高等數学講义

数學物理方程

（初　稿）

高等数学教授会 編

中国人民解放軍軍事工程学院

一九五八年六月

目　录

第八篇　数学物理方程引論

第四十八章　振动問題

第四十九章　振动方程的解法

第五十章　热傳导方程

第五十一章　热傳导方程的各种边界值問題的解法

第五十二章　拉普拉斯方程与調和函数

第八篇

數学物理方程引論

第四十八章

振动問題

§209. 弦的微小横振动

1. **引言** 数学物理方程是指物理問題或技术問題上所引出的微分方程，这些微分方程在大多数情况下都是屬于綫性二級偏微分方程尤其常系数綫性二級偏微分方程，这类方程的一般积分或完全积分以及奇異积分的解法已在前一篇作了初步的敍述，但在物理問題或工程技术問題中，不仅要引导出偏微分方程而且問題本身也同时規定了条件（初始条件与边界条件等等），我們所要寻求的不是方程的一般解而是那些满足条件的特殊解，我們說过：在偏微分方程的情形下，寻找那些满足条件的特殊解往往不是从方程的一般解中去找，而是通过特殊的技巧来寻找的。

限于篇幅，我們在这一篇里只集中于几个物理問題来講，敍述过程大体上分为下列几个步驟：

1° 怎样从物理問題引出数学方程的建立以及条件的規定？

2° 怎样去寻求满足条件的特殊解？

3° 寻找出来的解是否由方程本身及条件来一意地确定？

4° 解的物理意义？

一般說来，每一章的敍述都是按着上述步驟进行，我們先講弦的振动問題

2。 弦的微小横振动問題，基本假設

設想有一条纖細柔輭而有彈性的弦，其長度为 l，它的兩端固定着并且拉得笔直的(例如設想为胡琴的弦)，如我們輕輕地把弦彈动一下，弦就顫动起来，現在我們要研究它的振动的規律。

首先，我們应对这些形容詞"纖細柔輭而有彈性"等等要加以解釋，所謂"纖細的弦"是指我們仅仅考慮弦的長度而忽略它的粗厚的程度，或者換个說法，我們不考慮它的横截面面积，所謂"柔輭而具有彈性"是指弦在弯曲时，在弦上要发生張力而張力的方向总是沿着弦的瞬时側影的切綫方向，大小与弦的延長成正比（当然指在彈性限度以内）。

为使問題簡單化起見，对弦的振动須要加上一些假設（当然这些假設要与实际現象符合或相近似！）

1° 假設弦在平面上振动，为說明清楚起見，設在振动所发生的平面上（在瞬时 t 的时刻）引进一組直角坐标系 (x, u)，其中 u 軸方向就是弦的位移方向而 x 軸沿弦开始位置的方向，我們假設位移的方向垂直于 x 軸；換句話說，在 $t=0$ 时刻（开始平衡位置的时刻）弦上某点位置与在时刻 t（經过振动后）弦上同一

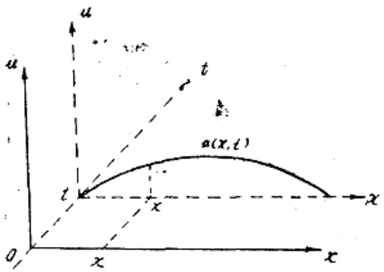

图 1

点位置的x坐标没有改变，弦上点在瞬时t的位置可用函数$u(x,t)$来表示，u 称做振幅，这样的振动称做横振动。

2° 假設弦的振幅与單位長比較起来是非常之小，因此，如用α表示弦上某点处的切綫与x軸的夹角，则$|\alpha|$很小，显然

$$tg\,\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}$$

因此，所謂“微小的横振动”就是指$\frac{\partial u}{\partial x}$的絕对値很小，因而在討論中我們常常忽略$u_x$的高于一次的冪不計，这样，則有

$$sin\,\alpha=\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\approx u_x;\qquad cos\,\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\approx 1。$$

3° 弦的振动常常是由外力而引起的，用$f(x,t)$表示單位長度上所施加的外力，簡称外力密度，假設外力的方向平行于振动的方向，也就是説，平行于u軸的方向，此外，假設$f(x,t)$是x与t的連續函数，就是說，外力是連續地分布在弦的各点上而且随着时間而連續地施用。

