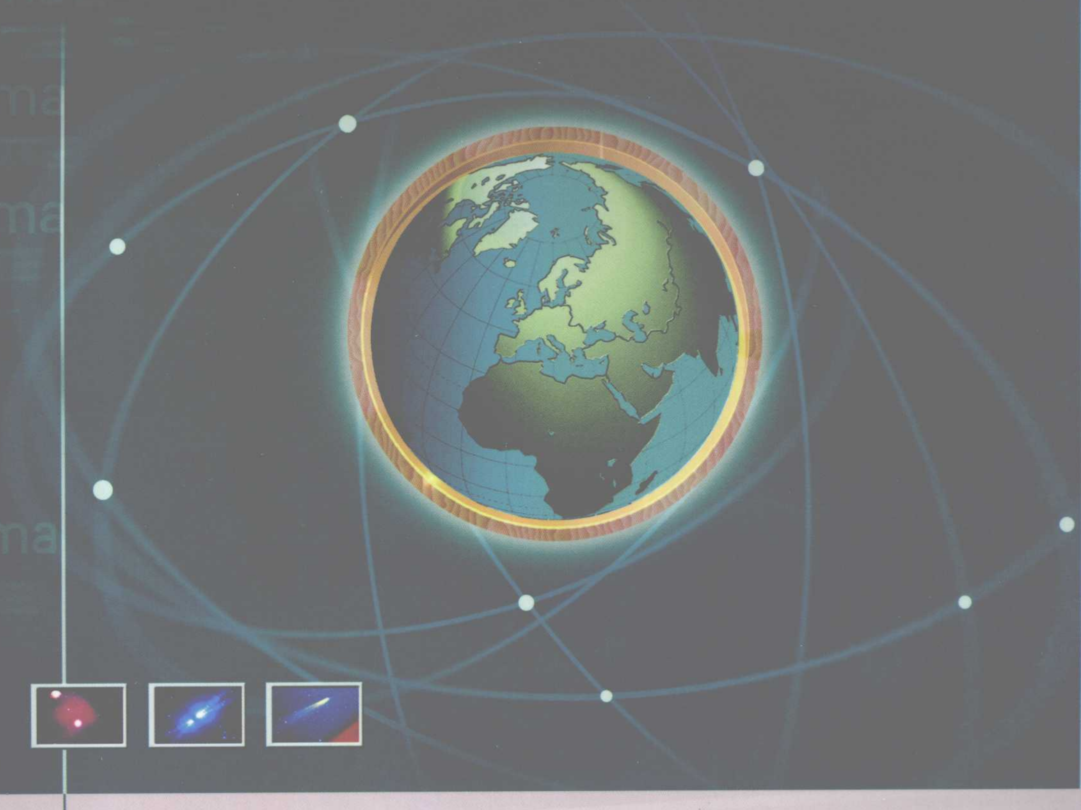
普通高等学校基础课系列教材

大学物理学习指导



梁荫中 张琳 汤钧民/主编

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等学校基础课系列教材

大学物理学习指导

主　编　梁荫中　张　琳　汤钧民

编　委　南　征　别业广　朱小飞

刘传胄　卫道坦

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学物理学习指导/梁荫中　张　琳　汤钧民　主编
武汉:华中科技大学出版社,2006年3月
ISBN 978-7-5609-3668-0

Ⅰ.大…
Ⅱ.①梁…　②张…　③汤…
Ⅲ.物理学-高等学校-学习参考资料
Ⅳ.O4

大学物理学习指导　　梁荫中　张　琳　汤钧民　主编

责任编辑:曾光　张毅　　封面设计:刘　卉
责任校对:陈骏　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉万卷鸿图科技有限公司
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:787×1092　1/16　　印张:20　　字数:472 000
版次:2006年3月第1版　　印次:2007年2月第2次印刷　　定价:31.50元
ISBN 978-7-5609-3668-0/O·384

内 容 提 要

本书作为大学物理的学习指导书，共分为 19 章。本书内容涵盖了大学物理的基础知识，内容丰富。全书以让学生掌握大学物理的基本原理和学习方法为目的，语言通俗，讲解精炼，明确指出了各章的重点和难点，并配合有很多的例题，以帮助学生更好地掌握知识要点。

本书适合于高等学校学生作为学习大学物理之用，也可供其他对大学物理感兴趣的人员参考。

前　言

本书是为华中科技大学武昌分校所编《大学物理》教材配套的学习指导书。它对于指导学生正确、深入地理解物理概念和物理定律，掌握物理基本原理和学习方法，培养学生分析和解决问题的能力都具有启迪作用。

