令在 $P(x_0,y_0)$ 处的导数为 4),解方程即可.

自我测评

A 组

1. 下列命题：

①与曲线只有一个交点的直线是曲线的一条切线；

②与封闭曲线只有一个交点的直线叫曲线的切线；

③切线是割线的一交点趋近于另一个交点的极限位置；

④函数在一点处的导数 $f'(x_0)$ 是一个常数，不是变量.

其中正确的个数是(　　).

(A)1 个　　(B)2 个

(C)3 个　　(D)4 个

2. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是(　　).

(A)在点 x_0 处的斜率

(B)在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与 x 轴所夹的锐角的正切值

(C)曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率

(D)点 $(x_0,f(x_0))$ 与点 $(0,0)$ 连线的斜率

3. 下列说法正确的是(　　).

(A)若 $f'(x_0)$ 不存在，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处无切线

(B)若 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处有切线，则 $f'(x_0)$ 必存在

(C)若 $f'(x_0)$ 不存在，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率不存在

(D)若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率不存在，则曲线在该点处就没有切线

4. 函数 $y=1-x^3$ 在 $x=0$ 处的导数值为(　　).

(A)0　(B)1　(C) -2　(D) -1

5. 曲线 $y=x^3$ 在点 P 处的切线斜率 $k=3$，则 P 点坐标是(　　).

(A) $(1,1)$

(B) $(-1,-1)$

(C) $(1,1),(-1,-1)$

(D) $(2,8),(-2,-8)$

6. 设 $f(x)$ 有导数且下列各极限存在，则不正确的是(　　).

(A) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$

(B) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$

(C) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$

(D) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=f'(1)$

7. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象在 $M(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y=\dfrac{1}{2}x+2$，$f(1)+f'(1)=$________.

8. 函数 $y=f(x)$ 的图象上一点 $P(x_0,y_0)$，若 $f'(x_0)<0$ 说明在 P 点附近，函数 $f(x)$________.(单调递增，单调递减)

9. 已知曲线 $y=x^3+3x$ 在点 P 的切线与直线 $y=15x+3$ 平行，求 P 点坐标.

B 组

10. 在抛物线 $y=x^2$ 上求一点，使过此点的切线：(1)平行于直线 $y=4x-15$；(2)垂直于直线 $2x-6y+5=0$；(3)与 x 轴正方向成 135°的角.

拓展提高

1. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处导数的几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率；

2. 导数的物理意义：若物体运动方程 $s=s(t)$，在点 $P(t_0,s(t_0))$ 处的导数就是该点处的速度.

3. 用导数的定义求导时应注意 $f'(x_0)$ 的另外一种形式 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

(编者：临沂三中　王平余)

§1.1.3　导数的几何意义

(第二课时)

学海导航

【知识要点】 1. 曲线的切线方程;2. 导函数的定义.

【学习要求】 1. 结合导数的几何意义,会求曲线 $y=f(x)$ 在某点处的切线方程;2. 理解并掌握导函数的定义.

学习探究

【要点分析】

1. 过曲线 $y=f(x)$ 上一点 $P(x_0,f(x_0))$ 的切线的斜率 $k=f'(x_0)$,切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

2. 若对于函数 $y=f(x)$ 定义域内每一个自变量的值 x,都对应一个确定的导数值 $f'(x)$,则在 $f(x)$ 定义域内,$f'(x)$ 构成一个新的函数,这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的导函数,记作 $f'(x)$ 或 y'(或 y'_x),即

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

导函数通常简称为导数. 如果不特别指明求某一点的导数,那么求导数就是指求导函数.

【例题分析】

例 1　求双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $(2,\frac{1}{2})$ 处的切线方程.

分析:因为点 $(2,\frac{1}{2})$ 在曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上,故只需先求出 $y'|_{x=2}$,然后代入 $y-\frac{1}{2}=y'|_{x=2}(x-2)$ 便可.

例 2　试求过点 $P(3,5)$ 且与曲线 $y=x^2$ 相切的直线方程.

