

数 学

北京师范大学中学教学研究中心主编

中学
各科
知识
提要

中国青年出版社

4
5F

中学各科知识提要

数 学

北 京 师 范 大 学
中学教学研究中心 主 编

封面设计：沈云瑞

中学各科知识提要
数 学

北京师范大学中学教学研究中心主编

*

中国青年出版社 出版 发行

中国青年出版社印刷厂印刷 新华书店经销

*

787×1092 1/32 14印张 270千字

1987年3月北京第1版 1987年3月北京第1次印刷

印数1—255,000册 定价2.40元

序 言

建国以来,我国中小学教育有了很大发展,但总的来说,基础教育仍然比较薄弱,不能适应宏伟的社会主义现代化建设的需要。为此,我国制定了义务教育法,决定在全国有步骤地实行九年制义务教育。它不仅为各类专门人才的培养奠定良好的基础,而且为社会主义物质文明和精神文明建设创造必要的前提条件,促进教育“面向四化,面向世界,面向未来”,并将对今后的社会发展和科技进步产生深远的影响。在落实九年制义务教育的同时,还必须对中小学的教育思想、教学内容和教学方法进行不断改革。因此,关心和支持基础教育,培养一代有理想、有道德、有文化、守纪律的社会主义新人,是全社会的责任。

为了支持基础教育,帮助高中学生系统掌握各科基础知识,培养学生运用知识去分析和解决实际问题的能力,最近,中国青年出版社约请专门从事基础教育研究的北京师范大学中学教学研究中心主编了一套《中学各科知识提要》。编写者在考虑到修订现行中学教学大纲精神和深入研究教材的基础上,力图用较小的篇幅,把中学各科的基本要求和知识精华提炼出来,并从知识的总体上、联系上和思维方法上加以分析,

指导学生进行系统学习,以减轻学习负担。我们认为,这个初衷确实很好。

目前我国的中学教学,学生的学习负担很重。满堂灌的现象非常普遍,灌的量很大,灌的方法很死,作业、考试又十分繁难。特别是毕业班,为了追求升学率,复习时大搞题海战术,做难题偏题。这些都不利于学生的德、智、体、美、劳全面发展。

记得科学巨匠爱因斯坦在谈到旧教学的弊病时说过:“不管你喜欢不喜欢,为了考试,你就得把材料往脑子里塞。这种强迫性的考试对我的影响极坏,使得我在考试后整整一年里,对任何科学问题都感到讨厌。”那么,怎样才能使学生学得生动活泼、趣味盎然,学到真本领呢?我想必须进行教学改革,对学生的学作科学的指导。

经验告诉我们,学习任何东西,都要注意两个方面,一是知识,一是能力。而学习知识,培养能力,是一种异常艰苦的劳动,需要勤奋和老实的态度,来不得半点懒惰、虚伪和投机取巧。马克思说:“在科学上没有平坦的大道,只有不畏劳苦沿着陡峭山路攀登的人,才有希望达到光辉的顶点。”鲁迅也说过:“文章应该怎样做,我说不出来,因为自己的作文,是由于多看和练习,此外并无心得或方法的。”可见,学习是没有捷径可走的。无论学习文科还是理科,为了把知识和能力学到手,必须“不畏劳苦”,“多看和练习”;或者说,学海茫茫,勤奋可渡。

当然,学习要有苦干精神,但并不是说不需要巧干。事实

上,在勤奋的前提下,讲究学习方法,遵循正确的思维规律,深思多问,那是可以事半功倍,收到良好效果的。

《中学各科知识提要》作为一套高中学生的学习指导书,是否实现了编写者的初衷,能否满足中学各科教学的需要呢?我以为只有读者最有资格评头品足,对此作出公正的回答。我作为教育战线上的一位“老兵”,还要衷心地期望,在广大中学师生的帮助下,北京师范大学中学教学研究中心今后能够不断地为我国的基础教育多做实事,作出更大的贡献。

王梓坤

1986年11月22日

前 言

为了帮助高中学生系统掌握各科基础知识，并提高学生分析问题和解决问题的能力，我们受中国青年出版社的委托，组织编写了《中学各科知识提要》。这套书包括语文、数学、英语、政治、物理、化学、生物、历史、地理等九个提要。

这套书是在现行中学教学大纲和教材的基础上，针对高中学生学习的需要编写的，发稿前又根据国家教委修订现行教学大纲的精神作了一些修改。我们希望它能够体现中学教学的基本要求，成为中学各科知识（包括能力）的核心内容。这套书还精选了一定量的例题和自我检查题，着重分析解题思路，以帮助学生提高灵活运用知识的能力。