本书各章设置"基本要求"、"学习指导"、"解题指导"、"问题讨论"、"自测练习"等五个部分。在"基本要求"中，明确指出本章应掌握、理解或了解的内容，便于学生分清主次，抓住要求。"学习指导"是本书精华，它简明而系统地介绍该章主要内容，点明重点和难点，指出各主要概念及规律应注意的哪些要点，并给出了基本运算的解题方法。在"解题指导"中将本章习题类型进行分类，并指出各类习题的解题要点和分析方法，对所选取的各个典型例题都先写出分析思路，再具体求解，让学生学会独立找到正确的解题思路，从而提高分析和解决问题的能力。"问题讨论"部分将学生不易理解或经常混淆的问题以及在概念理解和解题中经常出现的错误以问答题形式加以讨论。最后"自测练习"提供学生在学完本章后复习巩固和自我检查的习题，从而让学生了解自己对本章知识掌握的情况。

本指导书的各章序号和《大学物理》教材上各章序号的编排是一样的，以便配合使用。

由于时间仓促，本书中难免有错误和疏漏之处，敬请读者批评指正。

编者

目　　录

第1章　质点运动学

一、基本要求

（1）掌握描述质点运动的基本物理量，如位置矢量、位移、路程、速度、加速度的概念。

（2）掌握质点运动学中的两类基本问题。第一类是已知质点的运动方程，求它的速度和加速度。第二类是已知质点的加速度与初始条件，求它的速度、位矢以及运动方程等。

（3）熟悉速度、加速度在直角坐标及自然坐标中的表达式，并能用来对平面运动进行运算。

（4）掌握圆周运动的角量表示，掌握角量与线量之间的关系。

（5）理解相对运动和相对速度的概念。

二、学习指导

（一）内容提要

1. 质点

在某些情况下研究物体运动时，可将它看成是**有质量而无大小和形状的点**。我们把这个物体称为**质点**。质点是物体的一种理想模型。

2. 参考系　坐标系

（1）描述一个物体 A 的运动，总要选取相对于观察者静止的另一个物体 B(例如地面)，作为判断研究对象物体 A 动、静的**参考标准**，所选的这个物体 B，称为**参考系**。

（2）为**定量地描述**物体相对于参考系的运动情况，在参考系上建立的标明数量的坐标轴叫**坐标系**。

3. 位置矢量

位置矢量也简称**位矢**或**矢径**。它是描述质点在空间某一位置的物理量。在坐标系中，它是从坐标原点 O 到质点所在点 P 引出的一个矢量 $\boldsymbol{OP}$，用 $\boldsymbol{r}$ 表示。在三维空间与二维空间中 $\boldsymbol{r}$ 分别为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \qquad 与 \qquad \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$

位矢的大小 $r = |\boldsymbol{r}|$，在三维空间与二维空间中分别为

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad 与 \qquad r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

在三维空间里，位矢的方向由 $\boldsymbol{r}$ 与 x、y、z 坐标轴的夹角 α、β、γ 来确定，即

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{r}, \qquad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

在二维空间里，位矢的方向由 $\boldsymbol{r}$ 与 x 坐标轴的夹角 α 来确定，即

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$

4. 运动方程　轨迹方程

（1）**位置矢量随时间的变化关系式称为运动方程**。在三维空间与二维空间中 $\boldsymbol{r}$ 分别为

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \quad 与 \quad \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$$

相应的分量式分别为

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t) \quad 与 \quad x = x(t),\quad y = y(t)$$

上面各式都表示质点的位置(矢量)是时间的函数，所以运动方程可称为**运动函数**。

（2）在分量式的运动方程中，消去时间 t，得到质点在空间运动时它的各**坐标之间的关系式**。这个关系式称为**轨迹方程**。

5. 位移　路程

（1）**描述质点位置大小变化、方向改变的物理量**称为**位移**，记为 $\Delta\boldsymbol{r}$。在图 1-1 所示的矢量三角形 OPQ 中，有

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

在三维空间与二维空间中分别为

$$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$$
$$= \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}$$

与　$\Delta\boldsymbol{r} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j}$

在三维空间中，位移的大小和方向分别为

$$|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

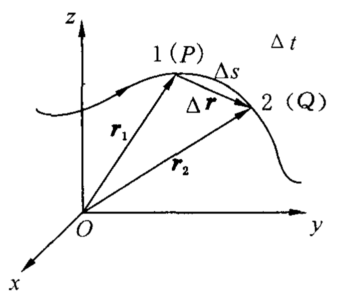


图 1-1　位移和路程的差别

和 $$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{|\Delta\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta = \frac{\Delta y}{|\Delta\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma = \frac{\Delta z}{|\Delta\boldsymbol{r}|}$$

