

高等数学讲义

数学物理方程

(初稿)

高等数学教授会 編

中国人民解放军军事工程学院

一九五八年六月

目 录

第八篇 数学物理方程引論

第四十八章 振动問題

§ 209. 弦的微小横振动	7
1. 引言	7
2. 弦的微小横振动問題基本假設	7
3. 張力不依賴于時間及 x	9
4. 弦的横振动方程	10
*5. 在弦的某点上施加集中的力的情形	12
*6. 弦振动的能量	13
§ 210. 边界值条件与初始值条件	15
1. 边界值条件与初始值条件	15
2. 三种基本类型的边界值条件	18
*3. 极限情形	19
§ 211. 唯一性定理	20
1. 唯一性定理的意义	20
2. 第一边界值問題的解的唯一性	21
*3. 第二及第三边界值問題的解的唯一性	23
习题	24

第四十九章 振动方程的解法

§ 212. 傳播法 (达朗貝尔法)	26
1. 无界弦的振动問題	26
*2. 解 (7) 的物理意义	27

3. 举例	30
4. 半有界弦的振动問題	33
5. 举例	37
6. 半有界弦的振动 ...但一端按給定的規律运动.....	39
*7. 有界弦的振动問題	42
*8. 振动的积分方程	46
*9. 积分方程(28)的应用及举例	49
*10. 解的稳定性	54
习题	57
§ 213. 分离变量法(福里哀法)	60
1. 自由振动問題	60
2. 解(15)的物理意义	65
*3. 疊合原理的証明	69
*4. 福里哀法与达朗貝尔法的比較	74
5. 非齐次方程...弦的强迫振动問題	75
*6. 函数 $G(x, \xi, t-\tau)$ 的物理意义	78
7. 有界弦的一般的第一边界值問題	80
*8. 稳定的非齐次边界值問題	81
*9. 举例	82
习题	102

第五十章 热傳导方程

§ 214. 热傳导方程	115
1. 引言	115
2. 热傳导的綫性問題	115
3. 初始值条件与边界值条件	121
§*215. 最大值原理	125
*1. 最大值原理	125
*2. 第一边界值問題的解的唯一性:	129
*3. 最大值原理的一些推論, 稳定性定理	130
*4. 无穷軸軸上热傳导問題的解的唯一性	131