分析:先通过待定系数法求出切点的坐标,再按求切线方程的一般步骤求出切线方程.

与求曲线上在点 P 处的切线有区别:在点 P 处的切线,点 P 必为切点;求过点 P 的切线,点 P 未必是切点. 应注意概念有区别,其求法也有所不同.

自我测评

A 组

1. 曲线 $y=2x^2+1$ 在点 $P(-1,3)$ 处的切线方程为(　　).

(A) $y=-4x-1$

(B) $y=-4x-7$

(C) $y=4x-1$

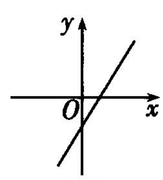
(D) $y=4x-7$

2. 如果曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $x+2y-3=0$,那么(　　).

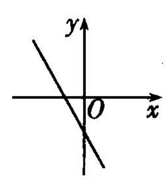
(A) $f'(x_0)>0$　　(B) $f'(x_0)<0$

(C) $f'(x_0)=0$　　(D) $f'(x_0)$ 不存在

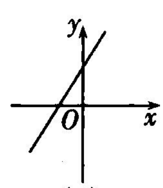
3. 若函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 的图象的顶点在第四象限,则函数 $f'(x)$ 的图象是(　　).



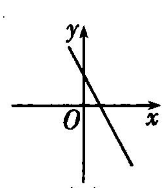
(A)



(B)



(C)

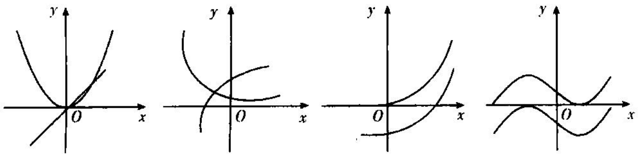


(D)

4. 已知函数$f(x)=ax^2+c$,且$f'(1)=2$,则a的值为(　　).

(A)1　(B)$\sqrt{2}$　(C)-1　(D)0

5. 设$f'(x)$是函数$f(x)$的导函数,将$y=f(x)$和$y=f'(x)$的图象画在同一个直角坐标系中,不可能正确的是(　　).



(A)　(B)　(C)　(D)

6. 设$f(x)$为可导函数,且满足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{x}=-1$,则曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线的斜率是(　　).

(A)2　(B)-1　(C)$\dfrac{1}{2}$　(D)-2

7. 若曲线$y=x^3-2x+a$与直线$y=3x+1$相切,则常数$a=$________.

8. 曲线$y=x^2-2x+3$在点$A(-1,6)$处的切线方程是________.

B组

9. 求抛物线$y=\dfrac{1}{4}x^2$过点$(4,\dfrac{7}{4})$的切线方程.(注意此点不在抛物线上)

10. 已知曲线$y=x^3-2x$和其上一点,这点的横坐标为2,求过该点的切线方程.

拓展提高

1. 在学习过程中注意$f'(x_0)$与$f'(x)$的区别与联系:

$y=f'(x)$为函数$y=f(x)$的导函数,而$f'(x_0)$为在$x=x_0$处的导数,而$f'(x_0)$为$f'(x)$在$x=x_0$处的函数值,也就是说点$(x_0,f'(x_0))$是导函数$y=f'(x)$上的一个点.

2. 对于导函数的定义的几种形式表示如下:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x+\Delta x)}{-\Delta x},$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}.$$

(编者:临沂三中　王平余)

§1.2.1　几个常用函数的导数

学海导航

【知识要点】　函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$的导数.

【学习要求】　1. 能根据导数定义求几个常用函数的导数；2. 利用图象进一步理解导数的几何意义.

学习探究

【要点分析】

1. 常数函数 $y=f(x)=c$，则 $y'=0$，说明函数 $f(x)=c$ 在其图象上的每一点的变化率为 0.

2. 函数 $y=kx(k\neq0)$ 的导数 $y'=k$，即函数 $y=kx$ 在其图象上每一点的变化率为 k，亦即正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 增长的快慢只与 x 的系数有关.