4° 最后假定弦的質量也是連續地分布；換句話說，它的密度$\mu(x)$是x的連續函数，很明显，密度$\mu(x)$不随时間而改变。

3。 張力不依賴于时間及 x

在前段的假設上我們要証明下面一个断語：**当弦发生微小横振动时，弦上所产生的張力是一常量**，令T表弦上所产生的張力，一般說来，T应該是x与t的函数：

$$T=T(x,t),$$

現在計算弦上一段(x_1,x_2)的伸長，在时刻t时，弦上介于x_1与x_2之間的一段弧長$S(t)$是

$$S(t)=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+u_x^2}\,dx\approx\int_{x_1}^{x_2}dx=x_2-x_1=S(0),$$

这表示当弦的振动很小时，在振动过程中弧段的伸長可以忽略不

計，因而依据胡克定律，弦上每点处的張力T的数值不随时間而改变。

我們再証，張力T也不依賴于点的坐标x。为此，把張力T沿x軸与u軸分解，分力分别記做T_x与T_u（注意，这里T_x或T_u并非指T对x或u的偏导数），那末

$$T_x(x)=T(x)\cos\alpha=\frac{T}{\sqrt{1+u_x^2}}\approx T(x),$$

$$T_u(x)=T(x)\sin\alpha=\frac{Tu_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\approx T(x)u_x,$$

在弦段(x_1,x_2)上作用的有張力，外力与慣性力，因为我們只假設弦仅发生横振动，所有这些力在x軸上的射影之和应等于零，但由于位移u与外力密度f都平行于u軸，所以慣性力也平行于u軸，因此，在弦段(x_1, x_2)上作用的張力在x軸上的射影必为零，这就是說。

$$T_x(x_2)-T_x(x_1)=0,\quad \text{或}\quad T(x_2)=T(x_1),$$

这表示$T(x)$不依賴于x。所以我們得出結論：**弦作微小横振动时，弦上所发生的張力T永远是一常量**

4. 弦的横振动方程

現在我們要推导弦的横振动方程，就是說要寻求函数$u(x,t)$所应滿足的方程，我們依据牛頓第二定律，这个定律說：在运动过程中，运动量的改变量等于使运动产生的作用力的冲量*)。

考虑弦的一段弧(x_1,x_2)，弧段(x_1,x_2)的运动量沿u軸的支量是

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi,t)\mu(\xi)d\xi,$$

該运动量在时刻$\Delta t=t_2-t_1$內的改变量是

---

* 如作用力是$F(t)$，我們定义$\int_{t_1}^{t_2}F(t)d\tau$为时間$(t_1,t_2)$內的冲量。

$$\int_{x_1}^{x_2}\mu(\xi)\{u_t(\xi,t_2)-u_t(\xi,t_1)\}d\xi,$$

依据牛頓第二定律：它应等于作用于弧段 (x_1,x_2) 上的張力冲量与外力冲量在u 軸方向上支量之和，張力沿 u軸方向冲量的支量是

$$\int_{t_1}^{t_2}T\{u_x(x_2,\tau)-u_x(x_1,\tau)\}d\tau,$$

而沿u 軸的外力冲量是

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

因此，依据牛頓第二定律

$$(1)\qquad \int_{x_1}^{x_2}\{u_t(\xi,t_2)-u_t(\xi,t_1)\}\mu(\xi)d\xi=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}T\ \{u_x(x_2,\tau)-u_x(x_1,\tau)\}\ d\tau+\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2}f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

这就是振幅函数 $u(x,t)$ 所应滿足的"积微分方程"为要得到微分方程，我們应用积分中值定理与拉格朗日中值定理，但这还需要假設：

5° $u(x,t)$ 有直到二級的連續偏导数，于是將方程(1)应用兩次中值定理，得到

$$u_{tt}(\xi^*,t^*)\mu(\xi^*)\Delta t\,\Delta x=$$
$$=\{T(u_{xx}(\xi^{**},t^{**}))+f(\xi^{***},t^{***})\}\Delta x\Delta t,$$

