高等学校教材

高等数学教程（下册）

Advanced Mathematics

北京理工大学
毛京中 编

高等教育出版社

高等学校教材

高等数学教程

（下　　册）

北京理工大学
毛京中　编

高等教育出版社

内容提要

本教材汲取了当前教学改革与教学研究的最新成果，针对理工科大学非数学类专业对基础数学的基本要求，借鉴国内外同类教材的精华编写而成，分为上、下两册出版。主要内容包括一元函数微积分，常微分方程，空间解析几何，多元函数微积分，无穷级数等。

本教材对教学内容优化组合，注重对基本概念、基本定理和重要公式的实际背景、产生过程及有关人物的介绍，注重对微积分基本思想和方法的分析阐述，突出实际应用。本教材结构严谨，逻辑清晰，浅显易懂。

本书可作为高等院校非数学类理工科各专业学生使用，也可供工程技术人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教程．下册/毛京中编．—北京：高等教育出版社，2008.5

ISBN 978-7-04-023604-0

Ⅰ．高… Ⅱ．毛… Ⅲ．高等数学-高等学校-教材 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 040926 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008年5月第1版
印　　张	28.5	印　　次	2008年5月第1次印刷
字　　数	540 000	定　　价	32.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　23604-00

目　录

第六章

向量代数与空间解析几何

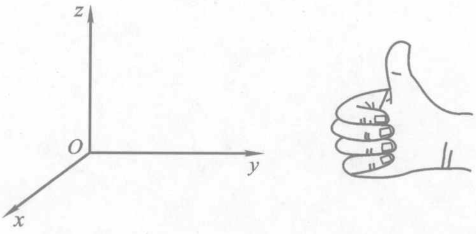
向量代数与空间解析几何的知识对于多元函数微分学及多元函数积分学是不可缺少的基础，也是学习其他数学分支以及力学、电学等自然科学常用的工具．本章首先建立空间直角坐标系，介绍向量的一些运算，然后以向量为工具讨论空间平面与直线，最后介绍空间曲面与曲线．学习本章要注意与平面解析几何的联系与区别．

第一节　空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

过空间一点 O 引出的三条互相垂直且具有相同长度单位的数轴称为**空间直角坐标系**（如图 6－1(a)）．点 O 叫做坐标原点，三条数轴分别叫做 x 轴、y 轴、z 轴．我们在本章使用的空间直角坐标系都是右手系，它的 x 轴、y 轴、z 轴的次序与方向是按右手法则排列的，如图 6－1(b)所示，若将右手四个手指从 x 轴的正向经过 90°转到 y 轴的正向时，右手拇指刚好指向 z 轴正向．

取定了空间直角坐标系后，我们就可以建立空间的点与三个有序实数之间的对应关系．设 M 是空间中的一个点，过 M 分别作垂直于三个坐标轴的平面，这三个平面与三个坐标轴分别交于 A,B,C 三点，这三个点在三个坐标轴上的坐标分别为 x,y,z，将有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标．其中 x,y,z 分别叫做点 M



(a) (b)

图 6－1

的 x 坐标，y 坐标，z 坐标. 反之，任意给定一个有序数组 (x,y,z)，在空间中有唯一的一个点以 (x,y,z) 为其坐标（如图 6－2）. 因此，空间中的点与有序数组 (x,y,z) 之间具有一一对应的关系.

在空间直角坐标系中，每两条坐标轴所确定的平面叫做坐标面. 这样就确定了三个坐标面，分别为 xOy 面，yOz 面，zOx 面. 三个坐标平面把空间分成了八部分，每一部分叫做一个卦限. 如图 6－3，位于上半空间的四个卦限依次称为 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 卦限，位于下半空间的四个卦限依次称为 Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ 卦限.