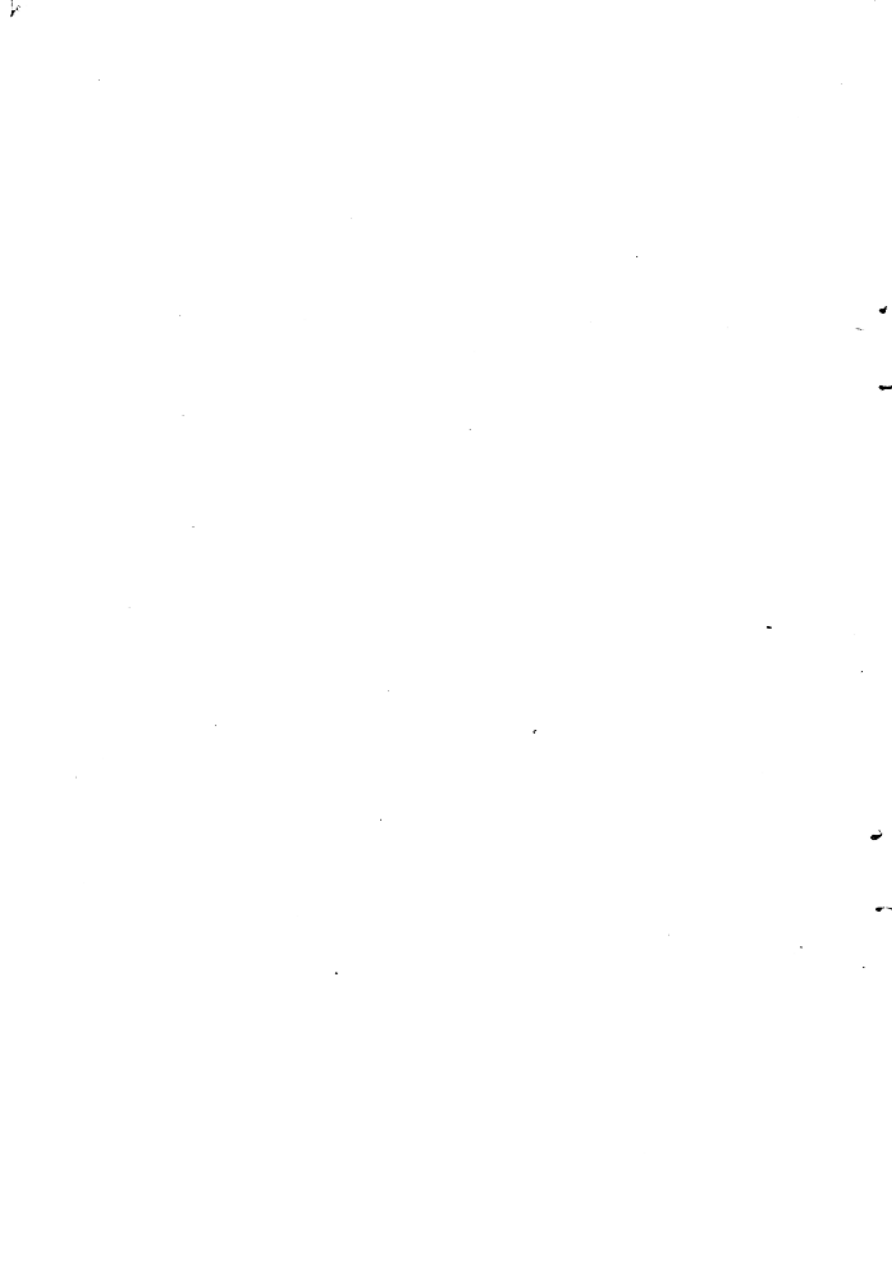
第五十一章 热传导方程的各种边界值问题的解法

§ 216. 无穷轴上的热传导问题	134
1. 无穷轴上热传导问题	134
*2. 公式 (7) 是问题的解的证明	136
*3. 源函数 $G(x, t, \xi)$ 及其物理意义	141
§ 217. 半有界轴上热传导问题	143
1. 半有界轴上热传导问题, 第一种边界值问题	143
2. 一端是绝热的情形, 第二种边界值问题	146
§ 218. 有界轴上热传导问题	148
1. 第一种边界值问题	148
*2. 第三种边界值问题	152
*3. 问题Ⅰ的解法	153
*4. 问题Ⅱ的解法程序	154
*5. 问题Ⅲ的解法	155
*6. 问题Ⅳ的解法	160
§ 219. 没有初始条件的热传导问题	162
1. 没有初始条件的热传导问题	162
2. 半有界轴的第一种边界值问题而不带初始条件	162
3. 有界轴上没有初始条件的热传导问题	164
§ 220. 热传导问题举例	167
1. 解题程序	167
2. 举例	169
习题	188
*§ 221. 带有变量 t 的第一种边界值问题 (杜赫美原理)	196
*1. 引言	196
*2. 半有界轴上的边界值问题	197
*3. 杜赫美原理	202
*4. 杜赫美原理的应用举例	203
习题	210

第五十二章 拉普拉斯方程与調和函数

§ 222. 方程的背景, 应用問題举例	214
1. 稳定热場	214
2. 液体的势流与稳定电流及静电場的势	215
3. 在几种标准的直交曲綫坐标系下的拉普拉斯方程	217
4. 空間与平面拉普拉斯方程的基本解	219
5. 凱尔文变换	220
*§223. 調和函数的一般性質	225
*1. 引言	225
*2. 格林第三公式	225
*3. 調和函数的一些基本性質	231
*§224. 边界值問題解的唯一性与稳定性	236
*1. 第一种边界值問題的解的唯一性与稳定性	236
*2. 带有間断的边界条件的問題	237
*3. 孤立奇異点	239
*4. 調和函数在无穷远点的正則性	241
*5. 外边界值問題	244
*§225. 第二种边界值問題的解的唯一性	249
*1. 有界域的情形	249
*2. 无穷区域的情形	251
§ 226. 最簡單区域的边界值問題的解法	256
1. 圓域的第一种边界值問題的解法	256
*2. 疊合原理的証明	261
3. 卜阿桑积分	264
*4. $\varphi(\theta)$ 只是連續的情形	265
*5. $\varphi(\theta)$ 逐段連續的情形	267
§ 227. 空間球域內或外边界值問題的解法	270
1. 第一种边界值問題(即迪里赫勒問題)在球域內部的解法	270
*2. 卜阿桑积分与解的証明	275

