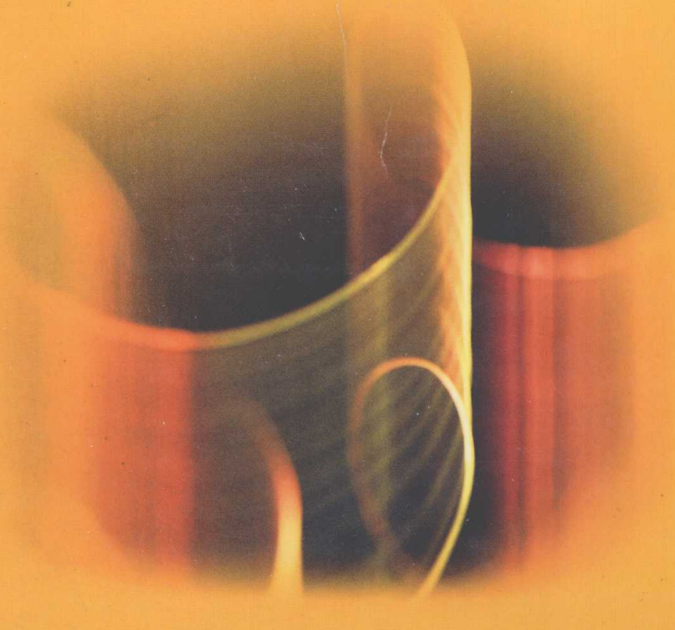
最新版21世纪高等学校导学与导考教材

线性代数

XIANXINGDAISHU

JIETIZHIDAO 解题指导

葛照强　刘　锋　杨战民　编



陕西科学技术出版社

最新版21世纪高等学校导学与导考教材

线性代数解题指导

葛照强　刘　锋　杨战民　编

陕西科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数解题指导/葛照强，刘锋，杨战民编. —西安：陕西科学技术出版社2004. 7
ISBN 7—5369—3820—9

Ⅰ.线… Ⅱ.①葛…②刘…③杨… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第064531号

出 版 者	陕西科学技术出版社 西安北大街131号　邮编710003 电话（029）87211894　传真（029）87218236 http:/www.snstp.com
发 行 者	陕西科学技术出版社 电话（029）87212206　87260001
印　　刷	西安永琛快速印务有限责任公司
规　　格	880mm×1230mm　1/32开本
字　　数	40.3 千字
印　　张	11.25
印　　数	1~3000册
版　　次	2004年8月第1版 2004年8月第1次印刷
定　　价	16.00元

前 言

线性代数是理工科院校一门重要的基础课，它不仅是其他数学课的基础，而且是物理、力学、电学等的基础。它的理论和方法已成为当今科学研究和处理工程技术领域问题的有力工具。例如，曾轰动一时的线性规划问题单纯形算法实际上是通过矩阵的初等变换来实现的；又如，20 世纪 70 年代电网络和经济管理中提出的广义系统是通过矩阵形式描述的，该系统的结构稳定性、极点配置问题等都是化为矩阵的有关问题而得以解决的。另外，计算机的飞速发展和普及使用，为线性代数的应用开辟了更为广阔的前景。例如许多实际问题可以通过离散化的数值计算方法化为线性代数的问题得以解决；许多线性代数问题的求解都有专用程序，求解时只要调用这些专用程序，输入有关数据，几乎立即可以把要求的结果显示或打印出来。

线性代数课程学时少、内容多、比较抽象，且有一套自身特有的理论体系、思维方法和解题技巧，但只要灵活掌握该课程的规律，使用起来就会得心应手。要想尽快地掌握这些规律，借助于一本合适的学习指导书是十分必要的。作者根据多年的教学经验，对本门课程的内容分门别类，将全书划分为 6 章，每章按内容提要、习题与解答及考研题解三部分编写。通过对大量有代表性例题的分析和求解，揭示线性代数的理论规律、思维方法和解题技巧，使读者可以达到“事半功倍”“举一反三”的效果，提高基本运算、逻辑推理及创新能力，加强数学素养。此外，为了提高读者的整体素质，希望从如下几个方面领会线性代数内容中所表现的人文精神内涵：