这套书可供高中学生复习使用，也可供青年自学指导和教师备课参考。

为了使这套书更切合高中学生需要，编写工作除了研究中心的专家和教师参加外，还特别邀请了部分有丰富教学经验的中学特级教师和优秀教师参加，最后还约请了教材专家审稿。

数学提要由经家麒、宣其春、童直人、毕长龄、张振江编写。在编写过程中，钟善基教授给予了热情的支持和指导。

本书共分代数、三角、立体几何、解析几何四部分，每一部分都按照知识自身的结构加工整理，使之条理化和系统化。

为了巩固所学的知识,逐步提高分析问题和解决问题的能力,书中编选了许多富有启发性的典型例题,并结合题解讲述了思考方法和解题技巧。其中不少例题具有一定的灵活性和综合性。有些题解过程,有意省略某些细节,读者可自行补足,并从中得到训练。

本书注意代数,三角,几何之间的联系,力求体现数形结合的思维方法。

在每章之后,编选了自我检查题,并附有答案或提示。这些题目是为了检查复习效果而设计的,不能以此代替课本中的习题与练习。

北京师范大学中学教学研究中心

1986年10月31日

目 录

代 数

第一章 集合与数	2
一、集合	2
二、数的概念的发展	12
三、复数	13
四、自我检查题	32
第二章 方程和方程组	35
一、关于方程的解及同解性	35
二、解方程	36
三、方程组	56
四、自我检查题	64
第三章 不等式	66
一、解不等式	66
二、不等式的证明	76
三、自我检查题	89
第四章 映射与函数	91
一、映射	91
二、函数	93
三、自我检查题	124
第五章 排列、组合、数学归纳法和二项式定理	127

一、排列	127
二、组合	132
三、数学归纳法	140
四、二项式定理	146
五、自我检查题	149
第六章 数列与极限	152
一、数列	152
二、数列的极限	162
三、自我检查题	171

三 角

第七章 任意角的三角函数	176
一、任意角的三角函数定义	176
二、基本公式与计算	184
三、自我检查题	192
第八章 三角函数的性质及图象	195
一、三角函数的性质及图象	195
二、单位圆的应用	197
三、自我检查题	204
第九章 两角和与差的三角函数	208
一、三角函数的基本公式	208
二、公式运用举例	211
三、自我检查题	236
第十章 反三角函数和三角方程	239
一、反三角函数	239
二、简单的三角方程	244
三、自我检查题	252
第十一章 解三角形	255

一、解三角形的基本方法.....	255
二、应用举例.....	262
三、自我检查题.....	266

立 体 几 何

第十二章 直线和平面	270
一、平面.....	270
二、空间两条直线.....	278
三、空间直线和平面.....	290
四、空间两个平面.....	290
五、自我检查题.....	306
第十三章 多面体和旋转体.....	312
一、多面体.....	312
二、旋转体.....	320
三、多面体和旋转体的体积.....	326
四、自我检查题.....	331

解 析 几 何

第十四章 直线.....	336
一、有向线段和定比分点.....	336
二、直线的方程.....	345
三、两条直线的位置关系.....	366
四、自我检查题.....	378
第十五章 圆锥曲线	381
一、曲线和方程.....	381
二、圆.....	387
三、椭圆.....	394
四、双曲线.....	400

五、抛物线.....	408
六、圆锥曲线.....	417
七、自我检查题.....	424
第十六章 参数方程和极坐标.....	427
一、参数方程.....	427
二、极坐标.....	429

代 数

第一章 集合与数

一、集合

(一) 集合的概念

我们在定义一个概念时,总要用到其他的概念;而用到的其他概念,又应该是被定义了的. 定义概念甲时要用到概念乙,定义概念乙时要用到概念丙. 如此追溯上去,必然会遇到一些无法用其他概念来定义的概念. 我们把这种概念叫做原始概念.

集合是数学中的一个原始概念. 我们虽然无法给出集合的精确定义,却可以对它进行描述. 一般地,我们把具有某种属性的对象的全体叫做一个集合,而把这些对象叫做集合的元素. 通常用大写的拉丁字母表示集合,用小写的拉丁字母表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素,则记作 $a \in A$,读作 a 属于集合 A 或集合 A 含有元素 a ;如果 a 不是集合 A 的元素,则记作 $a \notin A$,读作 a 不属于集合 A 或集合 A 不含有元素 a .

集合一般有两种表示方法.

第一种是列表法. 就是把集合中的元素一一列举出来,写在大括号内.

例如所有小于 5 的正整数所组成的集合可以写成 $\{1, 2, 3, 4\}$.

第二种是描述法. 就是用描述集合元素的共同特征的方法来表示这个集合.

例如由满足不等式 $f(x) > 0$ 的一切 x 组成的集合可以用 $\{x | f(x) > 0\}$ 来表示. 又如圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 上所有点组成的集合可以用 $\{(x, y) | x^2 + y^2 = R^2\}$ 来表示.