习题	279
§ 228. 源函数 (或称格林函数)	280
1. 拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$ 的源函数	280
2. 一些最简单区域的源函数的求法	283
习题	290
3. 举例	290
习题	303



第 八 篇

数学物理方程引論

第四十八章

振 动 問 題

§209. 弦的微小横振动

1. 引言 数学物理方程是指物理問題或技术問題上所引出的微分方程，这些微分方程在大多数情况下都是属于綫性二級偏微分方程尤其常系数綫性二級偏微分方程，这类方程的一般积分或完全积分以及奇異积分的解法已在上一篇作了初步的敘述，但在物理問題或工程技术問題中，不仅要引导出偏微分方程而且問題本身也同时規定了条件（初始条件与边界条件等等），我們所要寻求的不是方程的一般解而是那些满足条件的特殊解，我們說过：在偏微分方程的情形下，寻找那些满足条件的特殊解往往不是从方程的一般解中去找，而是通过特殊的技巧来寻找的。

限于篇幅，我們在这一篇里只集中于几个物理問題来講，敘述过程大体上分为下列几个步骤：

- 1° 怎样从物理問題引出数学方程的建立以及条件的規定？
- 2° 怎样去寻求满足条件的特殊解？
- 3° 寻找出来的解是否由方程本身及条件来一意地确定？
- 4° 解的物理意义？

一般說來，每一章的敘述都是按着上述步驟進行，我們先講弦的振動問題

2. 弦的微小橫振動問題，基本假設

設想有一條纖細柔順而有彈性的弦，其長度為 l ，它的兩端固定着并且拉得筆直的（例如設想為胡琴的弦），如我們輕輕地把弦彈動一下，弦就顫動起來，現在我們要研究它的振動的規律。

首先，我們應對這些形容詞“纖細柔順而有彈性”等等要加以解釋，所謂“纖細的弦”是指我們僅僅考慮弦的長度而忽略它的粗厚的程度，或者換個說法，我們不考慮它的橫截面面積，所謂“柔順而具有彈性”是指弦在彎曲時，在弦上要發生張力而張力的方向總是沿着弦的瞬時側影的切線方向，大小與弦的延長成正比（當然指在彈性限度以內）。

為使問題簡單化起見，對弦的振動須要加上一些假設（當然這些假設要與實際現象符合或相近似！）

1° 假設弦在平面上振動，為說明清楚起見，設在振動所發生的平面上（在瞬時 t 的時刻）引進一組直角坐標系 (x, u) ，其中 u 軸方向就是弦的位移方向而 x 軸沿弦開始位置的方向，我們假設位移的方向垂直於 x 軸；換句話說，在 $t=0$ 時刻（開始平衡位置的時刻）弦上某點位置與在時刻 t （經過振動後）弦上同一

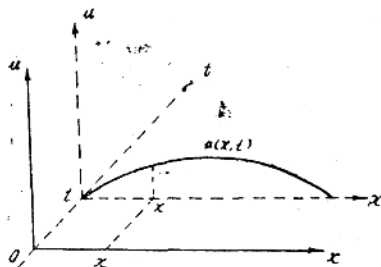


圖 1

点位置的 x 坐标没有改变，弦上点在瞬时 t 的位置可用函数 $u(x, t)$ 来表示， u 称做振幅，这样的振动称做横振动。

2° 假设弦的振幅与单位长比较起来是非常之小，因此，如用 α 表示弦上某点处的切线 α 与 x 轴的夹角，则 $|\alpha|$ 很小，显然

$$\tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$$

因此，所谓“微小的横振动”就是指 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的绝对值很小，因而在讨论中我们常常忽略 u_x 的高于一次的幂不计，这样，则有

$$\sin \alpha = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx u_x; \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1。$$