其中，α、β、γ 分别是位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向与 x、y、z 各坐标轴方向的夹角。在二维空间中，位移的大小和方向则分别为

$$|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad 和 \quad \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\mathrm{d}t$ 时间内的位移表示为　$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\boldsymbol{k}$　与　$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j}$

（2）描述质点在某一段时间内，**运动轨迹(通常为曲线)的长度**的物理量称为**路程**。在 Δt 时间内，质点的路程记为 Δs；在 $\mathrm{d}t$ 时间内，质点的路程记为 $\mathrm{d}s$。

注意： ①$\Delta\boldsymbol{r}$ 与 Δs 是不同的两个物理量。如图 1-1 所示，位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 是位置矢量的变化量。$\Delta\boldsymbol{r}$ 是由始点 P 指向终点 Q 的矢量 $\boldsymbol{PQ}$，它仅仅取决于 P 和 Q 的位置，与质点经历的实际路径无关。Δs 是经历的轨迹长度。$\Delta\boldsymbol{r}$ 是矢量，Δs 是标量；它们的大小通常不相等，即通常情况下，$|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta s$。在 $\Delta t \to 0$ 时，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$。

② 物理学中，$|\Delta\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$，$\Delta r = |\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_1|$。因此，一般情况下，$|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta r$。同理，一般情况下，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| \neq \mathrm{d}r$。如图 1-2 所示。

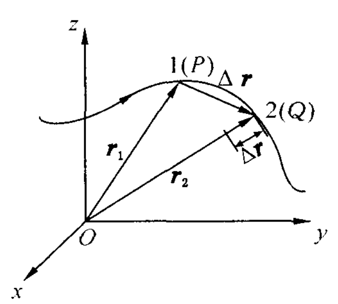


图 1-2　$\Delta\boldsymbol{r}$ 与 Δr 的不同

6. 速度

(1) 速度$\boldsymbol{v}$是矢量。它是**描述质点位置矢量的大小和方向随时间变化快慢的物理量**。定义为

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

速度在三维空间与二维空间中分别为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}$$

与
$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}$$

(2) 速度的大小，即**速率**。速率只**描述质点运动的快慢**。定义为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

其中，之所以最后一个等号成立，是因为当$\Delta t\to 0$时，即时间间隔趋近无限小时，$\Delta s\to|\Delta\boldsymbol{r}|$，即$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$。速度的大小在三维空间与二维空间中分别为

$$|\boldsymbol{v}|=v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

与

$$|\boldsymbol{v}|=v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

(3) 速度的方向。它是**沿运动轨迹该点处的切线方向，并指向质点运动前进的方向**。速度的方向在三维空间与二维空间中分别为

$$\cos\alpha=\frac{v_x}{v},\quad \cos\beta=\frac{v_y}{v},\quad \cos\gamma=\frac{v_z}{v}$$

与
$$\tan\alpha=\frac{v_y}{v_x}$$

其中，α、β、γ分别是速度方向与x、y、z各坐标轴方向的夹角。

(4) 平均速度。它表示质点在$\Delta t=t_2-t_1$的时间内的位移$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$与这段时间$\Delta t$的比值，即

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{t_2-t_1}$$

(5) 平均速率。它表示质点在$\Delta t=t_2-t_1$的时间内所走过的路程Δs与这段时间Δt的比值，即

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

注意： ① 在物理学中，$|\Delta\boldsymbol{v}|=|\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1|$，$\Delta v=|\boldsymbol{v}_2|-|\boldsymbol{v}_1|$。因此，一般情况下，$|\Delta\boldsymbol{v}|\neq\Delta v$。同理，一般情况下，$|\mathrm{d}\boldsymbol{v}|\neq\mathrm{d}v$。如图 1-3 所示。

② 由于$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|\neq\mathrm{d}r$，所以，一般情况下，$v=|\boldsymbol{v}|=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|\neq\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$。

