

2001 年上海大学博士学位论文

11

具有分数导数型本构关系的粘弹性 结构的静动力学行为分析

作者：李根国

专业：固体力学

导师：朱正佑



上海大学出版社

2001 年上海大学博士学位论文

具有分数导数型本构关系的粘弹性
结构的静动力学行为分析

作者：李根国

专业：固体力学

导师：朱正佑

上海大学出版社

·上海·

Shanghai University Doctoral Dissertation (2001)

**Quasi-static and Dynamical Analysis for
Viscoelastic Structures with Fractional
Derivative Constitutive Relation**

Candidate: Li Genguo

Major: Solid Mechanics

Supervisor: Prof. Zhu Zhengyou

Shanghai University Press

• Shanghai •

上海大学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

- | | | | |
|-----|------------|---------|--------|
| 主任： | 曹志远 | 教授，同济大学 | 200092 |
| 委员： | 程昌钧 | 教授，上海大学 | 200072 |
| | 张若京 | 教授，同济大学 | 200092 |
| | 王文亮 | 教授，复旦大学 | 200433 |
| | 陈守吉 | 教授，复旦大学 | 200433 |
| 导师： | 朱正佑 | 教授，上海大学 | 200072 |

评阅人名单:

曹志远	教授, 同济大学工程力学与技术系	200092
洪嘉振	教授, 上海交通大学工程力学系	200030
杨忠华	教授, 上海师范大学数学系	200234

评议人名单:

刘曾荣	教授, 上海大学数学系	200072
蔡中民	教授, 太原理工大学应用力学研究所	030024
宁建国	教授, 北京理工大学机电工程学院	100081
尚新春	教授, 北京科技大学数学力学系	100083

答辩委员会对论文的评语

李报国同学的博士学位论文《具有分数导数型本构关系的粘弹性结构的静动力学行为分析》研究了具有广阔工程背景的粘弹性材料结构的力学性能。由于问题涉及时间等因素，并具有记忆特征，因此，该课题的研究具有相当的难度，是固体力学的一个重要前沿课题。论文的主要工作包括：

提出了一种新的分数积分数值计算方法，只需要存储部分历史时程信息，并给出了误差估计。通过算例，说明这个新方法具有较高的精度。为求解线性与非线性积分-偏微分方程提出与探讨了一系列方法与技巧，为应用分数导数型粘弹性本构关系打下了基础。

建立了具有分数导数型本构关系粘弹性柱动力学行为的数学模型，利用解析方法，得到了该对象运动稳定状态存在的条件，并用数值方法研究了动力学行为。

利用分数导数型本构关系，对粘弹性 Timoshenko 梁的不同情况（小变形、有限变形）分别建立了合理的数学模型，并用数值方法研究了动力学行为，考察了载荷参数与材料参数对梁动力响应的影响，发现了丰富有趣的动力学现象。

在非线性 Leaderman 本构关系情况下，用数值方法比较了一阶和二阶 Galerkin 截断系统的动力学行为，发现它们的定性性质相同，从一个侧面说明 Galerkin 方法分析本模型的合理性。

综上所述，本文将分数导数型本构关系应用于实际结构的粘弹性分析，求解了相应的静力分析、动力响应、动力稳定及

几何、物理非线性动力行为问题，为这类粘弹性本构理论的工程应用与发展作出了良好的开端。

论文表明李根国同学已具备扎实的数学、力学基础知识，具有独立从事科学研究的能力，并在工作中具有创造性。论文立意新，起点高，内容丰富，是一篇很好的博士学位论文。

答辩过程中，该同学讲述清晰，回答问题正确。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会投票表决，以全票通过李根国博士论文答辩，建议授予博士学位。

答辩委员会主席：**曹志远**

2001年6月13日

摘 要

利用分数微分型本构关系,对粘弹性结构的静、动力学行为进行理论分析和数值模拟,主要的工作如下:

(1) 提出了一种只需要存储部分历史数据的分数积分的数值计算方法,并给出了误差估计.利用该方法可对包含分数积分和微分的积分-微分方程进行较长时间的数值模拟,克服了存储全部历史数据的困难,并能对计算误差进行控制.给出了两个算例,数值结果与精确值进行了比较,发现这个新方法具有较高的精度.

(2) 建立了描述具有分数导数型本构关系粘弹性柱动力学行为的数学模型,它是具有弱奇异性的非线性积分-偏微分方程,然后利用 Galerkin 方法将控制方程化归为弱奇异性的非线性积分-常微分方程.利用平均化方法的思想分析了粘弹性柱的动力学行为,给出了粘弹性柱运动稳定状态存在的条件,利用本文提出的一种存储部分历史数据的分数积分的计算方法,对不同参数的粘弹性柱的动力响应进行了长时间的数值模拟,计算结果与解析方法的结论比较吻合,也说明该算法是可靠的.