3° 弦的振动常常是由外力而引起的，用 $f(x, t)$ 表示单位长度上所施加的外力，简称外力密度，假设外力的方向平行于振动的方向，也就是说，平行于 u 轴的方向，此外，假设 $f(x, t)$ 是 x 与 t 的连续函数，就是说，外力是连续地分布在弦的各点上而且随着时间而连续地施用。

4° 最后假定弦的质量也是连续地分布；换句话说，它的密度 $\mu(x)$ 是 x 的连续函数，很明显，密度 $\mu(x)$ 不随时间而改变。

3. 张力不依赖于时间及 x

在前段的假设上我们要证明下面一个断语：**当弦发生微小横振动时，弦上所产生的张力是一常量**，令 T 表弦上所产生的张力，一般说来， T 应该是 x 与 t 的函数：

$$T = T(x, t),$$

现在计算弦上一段 (x_1, x_2) 的伸长，在时刻 t 时，弦上介于 x_1 与 x_2 之间的一段弧长 $S(t)$ 是

$$S(t) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2} dx \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1 = S(0),$$

这表示当弦的振动很小时，在振动过程中弧段的伸长可以忽略不

計，因而依据胡克定律，弦上每点处的張力 T 的数值不随時間而改变。

我們再証，張力 T 也不依赖于点的坐标 x 。为此，把張力 T 沿 x 軸与 u 軸分解，分力分別記做 T_x 与 T_u （注意，这里 T_x 或 T_u 并非指 T 对 x 或 u 的偏导数），那末

$$T_x(x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx T(x),$$

$$T_u(x) = T(x) \sin \alpha = \frac{T u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx T(x) u_x,$$

在弦段 (x_1, x_2) 上作用的有張力，外力与慣性力，因為我們只假設弦仅发生橫振动，所有这些力在 x 軸上的射影之和应等于零，但由于位移 u 与外力密度 f 都平行于 u 軸，所以慣性力也平行于 u 軸，因此，在弦段 (x_1, x_2) 上作用的張力在 x 軸上的射影必为零，这就是說。

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0, \text{ 或 } T(x_2) = T(x_1),$$

这表示 $T(x)$ 不依赖于 x 。所以我們得出結論：弦作微小橫振动时，弦上所发生的張力 T 永远是一常量

4. 弦的橫振动方程

現在我們要推导弦的橫振动方程，就是說要寻求函数 $u(x, t)$ 所应滿足的方程，我們依据牛頓第二定律，这个定律說：在运动过程中，运动量的改变量等于使运动产生的作用力的冲量*）。

考虑弦的一段弧 (x_1, x_2) ，弧段 (x_1, x_2) 的运动量沿 u 軸的支量是

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t) \mu(\xi) d\xi,$$

該运动量在时刻 $\Delta t = t_2 - t_1$ 内的改变量是

* 如作用力是 $F(t)$ ，我們定义 $\int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$ 为時間 (t_1, t_2) 內的冲量。

$$\int_{x_1}^{x_2} \mu(\xi) \{u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)\} d\xi,$$

依据牛顿第二定律：它应等于作用于弧段 (x_1, x_2) 上的张力冲量与外力冲量在 u 轴方向上支量之和，张力沿 u 轴方向冲量的支量是

$$\int_{t_1}^{t_2} T \{u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)\} d\tau,$$

而沿 u 轴的外力冲量是

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

因此，依据牛顿第二定律

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_{x_1}^{x_2} \{u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)\} \mu(\xi) d\xi = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} T \{u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)\} d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned}$$

这就是振幅函数 $u(x, t)$ 所应满足的“积微分方程”为要得到微分方程，我们应用积分中值定理与拉格朗日中值定理，但这还需要假设：

5° $u(x, t)$ 有直到二级的连续偏导数，于是将方程(1)应用两次中值定理，得到

$$\begin{aligned} & u_{tt}(\xi^*, t^*) \mu(\xi^*) \Delta t \Delta x = \\ & = \{T(u_{xx}(\xi^{**}, t^{**})) + f(\xi^{***}, t^{***})\} \Delta x \Delta t, \end{aligned}$$

其中 $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$ 并且

$$x_1 < \xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} < x_2, \quad t_1 < t^*, t^{**}, t^{***} < t_2,$$