7. 加速度

(1) 加速度$\boldsymbol{a}$是矢量。它是**描述质点速度的大小和方向随时间变化快慢的物理量**。它既

表示质点速度大小变化快慢，又表示质点速度方向变化快慢。定义为

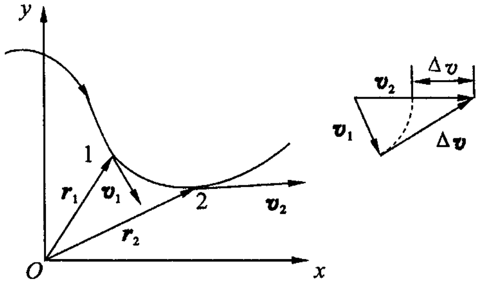


图 1-3　$\Delta \boldsymbol{v}$ 与 Δv 的不同

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

加速度在三维空间与二维空间中分别为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

与

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}$$

（2）加速度的大小。定义为

$$a=|\boldsymbol{a}|=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{v}|}{\mathrm{d}t}=\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right|$$

加速度的大小在三维空间与二维空间中分别为

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

与

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}x^2}\right)+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

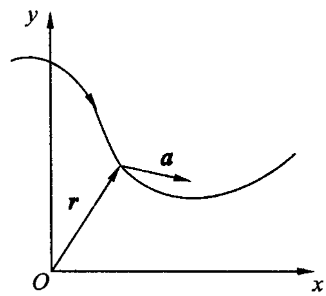


图 1-4　曲线轨迹上的加速度

（3）加速度的方向。它是**指向曲线轨迹凹边的一侧**，如图 1-4 所示。加速度方向在三维空间与二维空间中分别为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{a},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{a},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{a}$$

与

$$\tan\alpha=\frac{a_y}{a_x}$$

其中，α、β、γ 分别是加速度方向与 x、y、z 各坐标轴方向的夹角。

8. 直线运动

质点在一直线上的运动称为直线运动。这是**一维空间运动**。取坐标系为直角坐标系中的 Ox 轴，质点的运动轨迹直线与 Ox 轴重合。描述质点运动的位矢、位移、速度和加速度等都可用标量（即沿 Ox 轴分量）来表示，它们的方向用正、负来标明。与 Ox 轴正向一致的为正值，反之为负值。这些标量式分别为

$$x = x(t), \quad \Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

(1) 由 $x = x(t)$，求 v、a。已知质点的运动方程(即运动函数)$x = x(t)$，通过逐次对时间 t 求标量导数，如上式所示，便可求得质点的速度 v 与加速度 a。

(2) 由 a 和初始条件，求 v、x。

① 一般变速直线运动中，加速度 $a \neq$ 恒量，当初始条件为 $t = 0$ 时，$v = v_0$，$x = x_0$，则用积分运算求 v、x 的公式分别为

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\mathrm{d}t \quad 与 \quad x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\mathrm{d}t$$

注意：在一般变速运动中，上式各积分号里的 a 或 v 不是恒量，不能当做恒量提到积分号外之后再积分。

② 匀变速直线运动中，加速度 a 为恒量，当初始条件 $t = 0$ 时，$v = v_0$，$x = x_0$，则用积分法得到的求 v、x 的公式分别为

$$v = v_0 + at \quad 与 \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

以及

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

注意：当质点作匀减速直线运动时，加速度方向与速度方向相反。设速度方向为正，则加速度为负。

9. 抛体运动

从空间某点向空中抛出一物体(质点)，它在空中的运动称为**抛体运动**。忽略空气对它的作用，抛体运动一般是**在竖直平面内的二维运动**。抛体运动的特征是$\boldsymbol{v}_0 \neq 0$，具有恒定的重力速度 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} =$ 恒矢量，$\boldsymbol{g}$ 的方向竖直向下。

当$\boldsymbol{v}_0$与 $\boldsymbol{g}$ 共线且反向时，质点作竖直上抛运动；当$\boldsymbol{v}_0$与 $\boldsymbol{g}$ 共线且同向时，质点作竖直下抛运动；当$\boldsymbol{v}_0$与 $\boldsymbol{g}$ 垂直时，质点作平抛运动；当$\boldsymbol{v}_0$与 $\boldsymbol{g}$ 既不共线又不垂直时，质点作斜抛运动。