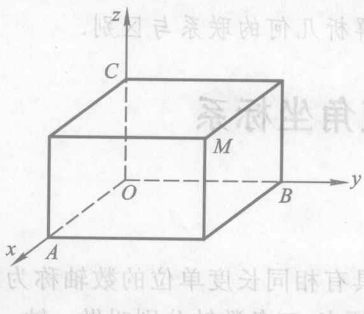


图 6－2

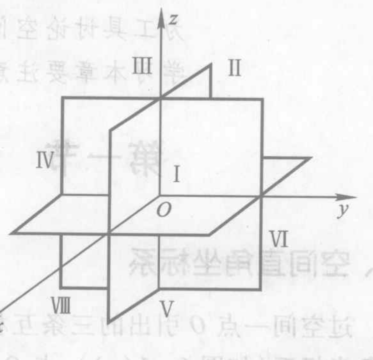


图 6－3

在每个卦限中，点的坐标的符号分别为：

Ⅰ$(+,+,+)$，Ⅱ$(-,+,+)$，Ⅲ$(-,-,+)$，Ⅳ$(+,-,+)$，

Ⅴ$(+,+,-)$，Ⅵ$(-,+,-)$，Ⅶ$(-,-,-)$，Ⅷ$(+,-,-)$.

原点的坐标为 $(0,0,0)$. x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$，y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$，z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$. xOy 面上点的坐标为 $(x,y,0)$，yOz 面上点的坐标为 $(0,y,z)$，zOx 面上点的坐标为 $(x,0,z)$.

二、空间两点间的距离

设 $M(x_1, y_1, z_1)$ 和 $N(x_2, y_2, z_2)$ 是空间中两点，过点 M 和 N 分别作垂直于 xOy 面的直线，它们分别与 xOy 面交于点 M_1, N_1，过点 M 作 NN_1 的垂线 ML（如图 6－4），则点 M 到点 N 的距离为

$$d = \sqrt{ML^2 + NL^2} = \sqrt{M_1N_1^2 + NL^2},$$

由于 $M_1(x_1, y_1, 0), N_1(x_2, y_2, 0)$，因此由平面解析几何可知

$$M_1N_1^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

又
$$NL = |z_2 - z_1|,$$

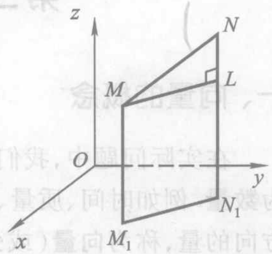


图 6－4

故有

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.}$$

特别，点 $M(x, y, z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 间的距离为

$$\boxed{d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.}$$

与平面解析几何中两点间的距离公式相比较，空间中两点间的距离公式中只是增加了一项 $(z_2 - z_1)^2$.

三、坐标轴的平移

如果将空间直角坐标系 $Oxyz$ 平移得一新的直角坐标系 $O'x'y'z'$，其中 O' 在原坐标系中的坐标为 (a, b, c). 设点 M 在旧坐标系中的坐标为 (x, y, z)，在新坐标系中的坐标为 (x', y', z')，则点 M 的新旧坐标之间有如下关系

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \\ z = z' + c, \end{cases}$$

与平面解析几何相比较，也只是增加了一个式子.

习题　6－1

1. 指出下列各点在空间直角坐标系中的位置.

   $A(1, -2, 3)$；　$B(2, 3, -4)$；　$C(2, -3, -4)$；　$D(-2, -3, 1)$；

   $E(3, 4, 0)$；　$F(0, 4, -1)$；　$G(0, 0, 3)$；　$H(0, -2, 0)$.

2. 求点 $(2, -1, 3)$ 关于原点、各坐标轴及各坐标面的对称点的坐标.
3. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.
4. 证明以 $A(4, 1, 9)$, $B(10, -1, 6)$, $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

5. 在 z 轴上求与点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

6. 在 yOz 面上求与点 $A(3,1,2)$, $B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

第二节 向量及其线性运算

一、向量的概念

在实际问题中,我们常遇到两类不同性质的量.一类是只具有大小的量,称为**数量**.例如时间、质量、温度、体积等都是数量.另一类是不仅有大小而且还有方向的量,称为**向量**(**或矢量**).例如力、速度、加速度等都是向量.向量可以用有向线段来表示.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向(如图 6-5).以 A 为起点,B 为终点的向量记做 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\boldsymbol{a}$.

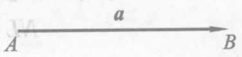


图 6-5

向量 $\overrightarrow{AB}$(或 $\boldsymbol{a}$)的大小叫做向量的模,记做 $|\overrightarrow{AB}|$(或 $|\boldsymbol{a}|$).