1. 线性代数的学习——勤奋与自强。在线性代数的学习中，证明和求解有关习题是对意志的磨炼，在证明和求解那些并不太容易的习题时，可以学会败而不馁，学会赞赏微小的进展，学会等待灵感的到来，学会当灵感到来后的全力以赴。在学习中有机会尝尽为证明和求解而奋斗的喜怒哀乐，那些成功经验能够培养对事业的锲而不舍的追求。

2. 线性代数的抽象——感知与概括。线性代数中的许多基本概念都是

人们根据感知各种自然和社会现象所反映的各种具体属性，为了用统一的方式方法去描述这些属性而产生的。在概念的形成过程中，要经过对现象进行分类整理、归纳加工、抽象概括等一系列思维活动。例如矩阵、线性变换等概念的形成。这些活动的经验和方法会自觉或不自觉地被移植到以后的工作、生活中，有助于整体能力的提高。

3. 线性代数的精确——敬业与责任。线性代数的精确性表现在定义的准确性，推理的严密性和结论的确定无疑与无可争辩性。这种精确性的训练不仅能够使人热爱数学，还能够培养耐心、毅力及对事业的执着精神。线性代数的精确性所蕴含的人文精神能使人养成缜密、有条理的思维方式，有助于培养一丝不苟的工作态度、敬业精神和强烈的责任感。

4. 线性代数的规则——理智与自律。线性代数中的很多结论是在概念的定义和作为推理基础的公设的约束下形成的逻辑结果，而不是情感世界的宣泄；每个数学问题的解决都必须遵守数学规则。这种对规则的敬重能够迁移到人和事物上，使人们形成一种对社会公德、秩序、法律等的内在自我约束力。

5. 线性代数的论证——求实与诚信。线性代数的许多理论是建立在公理化体系之上的，研究起来有法可依。公理本身是人们在对有关现象进行大量考察、探索，以实事求是的科学态度建立起来的。学习这些理论首先是建立在对公理深信不疑的基础上。在学习过程中，需要对所学内容进行推理论证，来不得半点的虚假。这种求真务实的学风会直接影响和迁移到日常生活中，对建立诚信社会起到促进作用。

6. 线性代数的思维——智慧与创新。线性代数的许多内容是对自然及社会各种现象进行归纳、抽象的结果。这种思维本身就要求有智慧和创新。线性代数的这种思维方式有利于培养思考问题的严密性。线性代数中的变换、构造方法等有利于培养思考问题的灵活性，能使人终身受益。

7. 线性代数的美——情趣与和谐。线性代数的美一般表现在线性代数问题所揭示的结构美，例如对称美、简洁美、和谐美等；在证明和得出结论的过程中，运用必不可少的想象美和直觉美；精确地达到目的的手段美；要使对这种美的感受和欣赏能提高到文化的层面上，达到热爱生活、丰富想象、

愉悦情调、涵养道德的目的。就线性代数的应用而言，线性代数是现代科技的语言和思想工具，现代科学技术的一些领域由于应用了线性代数而得到了意想不到的发展，这种完美结合，体现了客观世界的和谐统一。

8. 线性代数的认识功能——辩证的辅助工具与表现方式。在线性代数的内容中充满着辩证法，而且有自己特殊的表现方式，即用符号语言，用简明的公式，明确地表达出各种辩证的关系和转化。例如：线性变换的矩阵表示等。要发挥蕴藏在线性代数中的辩证思维的力量，必须善于发现和运用各种数学结构、数学运算之间的关系和转化。线性代数中许多计算方法之灵巧，证明方法之神奇，究其思路往往就是利用了各种转化手段。这些转化手段确实能够增强思维本领，提高科学抽象能力、逻辑推理能力和辩证思维能力。