其中 $\Delta x=x_2-x_1$，$\Delta t=t_2-t_1$ 并且

$$x_1<\xi^*,\xi^{**},\xi^{***}<x_2,\quad t_1<t^*,t^{**},t^{***}<t_2,$$

約去 $\Delta x\Delta t$ 幷令 $x_2\to x_1$，$t_2\to t_1$，取极限后就得

$$u_{tt}(x_1,t_1)\mu(x_1)=Tu_{xx}(x_1,t_1)+f(x_1,t_1),$$

去掉添号"1"便得弦的横振动方程

$$(2)\qquad \boxed{Tu_{xx}=\mu u_{tt}-f(x,t)}\quad (0<x<l,\ 0<t<+\infty)$$

如果μ 是一常量（郎質量是均匀分布的），用μ 遍除方程（2）幷令

$$(3)\qquad a=\sqrt{\frac{T}{\mu}},\quad F(x,t)=\frac{f(x,t)}{\mu},$$

則（2）变为

$$(4)\qquad \boxed{u_{tt}=a^2u_{xx}+F(x,t)}\quad (0<x<l,\ 0<t<+\infty),$$

$F(x,t)$ 是对于單位質量上施加的外力密度，在沒有外力时，弦也会有自发的振动現象，这时方程（4）变为齐次綫性方程

$$(5)\qquad \boxed{u_{tt}=a^2u_{xx}}\quad (0<x<l,\ 0<t<+\infty),$$

由于外力而产生的振动称做强迫振动，沒有外力而产生的自发的振动称做自由振动。

***5. 在弦的某点上施加集中的力的情形**

設在弦上某点(x_0)处施加集中的力 $f_0(t)$，其方向仍与u 軸平行(見图2)，其中$0<x_0<l$，而在其它地方不施加任何外力，于是方程(1)可以写做

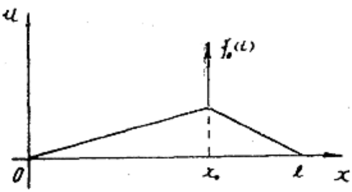

图 2

$$\int_{x_1}^{x_2}\mu(\xi)\{u_t(\xi,t_2)-u_t(\xi,t_1)\}\,d\xi=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}T\{u_x(x_2,\tau)-u_x(x_1,\tau)\}d\tau+\int_{t_1}^{t_2}f_0(\tau)d\tau,\quad (x_1<x_0<x_2)$$

由于弦上各点的速度是有界的，当 $x_1\to x_0-0$，$x_2\to x_0+0$ 时，上面等式左端趋于零，因此，就得

$$(6)\qquad \int_{t_1}^{t_2}T\{u_x(x_0+0,\tau)-u_x(x_0-0,\tau)\}d\tau=$$

$$=-\int_{t_1}^{t_2}f_0(\tau)d\tau_{\circ}$$

利用积分中值定理并且消去两端 Δt 然后令 $t_2\to t_1$ 而取极限：

$$(7)\qquad u_x(x,t)\Big|_{x_0-0}^{x_0+0}=-\frac{1}{T}f_0(t),$$

这里我們去掉 t_1 的添号“1”由此可見，在集中力的作用处，$u_x(x,t)$ 有了間断点，这时微分方程（2）便失去了意义，在这点上 $u(x,t)$ 应該滿足如下兩个条件

$$(8)\qquad \boxed{\begin{aligned}&u(x_0+0,t)=u(x_0-0,t),\\&u_x(x_0+0,t)-u_x(x_0-0,t)=-\frac{1}{T}f_0(t)\end{aligned}}$$

第一等式表示弦在 x_0 处沒有断掉而第二等式表示弦在 x_0 处的方向突然轉折，这个轉折程度是与 $f_0(t)$ 与張力 T 有关的。

***6. 弦振动的能量**

弦作横振动时能量表达式是 $E=K+U$，其中 K 是动能，U 是位能，先求动能 K. 考虑一段弧 $(x,x+dx)$，速度是 $u_t(x,t)$。动能为

$$dK=\frac{1}{2}\mu(x)dx\cdot(u_t)^2,$$

因此，全弦的动能等于

$$K=\frac{1}{2}\int_0^l \mu(x)[u_t(x,t)]^2dx.$$

次求位能。令 $t=t_0$ 时弦具有形狀 $u=u(x,t_0)=u_0(x)$，开始位置时的形狀假設是 $u(x,0)=0$，在位置 $u_0(x)$ 的勢就是由开始平衡位置轉移到 $u_0(x)$ 的位置时所做的功，我們仍先考慮弦的一段弧元素 $(x,x+dx)$，在这段上沿 u 軸的張力支量是

$$Tu_x(x+dx,t)-Tu_x(x,t)$$

依据拉格朗日定理，

$$T\{u_x(x+dx,t)-u_x(x,t)\}=u_{xx}(x+\theta dx,t)dx\cdot T\approx Tu_{xx}(x,t)dx.$$