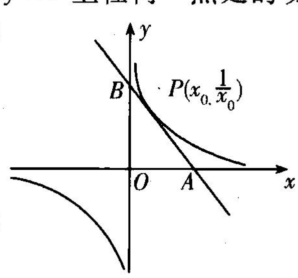
3. 函数 $y=x^2$ 的导数 $y'=2x$，在 $x<0$ 时，$y'<0$，图象有下降趋势；在 $x>0$ 时，$y'>0$，图象有上升趋势.

4. 函数 $y=\frac{1}{x}$的导数 $y'=-\frac{1}{x^2}<0$ 恒成立，说明其图象在 $x<0$ 及 $x>0$ 上都有下降趋势.

【例题分析】

例 1　利用导数的定义，求 $y=x^3$ 的导数 y'.

例 2　求证：双曲线 $xy=1$ 上任何一点处的切线与坐标轴构成的三角形面积为常数.



分析：双曲线 $xy=1$ 的图象即反比例函数 $y=\frac{1}{x}$的图象. 设图象上任意一点 $P(x_0,y_0)$，则可求出过点 P 的切线 l 的方程，从而求出切线 l 与坐标轴的交点 A、B，从而可求出三角形面积.

自我测评

A 组

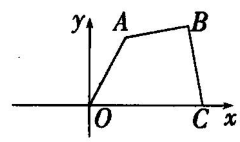
1. 函数$f(x)=-10$ 的导数是(　　).

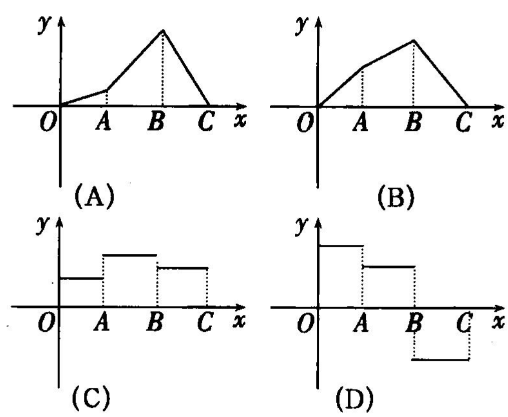
(A)0　　(B)负数
(C)正数　　(D)不确定

2. 在曲线 $y=x^2$ 上切线的倾斜角为$\frac{3\pi}{4}$的点是(　　).

(A)$(\frac{\pi}{8},\frac{\pi^2}{8})$　　(B)$(2,4)$
(C)$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$　　(D)$(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

3. 物体运动的图象(时间 x，位移 y)如右图所示，则其导函数图象为(　　).





4. $y=\frac{1}{x}$在点 $A(1,1)$处切线方程为(　　).

(A)$x+y-2=0$　　(B)$x-y+2=0$
(C)$x+y+2=0$　　(D)$x-y-2=0$

5. 曲线 $y=x^3$ 上过点 $M(2,8)$的切线与坐标轴围成的三角形面积是________.

6. 质点运动方程为 $s=t^2$，则质点在 $t=3.03$ 时的速度为________.

7. 已知曲线 $y=\sqrt{x}$ 上一点 $P(1,1)$.

(1)求过点 P 的切线的斜率；

(2)求过 P 点的切线方程.

8. 根据导数定义，求下列函数的导数.

(1) $y=2x^2-x$；

(2) $y=x+\frac{1}{x}$.

9. 求曲线 $y=x^3$ 在点 $(-1,-1)$ 处的切线的方程.

B组

10. 一质点沿一纵坐标轴（s 轴）运动（轴垂直向上方向为正向），在时刻 t(s)，质点的位置 $s=6t-t^2$ (m)

(1)求 $t=0,2,3,6,7$ 时质点的位置，当 s 取负值时意味着什么？

(2)求瞬时速度 v(m/s)在时刻 t 的表达式；

(3)什么时刻开始改变运动的方向？

拓展提高

1. 利用定义求导数可分三步：

(1)求 Δy；

(2)求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$；

(3)取极限求导数 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. 由定义求出的常用函数导数，可作为公式直接使用.

（编者：临沂三中　王平余）