約去 $\Delta x \Delta t$ 并令 $x_2 \rightarrow x_1$, $t_2 \rightarrow t_1$, 取极限后就得

$$u_{tt}(x_1, t_1) \mu(x_1) = T u_{xx}(x_1, t_1) + f(x_1, t_1),$$

去掉添号“1”便得弦的横振动方程

$$(2) \quad T u_{xx} = \mu u_{tt} - f(x, t) \quad (0 < x < l, 0 < t < +\infty)$$

如果 μ 是一常量 (即質量是均匀分布的), 用 μ 遍除方程 (2) 并令

$$(3) \quad a = \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad F(x, t) = \frac{f(x, t)}{\mu},$$

則 (2) 变为

$$(4) \quad u_{tt} = a^2 u_{xx} + F(x, t) \quad (0 < x < l, 0 < t < +\infty),$$

$F(x, t)$ 是对于單位質量上施加的外力密度, 在沒有外力时, 弦也会有自发的振动現象, 这时方程 (4) 变为齐次綫性方程

$$(5) \quad u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (0 < x < l, 0 < t < +\infty),$$

由于外力而产生的振动称做强迫振动, 沒有外力而产生的自发的振动称做自由振动。

*5. 在弦的某点上施加集中的力的情形

設在弦上某点 (x_0) 处施加集中的力 $f_0(t)$, 其方向仍与 u 軸平行 (見图 2), 其中 $0 < x_0 < l$, 而在其它地方不施加任何外力, 于是方程 (1) 可以写做

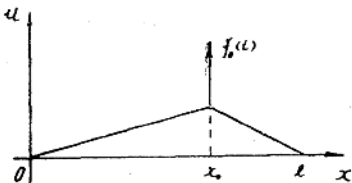


图 2

$$\int_{x_1}^{x_2} \mu(\xi) \{u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)\} d\xi = \\ = \int_{t_1}^{t_2} T \{u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)\} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau, \quad (x_1 < x_0 < x_2)$$

由于弦上各点的速度是有界的，当 $x_1 \rightarrow x_0 - 0$, $x_2 \rightarrow x_0 + 0$ 时，上面等式左端趋于零，因此，就得

$$(6) \quad \int_{t_1}^{t_2} T \{u_x(x_0 + 0, \tau) - u_x(x_0 - 0, \tau)\} d\tau = \\ = - \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau.$$

利用积分中值定理并且消去两端 Δt 然后令 $t_2 \rightarrow t_1$ 而取极限：

$$(7) \quad u_x(x, t) \Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = -\frac{1}{T} f_0(t),$$

这里我們去掉 t_1 的添号“1”由此可见，在集中力的作用处， $u_x(x, t)$ 有了间断点，这时微分方程(2)便失去了意义，在这点上 $u(x, t)$ 应该满足如下两个条件

$$(8) \quad \begin{cases} u(x_0 + 0, t) = u(x_0 - 0, t), \\ u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t) = -\frac{1}{T} f_0(t) \end{cases}$$

第一等式表示弦在 x_0 处没有断掉而第二等式表示弦在 x_0 处的方向突然转折，这个转折程度是与 $f_0(t)$ 与张力 T 有关的。

*6. 弦振动的能量

弦作横振动时能量表达式是 $E = K + U$ ，其中 K 是动能， U 是位能，先求动能 K 。考虑一段弧 $(x, x+dx)$ ，速度是 $u_t(x, t)$ 。动能为

$$dK = \frac{1}{2} \mu(x) dx \cdot (u_t)^2,$$

因此, 全弦的动能等于

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \mu(x) (u_t(x, t))^2 dx.$$

次求位能。令 $t = t_0$ 时弦具有形状 $u = u(x, t_0) \equiv u_0(x)$, 开始位置时的形状假设是 $u(x, 0) \equiv 0$, 在位置 $u_0(x)$ 的势就是由开始平衡位置转移到 $u_0(x)$ 的位置时所做的功, 我们仍先考虑弦的一段弧元素 $(x, x+dx)$, 在这段上沿 u 轴的张力支量是

$$T u_x(x+dx, t) - T u_x(x, t)$$

依据拉格朗日定理,

$$T\{u_x(x+dx, t) - u_x(x, t)\} = u_{xx}(x+\theta dx, t) dx \cdot T \approx T u_{xx}(x, t) dx.$$