为方便起见, 我们把不含有任何元素的集合叫做空集, 记为 $\emptyset$. 例如当方程 $f(x) = 0$ 无解时, 集合 $\{x | f(x) = 0\}$ 便是空集.

(二) 子集

设 p 与 q 表示两个命题, 我们用 “ $p \Rightarrow q$ ” 表示 “如果有 p 则必有 q ”; 用 “ $p \Leftrightarrow q$ ” 表示 “如果有 p 则必有 q , 并且如果有 q 则必有 p ”, 此时称 p 与 q 等价.

定义 1 设有两个集合 A 和 B , 若对任一元素 $a \in A \Rightarrow a \in B$, 则称集合 A 是集合 B 的子集, 记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$, 读作 “ A 包含于 B ” 或 “ B 包含 A ”. 记号 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$ 表示集合 A 不是集合 B 的子集, 读作 “ A 不包含于 B ” 或 “ B 不包含 A ”. 显然, $A \not\subseteq B \Leftrightarrow$ 至少有一个元素 $a \in A$ 且 $a \notin B$.

由定义 1 直接可以得出下述结论:

(1) 对任意的集合 A , 有 $A \subseteq A$;

(2) 设 A, B, C 为三个集合, 则若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$, 必有 $A \subseteq C$.

定义 2 当 $A \subseteq B$ 但 $B \not\subseteq A$, 即 B 中至少有一个元素不属于 A 时, 称 A 为 B 的真子集, 表示为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

定义 3 设有集合 A 与 B , 若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, 则称集合

A 与集合 B 相等, 记作 $A=B$. 例如, $\{x|x^2-5x+4=0\}=\{1, 4\}$.

由定义 3 直接可以得出下述结论:

(1) 对任意的集合 A , 总有 $A=A$;

(2) 若 $A=B$, 则 $B=A$;

(3) 若 $A=B$, 且 $B=C$, 则 $A=C$.

(三) 几个注意的问题

1. 集合的范围是非常广泛的, 集合的元素可以是各种各样的讨论对象. 作为含有某些元素的集合, 它本身也可以是另外一个集合的元素.

2. 集合中的元素必须是确定的, 或者说, 集合中的元素所具有的共同属性必须是确定的. 根据这个共同属性, 对于任意一个元素来说, 或者属于这个集合, 或者不属于这个集合, 二者必居其一. 例如对于集合 $A=\{n| \text{方程 } x^n+y^n=z^n \text{ 有正整数解}\}$, 容易看出, $1 \in A, 2 \in A$. 但至今仍不知道 A 中是否还有其他元素. 对较大的正整数 n 来说, 要想判断其是否属于 A 也是相当困难的. 虽然如此, 由于属性“ $x^n+y^n=z^n$ 有正整数解”是明确的, 所以满足这种属性的元素也就是确定的. 因此, 尽管我们对 A 中的元素不全了解, 但并不怀疑集合 A 的存在. 相反地, 属性不明确就会形成元素的不确定. 例如, “所有高个子的同学的全体”不能叫做集合.

3. 集合中的元素必须是互异的. 就是说, 在同一个集合中, 不许有相同元素.

4. 集合与组成它的元素之间的次序无关. 例如 $\{a, b\}$ 与 $\{b, a\}$ 实际上表示同一个集合.

5. 不要把单元素集合 $\{a\}$ 与它所含的唯一元素 a 混为一

谈. 特别要注意 $\emptyset$ 与 $\{\emptyset\}$ 的区别. $\emptyset$ 表示空集, $\{\emptyset\}$ 则表示以 $\emptyset$ 为唯一元素的集合.

6. 空集是任一集合的子集. 证明如下: 设空集 $\emptyset$ 不是某集合 A 的子集, 即 $\emptyset \not\subseteq A$, 则存在元素 $a \in \emptyset$ 而 $a \notin A$, 这与空集的定义矛盾, 因此, $\emptyset \subseteq A$. 当我们需要讨论某集合 A 的一切子集时, 不可忽略 $\emptyset$ 和它自身 A 这两个特殊的子集.

7. 数集与区间的记号.

(1) 数集的名称与符号见表 1-1.

表 1-1 数集的名称与符号

记 号	表 示 的 集 合	名 称
N	全体自然数的集合	自然数集
Z	全体整数的集合	整数集
Q	全体有理数的集合	有理数集
R	全体实数的集合	实数集
C	全体复数的集合	复数集

(2) 区间的名称与符号见表 1-2.

设 $a \in R, b \in R, a < b$.

表 1-2 区间的名称与符号

记 号	表 示 的 集 合	名 称
(a, b)	$\{x a < x < b, x \in R\}$	开区间
$[a, b]$	$\{x a \leq x \leq b, x \in R\}$	闭区间
$(a, b]$	$\{x a < x \leq b, x \in R\}$	半开区间
$[a, b)$	$\{x a \leq x < b, x \in R\}$	半开区间