在这張力的作用下，弦在 dt 时間內移动的距离（也是沿 u 軸方向）是 $u_t dt$ 因此，在时間間隔 dt 內弦所做的功是

$$\left\{\int_0^l Tu_{xx}(x,t)u_t dx\right\}dt=\left\{Tu_xu_t\Big|_0^l-\int_0^l Tu_xu_{xt}dx\right\}dt$$

$$=\left\{-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l T(u_x)^2dx+Tu_xu_t\Big|_0^l\right\}dt$$

因此，从时刻 $t=0$ 到时刻 $t=t_0$ 这一段时間內所做的功是

$$-\frac{1}{2}\int_0^l T(u_x)^2dx\Big|_0^{t_0}+\int_0^{t_0} Tu_x u_t\Big|_0^l dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^l T\{u_x(x,t_0)\}^2dx+\int_0^{t_0} T\,u_xu_t\Big|_0^l dt$$

其中注意在左端第一个积分取下限 $t=0$ 时，

$$-\frac{1}{2}\int_0^l T\{u_x(x,0)\}^2dx=0$$（因为 $u(x,0)=0$从而 $u_x(x,0)=0$）。

上式右端最后一个积分可以写成

$$\int_0^{t_0} T\{u_x(l,t)u_t(l,t)-u_x(0,t)u_t(0,t)\}dt.$$

$u_t(l,t)dt$ 表示端点 $x=l$ 在 dt 时間内所走的距离

故
$$\int_0^{t_0} T\,u_x(l,t)u_t(l,t)dt$$

表示端点 $x=l$ 在張力作用下所做的功，但由于我們假設了端点 $x=l$是固定着，它应等于零（或者直接由 $u_t(l,t)=0$ 的事实看出做功为０），同样，端点 $x=0$ 的做功也为零，故若弦的兩端固定，则从时刻 $t=0$ 到时刻 $t=t_0$ 弦所做的功是

$$-\frac{1}{2}\int_0^l T\{u_x(x,t_0)\}^2dx.$$

它的負值就表弦在 $t=t_0$ 时刻的位能 U. 因此在 $t=t_0$ 时，弦的总能量是（假設兩端点固定）

$$\boxed{E=K+U=\frac{1}{2}\int_0^l\{\mu(x)(u_t(x,t_0))^2+T(u_x(x,t_0))^2\}dx.} \tag{9}$$

§210. 边界值条件与初始值条件

1. 边界值条件与初始值条件

在物理現象的过程中常常伴随着一些附加条件，例如在考虑弦的振动問題时，假定它的兩端固定住，这意味着

$$u(0,t)=0,\qquad u(l,t)=0, \tag{1}$$

不管 t 等于多少；又如假設弦在开始时形狀是一段直綫，这意味着：在开始时刻 $t=0$ 时

（2）　　$$u(x,0)=0$$

(1)与(2)就是問題的附加条件，前者称做边界值条件，而后者称做初始值条件，这些附加条件都是由問題的性質規定的，值得惊奇的是：这些附加条件往往能夠足以确定問題唯一的解，从純數学的观点来說：附加条件是否足以确定問題的唯一解， 一般說来，事先是不能予知的，但我們能夠給予數学的証明，这种事实以后我們都称之为唯一性定理。

因此，用數学来描述物理过程时，首先必須列出足以唯一地确定物理过程的条件。

例如在二級常微分方程的情形下，方程的解可以用初始条件来确定，初始条件就是与自变量的初始值相对应的函數以及它的一級导函數的已給值，其它形式的附加条件也常遇到，例如在悬鏈問題（第　章　例　）給出函數在兩点的值，同样对于偏微分方程也有各种各样的附加条件，就弦的振动为例，我們有下列各种的附加条件。

1°　弦的兩端固定，这意味着条件（1）成立，又設在初始时刻 $t=t_0$ 弦的形狀及速度都已給定：

（3）　　$$\begin{cases} u(x,t_0)=\varphi(x), \\ u_t(x,t_0)=\psi(x), \end{cases}$$

这称做初始值条件，（2）就是（3）的一种特例情形，

2°　弦的兩端按已給規律运动，就是說

（4）　　$$\begin{cases} u(0,t)=\mu_1(t), \\ u(l,t)=\mu_2(t)。 \end{cases}$$

其中 $\mu_1(t)$，$\mu_2(t)$ 都是 t 的已知函數，这是边界值条件的另一种形式，

3°　彈簧振动問題，譬如彈簧振动时，假設一端固定，另一端自由运动，設端点 $x=0$ 固定，这意味着