参加本书编写工作的有葛照强（完成第1、2章）、刘锋（完成第3、4章）、杨战民（完成第5、6章）。由葛照强完成全书的统稿工作。

本书可作为高等学校本科生线性代数课程学习指导书，也可作为相应专业的读者考研复习和强化训练之用。

限于作者水平，书中可能会有不妥之处，敬请读者批评指正。

葛照强

2004年2月于西安交通大学

目　　录

第 1 章

n 阶行列式

1.1 内容提要

1. 排列与逆序

定义 1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组,称为一个 n 级排列.

定义 2 在一个 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,若有较大的数 p_i 排在较小的数 p_j 前面,则称 p_i 与 p_j 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数,称为它的逆序数,记作 $N(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

在一个排列中,将任意两个元素对调,其余元素不动,这种作出新排列的过程叫对换.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

定理 2 n 级排列共有 $n!$ 个$(n>1)$,其中奇偶排列各占一半.

2. n 阶行列式的定义

定义 3 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的表,则记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,其中横排称为行,纵排称为列. 它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个数乘积的代数和,各项的符号是:当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号. 即 n 阶行列式(简记为 D 或 $\Delta(a_{ij})$)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\Sigma(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $t=N(p_1p_2\cdots p_n)$,数 a_{ij} 称为行列式 $\Delta(a_{ij})$ 的元素.

3. 行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等(行列式 D 的转置行列式记作

D').

性质 2 交换行列式的两行(列),行列式变号.

推论 若行列式中有两行(列)相同,则此行列式为零.

性质 3 用数 k 乘行列式的一行(列),等于用数 k 乘此行列式.

推论 1 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 2 若行列式有两行(列)的对应元素成比例,则行列式为零.

性质 4 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两个数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+b'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+b'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+b'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 D 等于下面两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 将行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式不变.

4. 行列式按行(列)展开定理

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,余下的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

定理 3 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

推论 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad (i\neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad (i\neq j).$$

5. 拉普拉斯展开定理

在 n 阶行列式 D 中,选定 k 行 k 列($k<n$),位于这些行和列交点上的 k^2 个元素不改变原来位置组成的 k 阶行列式 M,称为 D 的一个 k 阶子式;在 D 中

划去这 k 行 k 列又得到一个 $n-k$ 阶子式 N，称为 M 的余子式. 而 $(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}N$ 称为 M 的代数余子式(其中 $i_1,\cdots,i_k;j_1,\cdots,j_k$ 分别是 M 的行、列在 D 中的行、列指标).

定理 4　设在 n 阶行列式 D 中，取定某 k 行(列)($1\leqslant k\leqslant n-1$)，则在这 k 行(列)中所有 k 阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

6. 范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

7. 克莱姆法则

含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{1}$$

定理 5　(克莱姆法则) 如果线性方程组(1) 的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么，方程组(1) 有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}. \tag{2}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组(1) 右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个方程的齐次线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{3}$$

定理 6 若齐次线性方程组(3)的系数行列式 $D \neq 0$,则齐次线性方程组(3)只有零解.

定理 7 若齐次线性方程组(3)有非零解,则它的系数行列式 $D = 0$.

[附]行列式乘法规则:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 c_{ij} 是 $\Delta(a_{ij})$ 的第 i 行与 $\Delta(b_{ij})$ 的第 j 列对应元素乘积之和,即

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + b_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

由于行列式是个数,也可分别算出行列式 $\Delta(a_{ij})$、$\Delta(b_{ij})$ 的值,然后再相乘.

1.2 习题与解答

1. 基本概念

1.1 设 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为 I,问排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的逆序数为多少?

解 对任意二不同数字 $i,j(\leqslant n)$,由于它们要么构成 $i_1i_2\cdots i_n$ 的一个逆序,要么构成 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的一个逆序,且不同时构成这两个排列的逆序,故 $N(i_ni_{n-1}\cdots i_1) = C_n^2 - I$.