(3) 利用粘弹性材料的三维分数导数型本构关系,建立了粘弹性 Timoshenko 梁的静、动力学行为研究的数学模型.分析了梁在阶跃载荷作用下的准静态力学行为,得出了问题的解析解;考察了材料参数对梁的挠度的影响,说明分数导数参数对梁的力学行为影响是明显的.基于模态函数讨论了 Timoshenko 梁在横

向简谐激励作用下的动力响应,考察了剪切效应和转动惯性对梁振动响应的影响.其剪切效应与梁的细长比有关,当细长比较大时,在静、动态情况下剪切效应都十分明显.利用作者提出的分数积分的计算方法,对梁的动力响应进行了模拟,计算结果与解析方法的结论比较吻合.

(4) 建立了具有分数导数型本构关系的粘弹性 Timoshenko 梁在有限变形情况下的控制方程,通过 Galerkin 1 阶截断和 2 阶截断得到了简支 Timoshenko 梁的运动的简化模型.它们分别是关于挠度和转角的非线性积分-微分方程组.然后利用分数积分的计算方法对这类非线性积分-微分方程组进行求解.考察了载荷参数和材料参数对 Timoshenko 梁动力响应的影响.随着载荷参数的增加, Galerkin 1 阶截断和 2 阶截断系统均由周期 1 运动发生分叉,变为多周期或拟周期或混沌运动相间出现的复杂状态;随着材料参数的增加,材料的阻尼不断增加,这时系统由多周期或拟周期或混沌运动变为周期 1 运动,因此,材料参数的增加有利于结构的稳定性.综合使用非线性动力学中的各种经典数值方法,揭示了非线性粘弹性 Timoshenko 梁丰富的动力学行为.用数值方法比较了 1 阶和 2 阶截断系统的动力学行为,发现它们定性相同,但定量性质略有偏差,例如,2 阶截断的分叉临界载荷略高于 1 阶截断的结果,说明 1 阶 Galerkin 截断系统可能是一个偏于安全的简化模型.

(5) 利用分数导数型 Leaderman 本构关系建立了小变形情况下 Timoshenko 梁的控制方程,然后用 Galerkin 方法简化了简支梁的数学模型,得到了关于挠度和转角的具有弱奇异性的积分-微分方程组.利用分数积分的计算方法对控制方程进行求解,考察了载荷参数和材料参数对梁动力响应的影响.随着载荷的增

加, 系统由周期 1 运动发生分叉, 变为多周期或拟周期或混沌运动相间出现的复杂状态; 随着分数导数参数的增加, 材料的阻尼不断增加, 系统由多周期或拟周期或混沌运动变为周期 1 运动, 有利于结构的稳定性. 综合使用非线性动力学中的经典方法, 揭示了非线性粘弹性 Timoshenko 梁丰富复杂的动力学行为. 比较了 1 阶和 2 阶 Galerkin 截断简化系统的动力学行为, 发现它们定性相同.

关键词 粘弹性结构, 稳定性, 非线性动力系统, 动力学行为, 分数微积分, 分数导数型本构关系, 积分-微分方程的数值方法

Abstract

In this dissertation, the fractional derivative constitutive relations are applied to study the static and dynamical problems of viscoelastic structures in theoretical analysis and numerical simulation. The main results contain as follows:

(1) A new numerical method for the fractional integral that only stores part history data is presented, and its discretization error is estimated. The method can be used to solve the integro-differential equation included fractional integral or fractional derivative in a long history and the difficulty of storing all history data is overcome and the error can be controlled. Two numerical examples are presented. The numerical results are compared with the exact solutions, it is shown that the new numerical method has high accuracy.

(2) The dynamic stability of simple supported viscoelastic column subjected to a periodic axial force is investigated. The governing equation of motion is derived as a weakly singular Volterra integro-partial-differential equation, and it is simplified into a weakly singular Volterra integro-ordinary-differential equation by the Galerkin method. By using the averaging method, the dynamical stability is analyzed and the stability criteria of viscoelastic column are achieved. The numerical method for fractional integral presented in this dissertation is applied to solve the reduced equations. The

long-time dynamical responses of the system with different parameters are simulated and the numerical results agree with the analytical ones. It is also shown the numerical method is reliable.

(3) The equations governing the quasi-static and dynamical behavior of a viscoelastic Timoshenko beam are derived. The viscoelastic material is assumed to obey a three-dimensional fractional derivative constitutive relation. The quasi-static behavior of the viscoelastic Timoshenko beam under step loading is analyzed and the analytical solution is obtained. The influence of material parameters on the deflection is investigated. It is indicated that the effect of fractional derivative parameter on the behavior of the beam is distinct. The dynamical response of the viscoelastic Timoshenko beam subjected to a periodic excitation is studied by means of mode shape functions. And the effect of both transverse shear and rotational inertia on the vibration of the beam is discussed. The effect relates to the slenderness ratio of the beam. For large values of the ratio, the effect is significant in both the quasi-static case and dynamical cases. The dynamical responses of the beam are simulated by using the numerical method presented in this dissertation. The numerical results agree with the analytical ones.