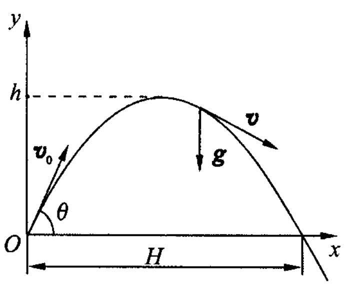


图 1-5　抛体运动

如图1-5所示，设竖直向上的方向为 y 轴的正方向，抛出物体(质点)的位移水平分量方向为 x 轴正方向，抛出物体点为坐标原点，初速度$\boldsymbol{v}_0$与 x 轴正方向的夹角为抛射角 θ(向上为正角)，有

$$a_x = 0, \qquad a_y = -g$$

$$v_x = v_0\cos\theta, \quad v_y = v_0\sin\theta - gt$$

从速度的分量表示式可知，抛体运动是抛体同时参与两个方向直线运动的合成：一个是水平方向上的匀速直线运动，一个是竖直方向上以重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 向下的匀变速直线运动。

$$x = v_0\cos\theta \cdot t, \qquad y = v_0\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

从上面这组分量式的运动方程中消去时间 t，便得到抛体的轨迹方程

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

因抛射物体在原点抛出，所以水平方向的射程公式为

$$x = H = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$$

射高公式为

$$y = h_m = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

10. 圆周运动

质点沿着半径 R 为定值的圆周轨迹的运动称为**圆周运动**。圆周运动是**在一个平面内的二维运动**。

(1) 无论直角坐标系的原点 O 是否取在圆周的圆心上，质点作圆周运动的位矢(以及运动方程)、位移、速度、加速度，都与前面的 3 小节(位置矢量)、4 小节(运动方程　轨迹方程)、5 小节(位移　路程)、6 小节(速度)、7 小节(加速度)中具有同样的表示形式，这些矢量式分别为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$$

以及它们的大小、方向表示式等也都照样适用。

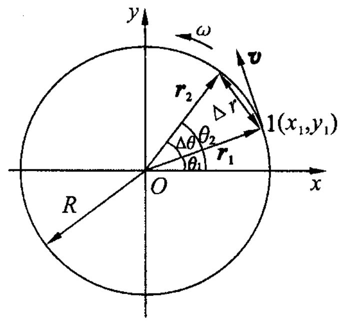


图 1-6　圆周运动

(2) 运动学中的角量。

① 角量的定义式。如图 1-6 所示，设质点作半径为 R 的圆周运动，并取直角坐标系 Oxy，原点 O 设在圆心处。某时刻 t，质点位于圆周上的某点处，这点相对于点 O 的位矢为 $\boldsymbol{r}$，且 $|\boldsymbol{r}| = R$。

角坐标(即角位置，$\boldsymbol{r}$ 与 x 轴正方向的夹角)	θ
运动方程	$\theta = \theta(t)$
角变化量(即角增量)	$\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t) = \theta_2 - \theta_1$
角位移	$\mathrm{d}\theta$
角速度	$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
角加速度	$\beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$

② 匀变速圆周运动。这种运动的特征是角加速度 $\boldsymbol{\beta} =$ 恒矢量。其运动公式用角量表示为

$$\omega = \omega_0 + \beta t, \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$$

以及

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\beta(\theta - \theta_0)$$

注意：其一，这里所设的初始条件为：$t = 0$ 时，$\omega = \omega_0$，$\theta = \theta_0$。

其二，由于已知 $|\boldsymbol{\beta}| = \beta =$ 恒量，加上初始条件，用积分法可得上述公式。

其三，当质点作匀减速圆周运动时，角加速度方向与角速度方向相反。设角速度方向为

正，则角加速度为负。

（3）切向加速度 $\boldsymbol{a}_t$，法向加速度 $\boldsymbol{a}_n$。

轨迹圆周半径为R的运动质点，若它在各点的速度大小在变化，则它的运动称为**变速圆周运动**。质点的加速度 $\boldsymbol{a}$ 可分解为两个相互垂直方向的加速度：一个是与质点速度$\boldsymbol{v}$在同一直线的切线方向的加速度，称为**切向加速度** $\boldsymbol{a}_t$；一个是沿质点的轨迹半径指向圆心的加速度，称为**法向加速度** $\boldsymbol{a}_n$。表示为

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n$$

$\boldsymbol{a}_t$ 要引起质点运动速度大小（速率）的改变。若$\boldsymbol{a}_t$与$\boldsymbol{v}$同向（见图1-7(a)），则它使质点速率增大；若 $\boldsymbol{a}_t$ 与$\boldsymbol{v}$反向（见图1-7(b)），则它使质点速率减小。$\boldsymbol{a}_n$ 与$\boldsymbol{v}$垂直，只会引起质点运动速度方向的改变，使速度方向偏向圆心一侧（即轨迹圆周曲线凹侧一边）改变。它们的量值分别为