在这张力的作用下, 弦在 dt 时间内移动的距离 (也是沿 u 轴方向) 是 $u_t dt$ 因此, 在时间间隔 dt 内弦所做的功是

$$\begin{aligned} \left\{ \int_0^l T u_{xx}(x, t) u_t dx \right\} dt &= \left\{ T u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l T u_x u_{xt} dx \right\} dt \\ &= \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l T (u_x)^2 dx + T u_x u_t \Big|_0^l \right\} dt \end{aligned}$$

因此, 从时刻 $t=0$ 到时刻 $t=t_0$ 。这一段时间内所做的功是

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_0^l T (u_x)^2 dx \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} T u_x u_t \Big|_0^l dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^l T \{u_x(x, t_0)\}^2 dx + \int_0^{t_0} T u_x u_t \Big|_0^l dt \end{aligned}$$

其中注意在左端第一个积分取下限 $t=0$ 时,

$$-\frac{1}{2} \int_0^l T \{u_x(x,0)\}^2 dx = 0 \quad (\text{因为 } u(x,0) = 0 \text{ 从而 } u_x(x,0) = 0)。$$

上式右端最后一个积分可以写成

$$\int_0^{t_0} T \{u_x(l,t) u_t(l,t) - u_x(0,t) u_t(0,t)\} dt。$$

$u_t(l,t)dt$ 表示端点 $x=l$ 在 dt 时间内所走的距离

故

$$\int_0^{t_0} T u_x(l,t) u_t(l,t) dt$$

表示端点 $x=l$ 在张力作用下所做的功，但由于我们假设了端点 $x=l$ 是固定着，它应等于零（或者直接由 $u_t(l,t)=0$ 的事实看出做功为 0），同样，端点 $x=0$ 的做功也为零，故若弦的两端固定，则从时刻 $t=0$ 到时刻 $t=t_0$ 弦所做的功是

$$-\frac{1}{2} \int_0^l T \{u_x(x,t_0)\}^2 dx。$$

它的负值就表弦在 $t=t_0$ 时刻的位能 U 。因此在 $t=t_0$ 时，弦的总能量是（假设两端点固定）

$$(9) \quad E = K + U = \frac{1}{2} \int_0^l \{ \mu(x) (u_t(x,t_0))^2 + T (u_x(x,t_0))^2 \} dx。$$

§210. 边界值条件与初始值条件

1. 边界值条件与初始值条件

在物理现象的过程中常常伴随着一些附加条件，例如在考虑弦的振动问题时，假定它的两端固定住，这意味着

$$(1) \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0,$$

不管 t 等于多少；又如假设弦在开始时形状是一段直线，这意味着：在开始时刻 $t=0$ 时

$$(2) \quad u(x, 0) = 0$$

(1) 与 (2) 就是问题的附加条件，前者称做边界值条件，而后者称做初始值条件，这些附加条件都是由问题的性质规定的，值得惊奇的是：这些附加条件往往能够足以确定问题唯一的解，从纯数学的观点来说：附加条件是否足以确定问题的唯一解，一般说来，事先是不能予知的，但我们能够给予数学的证明，这种事实以后我们都称之为唯一性定理。

因此，用数学来描述物理过程时，首先必须列出足以唯一地确定物理过程的条件。

例如在二阶常微分方程的情形下，方程的解可以用初始条件来确定，初始条件就是与自变量的初始值相对应的函数以及它的一级导函数的已给值，其它形式的附加条件也常遇到，例如在悬链问题（第二章例）给出函数在两点的值，同样对于偏微分方程也有各种各样的附加条件，就弦的振动为例，我们有下列各种的附加条件。

1° 弦的两端固定，这意味着条件 (1) 成立，又设在初始时刻 $t=t_0$ 弦的形状及速度都已给定：

$$(3) \quad \begin{cases} u(x, t_0) = \varphi(x), \\ u_t(x, t_0) = \psi(x), \end{cases}$$

这称做初始值条件，(2) 就是 (3) 的一种特例情形，

2° 弦的两端按已给规律运动，就是说

$$(4) \quad \begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

其中 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ 都是 t 的已知函数，这是边界值条件的另一种形式，

3° 弹簧振动问题，譬如弹簧振动时，假设一端固定，另一端自由运动，设端点 $x=0$ 固定，这意味着