(4) The motion equations governing the dynamical behavior of a viscoelastic Timoshenko beam with finite deformation are derived and simplified by 1-order and 2-order Galerkin method. The viscoelastic material is assumed to obey the three-dimensional fractional derivative constitutive relation. The equations are nonlinear integro-differential ones with weakly singularity about the

deflection and rotational angle. The numerical method for fractional integral presented in this dissertation is applied to solve the equations. The influences of the load parameter and the material parameter on the deflection of the beam are considered respectively. With the increasing of the load parameter, the motion states of the 1-order and 2-order Galerkin truncation systems are both changed from periodic motion with period 1 to complex motions, such as multi-periodicity, quasi-periodicity or chaos. With the increasing of the material parameter, namely the damping of the viscoelastic material is adding, the motions of the systems are changed from multi-periodicity, quasi-periodicity or chaos to one-periodicity. So the increasing of the material parameter benefits the stability of the structures. The numerical methods in nonlinear dynamics are synthetically applied to reveal plenty dynamical behaviors of the beam. The dynamical behaviors of the 1-order and 2-order Galerkin truncated systems are numerically compared. The dynamical behaviors of the systems are uniform qualitatively, but there is a little deviation quantitatively. And the truncated system with order 1 is safer than the one of order 2. Hence the system with lower order model may be a safer simplified model.

(5) The motion equations governing the dynamical behavior of a viscoelastic Timoshenko beam with small deformation are derived in which the viscoelastic material is assumed to obey the fractional derivative Leaderman constitutive law. The equations are simplified by Galerkin method. So the nonlinear integro-differential equations with weakly singularity about the deflection and rotational angle are

obtained. The numerical method for fractional integral presented in this dissertation is applied to solve the equations. The influences of the load parameter and the material parameter on the deflection of the beam are considered respectively. With the increasing of the load parameter, the motion states of the Galerkin truncation systems are changed from period-one to complex motion, such as multi-periodic, quasi-periodic and chaotic motion. With the increasing of the material parameter, the damping of the viscoelastic material is adding, the motions of the systems are changed from multi-periodic, quasi-periodic or chaotic one to period-one motion. So the increasing of the material parameter benefits the stability of the structures. The numerical methods in nonlinear dynamics are synthetically applied to reveal plenty and complex dynamical behaviors of the beam. The dynamical behaviors of the 1-order and 2-order simplified systems are numerically compared. It is indicated that the dynamical behaviors of the systems are uniform qualitatively.

Key words viscoelastic structures, stability, nonlinear dynamical system, dynamical behavior, fractional calculus, fractional derivative constitutive relations, numerical method for integro-differential equations

目 录

第一章 绪论	1
1.1 研究的背景和意义	1
1.2 有关领域的研究现状	2
1.3 论文内容概述	12
1.4 本文的主要工作	13
第二章 分数积分的一种数值计算方法	16
2.1 前言	16
2.2 分数微积分及其简单性质	17
2.3 分数积分的数值计算方法	20
2.4 简单算例	27
2.5 小结	29
第三章 粘弹性柱的动力稳定性	30
3.1 前言	30
3.2 数学模型	31
3.3 动力稳定性条件	33
3.4 数值算例	39
3.5 小结	45
第四章 粘弹性 Timoshenko 梁的静、动力学行为	46
4.1 前言	46
4.2 数学模型	47

4.3 拟静态行为	51
4.4 动力学行为	56
4.5 小结	64
第五章 有限变形粘弹性 Timoshenko 梁动力学行为	65
5.1 前言	65
5.2 数学模型及其简化	66
5.3 动力学行为分析	70
5.4 小结	76
第六章 具有 Leaderman 本构关系粘弹性 Timoshenko 梁 的动力学行为	78
6.1 前言	78
6.2 数学模型及其简化	79
6.3 动力学行为分析	84
6.4 小结	100
第七章 结语	102
7.1 全文总结	102
7.2 今后的工作	104
参考文献	106
致谢	116

第一章 绪 论

1.1 研究的背景和意义

随着人类文明的进步和科学技术的迅速发展,出现了许多新型材料,例如各种类型的高分子聚合物、合成橡胶、油漆、玻璃、陶瓷、混凝土等,同时也越来越多地要求材料和结构在高温、高压、高湿度等复杂环境下服务,例如高温下的金属材料、火箭的固液态燃料等。自然界的许多天然材料,例如土壤、石油和矿物等地质材料,肌肉、骨骼、血液等生物材料,这些材料不但具有弹性固体的特性,而且具有粘性流体的特征,即粘弹性材料。这种材料的性质依赖于时间、温度,变形不仅与现时的应力值有关,而且与已往的历史有关,与温度有关,在动态情况下,还明显地依赖于频率。另外不同类型粘弹性材料的性能差别也很大,这使得理论分析和定量计算都十分困难。粘弹性材料的力学特性及粘弹性结构的力学行为的研究已成为一个重要的理论和应用课题。

许多大型工程,例如石油钻井、软土或冻土地带的机场、铁路、高层建筑工程、航天航空、化工等提出的一些关键性问题均与粘弹性材料、结构一般地与时间相关材料的理论与应用有关。由于粘弹性材料在国防和民用工业中的广泛应用,出现了由粘弹性材料构成的各种系统,为了保证这些系统的安全可靠,不致出现不希望的运动