1.2 选取 i 和 k 的值,使得乘积 $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ 含于某 6 阶行列式且带有负号.

解 由题设知 $i,k = 1$ 或 5,且 $i \neq k$. 当 $i = 1, k = 5$ 时,重排乘积,使各因子的行标成自然顺序:

$$a_{15}a_{21}a_{33}a_{46}a_{54}a_{62},$$

由 $N(513642) = 1 + 4 + 1 + 2 = 8$ 知,原乘积在 6 阶行列式中带正号,不合题意,应舍去,故 $i = 5, k = 1$ 即为所求.

1.3 写出 5 阶行列式 $D_5 = \Delta(a_{ij})$ 中包含 a_{13},a_{25} 的所有带正号的项.

解　D_5 中包含元素 a_{13},a_{25} 的一般项为 $(-1)^{N(35klm)}a_{13}a_{25}a_{3k}a_{4l}a_{5m}$. 就 k,l,m 的所有可能取值,列表讨论如下:

(k,l,m)	$(1,2,4)$	$(1,4,2)$	$(2,1,4)$	$(2,4,1)$	$(4,1,2)$	$(4,2,1)$
$N(35klm)$	5	6	6	7	7	8

由上表可知,D_5 中包含元素 a_{13},a_{25} 的所有带正号的项为:

$$a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52},\quad a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54},\quad a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}.$$

1.4　利用行列式定义计算行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

其中第 2,3 行及第 2,3 列上的元素都不等于零.

解　D_5 的一般项为

$$(-1)^{N(p_1p_2p_3p_4p_5)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}.$$

由于 p_1,p_4,p_5 只能在 1,2,3,4,5 中取不同的值,故 p_1,p_4,p_5 中至少有一个要取 1,4,5 中之一数,相应地 $a_{ip_i}=0$,从而 $(-1)^{N(p_1p_2p_3p_4p_5)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}=0$,于是 $D_5=0$.

1.5　若一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数多于 n^2-n,问此行列式的值等于多少?为什么?

解　此行列式的值等于零.事实上,设此行列式为 $\Delta(a_{ij})$,则其一般项为

$$(-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

由于 $\Delta(a_{ij})$ 中零元素个数多于 n^2-n 个,所以其中非零元素个数少于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个, 从而 a_{1p_1}, a_{2p_2}, $\cdots$, a_{np_n} 中至少有一个为零, 于是 $(-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=0$,故 $\Delta(a_{ij})=0$.

1.6　试证:如果在 n 阶行列式 D 中,处于某 k 行和某 l 列交叉处的各元素均等于零,且 $k+l>n$,则 $D=0$.

证　设 $D=\Delta(a_{ij})$,则 D 的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

因 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 中位于题设 k 行的元素有 k 个,而这 k 个元素中不在题设 l 列的元素至多有 $(n-l)$ 个,因此,其中至少有 $k-(n-l)=k+l-n\geqslant 1$ 个元素在题设 l 列之一列,即 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 中至少有一个元素位于题设 k 行及 l 列的某交叉处,于是 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=0$,故 $D=0$.

1.7 利用行列式定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&0&a&0\\2&0&0&-1\\a&1&0&0\\0&0&1&2\end{vmatrix}.$$

解 $D=(-1)^{N(1423)}1\times(-1)\times 1\times 1+(-1)^{N(3124)}a\times 2\times 1\times 2$

$=(-1)^2(-1)+(-1)^2 4a=4a-1.$

1.8 利用行列式定义计算行列式

$$D_{2n}=\left|\begin{array}{cccc:cccc} & & & & & & & \lambda_1\\ & & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & \iddots & & \\ & & & & \lambda_n & & & \\ \hdashline \lambda_{n+1} & & & & & & & \\ & \lambda_{n+2} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_{2n} & & & & \end{array}\right|$$