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R}$$

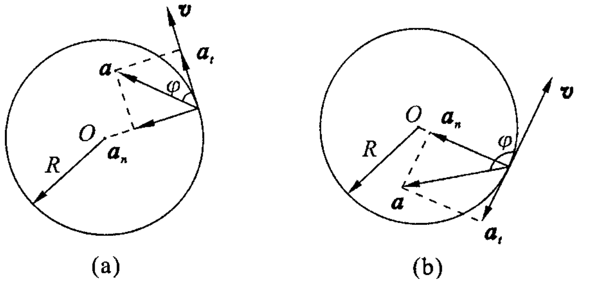


图 1-7　变速圆周运动

总加速度 $\boldsymbol{a}$ 的大小与方向（见图 1-7）的数学式分别为

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}, \qquad \varphi = \arctan\frac{a_n}{a_t}$$

注意：若速度大小（即速率）不变化，则 $a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$。这时，质点的圆周运动称为**匀速（率）圆周运动**。其 $\boldsymbol{a}$ 的大小 $a = a_n = \frac{v^2}{R}$；$\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}_n$ 的方向一致重合并指向圆心。

（4）线量与角量的关系。

$$s = R\theta, \qquad \Delta s = R\Delta\theta, \qquad \mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta$$

其中，s、Δs、$\mathrm{d}s$ 分别是圆周轨迹上圆心角 θ、$\Delta\theta$、$\mathrm{d}\theta$ 对应的轨迹长度（弧长）。它们与速度的大小 v、切向加速度大小 a_t、法向加速度大小 a_n、加速度大小 a 的关系式如下。

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\beta, \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\beta^2 + \omega^4}$$

作匀变速圆周运动时，

$$a_t = 0$$

$$a = a_n = R\omega^2$$

11. 相对运动

选定一个**基本参考系** S(例如地球)，另外有一个**运动参考系**(例如飞行着的一架飞机)S'，S' 系相对于 S 系在运动。如图 1-8 所示。质点 P 相对于参考系 S 有绝对位矢 $\boldsymbol{r}$、绝对速度 $\boldsymbol{v}$、绝对加速度 $\boldsymbol{a}$；相对于参考系 S' 有相对位矢 $\boldsymbol{r}'$、相对速度 $\boldsymbol{v}'$、相对加速度 $\boldsymbol{a}'$。运动参考系 S' 相对于基本参考系 S 有牵连位矢 $\boldsymbol{r}_0$、牵连速度 $\boldsymbol{v}_0$、牵连加速度 $\boldsymbol{a}_0$。观测者在 S 系观测时，观测到的都是绝对量。绝对量与相对量、牵连量之间的关系如下：

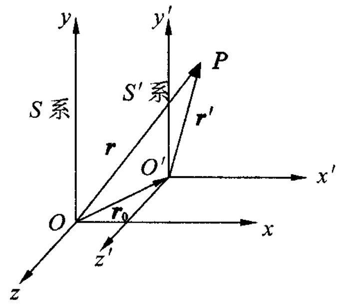


图 1-8　相对运动

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{r}_0$$
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_0$$
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0$$

观测者在 S' 系观测时，观测到的都是相对量。相对量与绝对量、牵连量之间的关系如下：

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$$
$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0$$
$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_0$$

注意：当两个参考系之间相对作匀速直线运动，即 S' 系相对于 S 系作匀速直线运动时，$\boldsymbol{v}_0 =$ 恒矢量，$\boldsymbol{a}_0 = 0$，则上述两组公式中有

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \quad \text{与} \quad \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}$$

表明：在两个相对作匀速直线运动的参考系中质点具有相同的加速度。

(二) 重点和难点

1. 重点

(1) 位置矢量、位移、速度、加速度的概念，运动方程，运动学中的两类问题。

(2) 圆周运动中的角速度、角加速度、切向加速度、法向加速度，线量与角量之间的关系。

2. 难点

(1) 位置矢量、位移、速度、加速度等物理量具有矢量性、瞬时性、叠加性、相对性。

(2) 两类问题的第二类问题中，已知加速度 $\boldsymbol{a}$ 与初始条件 $\boldsymbol{v}_0$、$\boldsymbol{r}_0$，运用数学中的积分运算求速度 $\boldsymbol{v}$ 及运动方程 $\boldsymbol{r}$。

三、解 题 指 导

运动学中具有的主要题目类型与解题方法如下。

(一) 基础知识的运用

物理量的坐标表示及矢量表示的方法，见例 1-1。用 x-t、v-t、a-t 图线表示 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 各量

与时间的关系，见例 1-2。由运动方程得到质点的轨迹方程，见例 1-4。

(二) 两类问题

运动学中的两类问题之第一类问题：已知质点的运动函数 $\boldsymbol{r}(t)$，求出它的位矢、速度、加速度等，见例 1-3。

运动学中的两类问题之第二类问题：已知质点的加速度和初始条件，求它的速度、位矢等，见例 1-4、例 1-5。

(三) 特殊运动

直接应用质点的直线运动、抛体运动、圆周运动等规律，求解有关问题，分别见例 1-5、例 1-6、例 1-7。

(四) 相对运动

依据相对运动中的具体条件，求出某一相对运动的物理量，见例 1-8。

例 1-1 一质点在 Oxy 平面内运动。运动方程为 $x = 2t, y = 19 - 2t^2$，式中物理量用国际单位制。求：

(1) 在 $t = 1$ s 到 $t = 2$ s 这段时间内，质点位移的大小和方向；

(2) 当 $t = 1$ s 时，质点的速度和加速度。

分析 本题(1)、(2) 问中要求出 $\Delta \boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 、$\boldsymbol{a}$，这都要求用坐标来表示这些矢量的大小和方向。矢量的大小是求出它的模，矢量的方向是求出它与坐标的夹角或者说出它与坐标轴方向的关系。

解 (1) 题目给的是运动方程的分量式：$x = 2t, y = 19 - 2t^2$。该质点的运动方程，即 t 时刻质点的位矢为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = 2t\boldsymbol{i} + (19 - 2t^2)\boldsymbol{j}$$

把 $t = 1$ s 代入，得 $t = 1$ s 时的位矢为

$$\boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{i} + 17\boldsymbol{j}$$

把 $t = 2$ s 代入，得 $t = 2$ s 时的位矢为

$$\boldsymbol{r}_2 = 4\boldsymbol{i} + 11\boldsymbol{j}$$

在 $t = 1$ s 到 $t = 2$ s 这段时间内，质点的位移为

$$\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j} = 2(\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j})$$

位移的大小

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{2^2 + (-6)^2}\ \mathrm{m} = 6.32\ \mathrm{m}$$

$\Delta \boldsymbol{r}$ 与 x 轴正方向的夹角

$$\alpha_{\Delta r} = \arctan\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \arctan\left(\frac{-6}{2}\right) = -71.6^\circ$$

(2) 质点的速度、加速度分别为

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}$$

与

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=-4\boldsymbol{j}$$

$t=1$ s 时的速度为

$$\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$$

或者用它的大小和它的方向与 x 轴正方向的夹角表示，即$\boldsymbol{v}_1$的大小为

$$v_1=|\boldsymbol{v}_1|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{2^2+(-4)^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}=4.47\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$\boldsymbol{v}_1$与 x 轴正方向的夹角

$$\alpha_{v_1}=\arctan\frac{v_y}{v_x}=\arctan\left(\frac{-4}{2}\right)=-63.5^\circ$$

$t=1$ s 时的加速度为

$$\boldsymbol{a}_1=-4\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

或者表示成 $\boldsymbol{a}_1$ 的大小为

$$a_1=|\boldsymbol{a}_1|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{0^2+(-4)^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}=4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$\boldsymbol{a}_1$ 的方向与 y 轴方向平行，向着 y 轴的负方向。

例 1-2 有一质点沿 x 轴作直线运动，它的运动方程为 $x=2t-t^2$。单位为国际单位制。问：哪段时间中质点沿 x 轴正方向运动？哪段时间中质点沿 x 轴负方向运动？并画出时间 $0\leqslant t\leqslant 3$ s 范围内的 x - t、v - t、a - t 曲线。

分析 判定沿 x 轴作直线运动的质点是沿 x 轴正方向运动，还是沿负方向运动，方法是由$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}$ 的式子着手。因为 $\boldsymbol{i}$ 方向是 x 轴的正方向，于是若 v_x 为正值，则质点沿 x 轴正方向运动；若 v_x 为负值，则沿负方向运动。

画曲线图的类型题时，先按解析几何知识判定是什么曲线(或直线)，其次在坐标上画出一两个或若干个关键点，如图 1-9(a) 图中的(0,0)、(1,1)、(2,0)、(3,−3) 各点，再将这些点连成线。

解 质点运动的方向是由它的速度$\boldsymbol{v}$ 的方向表示的。现在质点的运动方程为 $x=2t-t^2$，是一维(空间) 运动，故

$$\boldsymbol{r}(t)=x\boldsymbol{i}=(2t-t^2)\boldsymbol{i}$$

质点的速度

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}=\frac{\mathrm{d}(2t-t^2)}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}=(2-2t)\boldsymbol{i}$$