解 $D_{2n}=(-1)^{N[2n\,(2n-1)\cdots(n+1)\,1\,2\cdots n]}\lambda_1\cdots\lambda_n\lambda_{n+1}\cdots\lambda_{2n}$

$=(-1)^{[(2n-1)+(2n-2)+\cdots+n]}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\lambda_{n+1}\cdots\lambda_{2n}$

$=(-1)^{\frac{3n^2-n}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\lambda_{n+1}\cdots\lambda_{2n}.$

1.9 已知 4 阶行列式 $\Delta(a_{ij})$ 中，元素 $a_{12},a_{23},a_{24},a_{33},a_{41},a_{44}$ 为负数，而其它元素为正数，求 $\Delta(a_{ij})$ 中所有正项的个数？

解 将行列式 $\Delta(a_{ij})$ 中所有正的元素换为 1，负的元素换为 -1，即得行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&1&-1&1\\-1&1&1&-1\end{vmatrix},$$

容易求得 $D=-8$. 因为行列式 D 共有 $4!=24$ 项，且每项均为 1 或 -1，该行列式的值等于其正项个数与负项个数之差，所以 D 中正项个数，即 $\Delta(a_{ij})$ 中正项的个数为 8.

1.10 已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

求 $f(x)$ 中 x^4 的系数.

解法 1　$f(x)$ 中因子含 x 的元素有 $a_{11},a_{21},a_{23},a_{32},a_{35},a_{44},a_{52}$，因此，含有因子 x 的元素 a_{ip_i} 的列标只能取 $p_1=1;p_2=1,3;p_3=2,5;p_4=4;p_5=2$，于是，含 x^4 的项中元素 a_{ip_i} 的列标只能取

$$p_1=1,p_2=3,p_3=2,p_4=4 \text{ 与 } p_2=1,p_3=5,p_4=4,p_5=2,$$

相应的 5 级排列只有 1 3 2 4 5，3 1 5 4 2，故含 x^4 的项为

$$(-1)^{N(1\,3\,2\,4\,5)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4,$$

$$(-1)^{N(3\,1\,5\,4\,2)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4,$$

所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.

解法 2　将 $f(x)$ 化成含 x 的元素位于不同行、不同列的行列式，为此将 $a_{21}=x$ 及 $a_{32}=x$ 变成零元素，得到

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & 4 \\ -\frac{6}{7} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{27}{7} & 3x+\frac{2}{7} \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

x^4 的系数是下列两项系数的和：

$$(-1)^{N(1\,3\,5\,4\,2)}(-x)(1)(3x)(x)(-7x)=21x^4,$$

$$(-1)^{N(1\,3\,5\,4\,2)}(-x)(2x)\left(\frac{2}{7}\right)(x)(-7x)=4x^4,$$

所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.

解法 3　将 $f(x)$ 化成 x 只位于主对角线上的行列式．为此将 $f(x)$ 的第 1 行加到第 2 行，第 3 行的 7 倍加到第 5 行，再将所得行列式的第 5 列减去第 2 列的 3 倍，最后将新行列式的第 2，3 行对调，得

$$f(x)=-\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & -9 \\ -1 & x & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & -14 \\ 2 & 21 & 4 & x & -58 \\ -6 & 0 & 3 & 27 & 21x+2 \end{vmatrix},$$

含 x^4 的项为 $(-1)(-x)\cdot x\cdot 2x\cdot x\cdot 2=4x^4$， $(-1)(-x)\cdot x\cdot 1\cdot x\cdot 21x=21x^4$，所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.