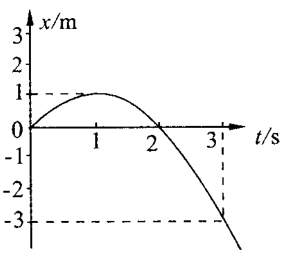
在此式中可看出，当 $t=1$ s 时，$\boldsymbol{v}=0$；在 $0\leqslant t<1$ s 时间范围内，$(2-2t)$ 为正值，即$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{i}$ 同方向，质点沿 x 轴正方向运动；在 $t>1$ s 时间范围内，$(2-2t)$ 为负值，即$\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{i}$ 反方向，质点沿 x 轴负方向运动。

因为质点仅在 x 轴上作一维(空间) 运动，由 $x=(2t-t^2)$ m 可得 $v(t)$、$a(t)$ 的函数式分别如下：

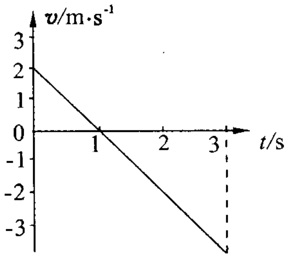
$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(2-2t)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\quad 与\quad a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-2\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

再由 x、v、a 对时间的函数式，分别作出 x - t、v - t、a - t 曲线如图 1-9(a)、(b)、(c) 所示。

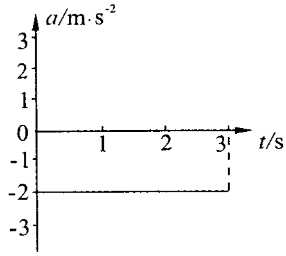
例 1-3 已知质点运动方程 $\boldsymbol{r}=(2t-3t^2)\boldsymbol{i}+(-4t^2+t^3)\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{r}$ 的单位为 m，t 的单位为 s。求：



(a)x - t 曲线



(b)v - t 曲线



(c)a - t 曲线

图 1-9　函数曲线

(1) 前 2 s 内质点的平均速度和平均加速度；

(2) $t=2$ s 时刻质点的速度和加速度。

分析　无论求平均速度$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{t_2-t_1}$，平均加速度$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1}{t_2-t_1}$，还是求某时刻的速度$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$、加速度 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，其中必定要用上 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 的表达式(即对时刻 t 的函数式)。本题已知 $\boldsymbol{r}$ 的函数式，由它可求出$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$，属于第一类问题，方法为用定义式进行微分运算。

解　用速度的定义式$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，加速度的定义式 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 求得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(2t-3t^2)\boldsymbol{i}+(-4t^2+t^3)\boldsymbol{j}]$$
$$=(2-6t)\boldsymbol{i}+(-8t+3t^2)\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(2-6t)\boldsymbol{i}+(-8t+3t^2)\boldsymbol{j}]$$
$$=-6\boldsymbol{i}+(-8+6t)\boldsymbol{j}$$

(1) 前 2 s内，指在$0\leqslant t\leqslant 2$ s时间范围内。设 $t_0=0$ 时的位矢、速度分别为 $\boldsymbol{r}_0$、$\boldsymbol{v}_0$，$t_2=2$ s 时的位矢、速度分别为 $\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{v}_2$。这些量分别求出如下。

将 $t=0$ 代入 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$ 的表达式，得

$$\boldsymbol{r}_0=0,\qquad \boldsymbol{v}_0=2\boldsymbol{i}$$

将 $t=2$ s 代入 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$ 的表达式，得

$$\boldsymbol{r}_2=-8\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j},\qquad \boldsymbol{v}_2=-10\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$$

从 $t=0$ 到 $t=2$ s，这前 2 s 内的平均速度、平均加速度分别为

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_0}{t_2-t_0}=\frac{(-8\boldsymbol{i}-8\boldsymbol{j})-0}{2-0}=-4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$$
$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_0}{t_2-t_0}=\frac{(-10\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j})-2\boldsymbol{i}}{2-0}=-6\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$$

(2) 将 $t=2$ s 代入$\boldsymbol{v}(t)$、$\boldsymbol{a}(t)$ 的表达式得

$$\boldsymbol{v}_2=(2-6\times 2)\boldsymbol{i}+(-8\times 2+3\times 2^2)\boldsymbol{j}=-10\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{a}_2=-6\boldsymbol{i}+(-8+6\times 2)\boldsymbol{j}=-6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$$