2. 基本性质

1.11 试证：如果行列式 D 关于主对角线对称的元素是共轭复数（实数是它的特殊情形），亦即对任何下标 $i,j,\overline{a}_{ij}=a_{ji}$，则该行列式是实数．

证 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则由行列式的定义及共轭运算律，有

$$\overline{D}=\begin{vmatrix} \overline{a}_{11} & \overline{a}_{12} & \cdots & \overline{a}_{1n} \\ \overline{a}_{21} & \overline{a}_{22} & \cdots & \overline{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a}_{n1} & \overline{a}_{n2} & \cdots & \overline{a}_{nn} \end{vmatrix}$$

但 $\overline{a}_{ij}=a_{ji}$，所以 $\overline{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D'=D$，即 $\overline{D}=D$，故 D 为实数．

1.12 若行列式 $D_n=\Delta(a_{ij})$ 的元素 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 D_n 是反对称行列式（其中由 $a_{ii}=-a_{ii}$ 可推出 $a_{ii}=0,i=1,2,\cdots,n$）．证明：奇数阶反对称行列式的值为零．

证 设 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$，根据行列式的性质 3 的推论和性质 1，得

$$D_n=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^nD'_n=(-1)^nD_n,$$

故 n 为奇数时，$D_n=-D_n$，由此得 $D_n=0$.

1.13 n 阶行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 中的每个数 a_{ij} 分别乘以 $b^{i-j}(b\neq 0)$，问得到的行列式是否与原行列式 D 相等？

解 行列式 $D=\Delta(a_{ij})$ 中的每个数 a_{ij} 分别乘以 b^{i-j}，得

$$\begin{vmatrix} b^{1-1}a_{11} & b^{1-2}a_{12} & \cdots & b^{1-n}a_{1n} \\ b^{2-1}a_{21} & b^{2-2}a_{22} & \cdots & b^{2-n}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1}a_{n1} & b^{n-2}a_{n2} & \cdots & b^{n-n}a_{nn} \end{vmatrix} = b^{1+2+\cdots+n} \begin{vmatrix} b^{-1}a_{11} & b^{-2}a_{12} & \cdots & b^{-n}a_{1n} \\ b^{-1}a_{21} & b^{-2}a_{22} & \cdots & b^{-n}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{-1}a_{n1} & b^{-2}a_{n2} & \cdots & b^{-n}a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= b^{1+2+\cdots+n}b^{-1-2-\cdots-n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D.$$

所以得到的行列式与原行列式 D 相等．

1.14　设 M_{ij}, A_{ij} 分别是 n 阶行列式 $\Delta(a_{ij})$ 中元素 a_{ij} 的余子式及代数余子式，$i,j=1,2,\cdots,n$. 试证：$\Delta(M_{ij})=\Delta(A_{ij})$.

证　由代数余子式与余子式的关系 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 知

$$A_{ij}=(-1)^{i-j}M_{ij}=b^{i-j}M_{ij},\ b=-1\neq 0,\ i,j=1,2,\cdots,n,$$

于是由 1.13 题的结论可知 $\Delta(M_{ij})=\Delta(A_{ij})$.

1.15　不计算行列式，确定下面两个循环行列式间的关系：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

它们是由同一些数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 应用循环排列而得到的，但两者循环的方向相反．

解　将这两个行列式依次记为 D_1,D_2，并将 D_2 的第 1 至 n 行依次记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则 D_1 的第 1 至 n 行依次为 $\alpha_1,\alpha_n,\alpha_{n-1},\cdots,\alpha_2$.

对换排列 $1\ n(n-1)\cdots 2$ 中的元素，使其变为自然排列 $12\cdots n$，与此同时，交换 D_1 中相应的行，则 D_1 变为 D_2. 显然，在这个过程中，D_1 中行交换的次数，即排列 $1\ n(n-1)\cdots 2$ 变为排列 $1\ 2\cdots n$ 时所用对换的次数，与排列 $1\ n(n-1)\cdots 2$ 的逆序数 $N[1\ n\ (n-1)\cdots 2]=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ 同奇同偶．于是由行列式的性质得

$$D_2=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}D_1.$$

这就是所求的两个行列式间的关系．

1.16　求行列式