模为零的向量叫做零向量,记做 $\boldsymbol{0}$.零向量没有确定的方向,或者说它的方向是任意的.

模为 1 的向量称为单位向量.与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记做 $\boldsymbol{e}_a$(或 $\boldsymbol{a}^\circ$).

与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反但是模相等的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记做 $-\boldsymbol{a}$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所在的线段平行,则称此二向量平行,记做 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

我们在本书中所讨论的向量都是自由向量,即向量可以在空间中任意地平行移动,如此移动后仍被看成是原来的向量.因而如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同,则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是相等的,记做 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.相等的向量通过平移能完全重合.对自由向量而言,相互平行的向量又可称为共线的向量.以后为了讨论方便起见,我们常常把向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行移动,得到一个以原点为起点的向量 $\overrightarrow{OM}$($\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$).我们将以 M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 叫做点 M 的向径.

二、向量的加减法

根据力学中力、速度等的合成法则,我们对一般的向量加法有如下定义.

定义 1 设向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,以这两个向量为邻边做平行四边形 $OACB$(如图 6-6(a)),其中 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则其对角线向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量,记做 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,这种求和的法则叫做平行四边形法则.

由于有 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,因此也可以用三角形法则定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,如图 6-6(b),将向量 $\boldsymbol{b}$ 平行移动,使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,则 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终

点的向量就是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

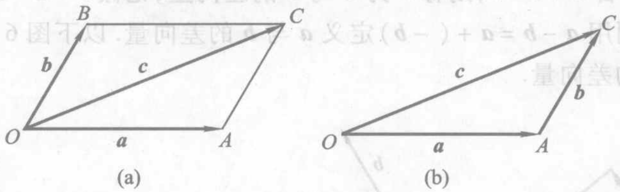


图 6-6

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时，如图 6-7，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$.

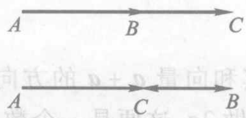


图 6-7

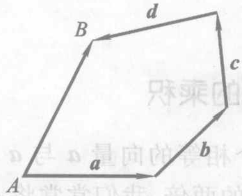


图 6-8

求多个向量的和时，可利用多边形法则(三角形法则的推广)，如图 6-8，将向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 依次首尾相接，有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\overrightarrow{AB}$.

向量加法有以下运算规律.

(1) **交换律** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) **结合律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

这两个运算规律可以分别根据向量加法的定义及图 6-9 和图 6-10 得到证明.

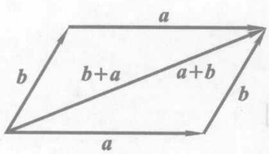


图 6-9

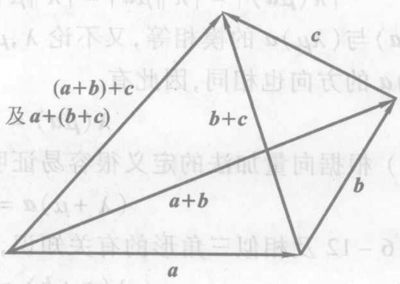


图 6-10

利用加法的逆运算可以定义向量的减法.

定义 2 若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$,则称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量,记做 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

也可以利用 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$ 定义 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量.以下图 6-11 中的 $\boldsymbol{c}$ 都表示 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差向量.

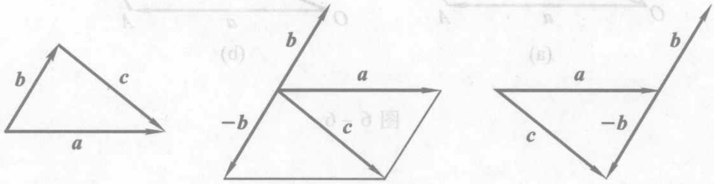


图 6-11

三、数与向量的乘积

如果将两个相等的向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 相加,其和向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同,而大小为 $\boldsymbol{a}$ 的两倍,我们常常将 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ 记做 $2\boldsymbol{a}$,这便是一个数与向量的乘积.一般的,有如下定义.

定义 3 **实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$(叫做数乘向量),$\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向为:当 $\lambda>0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向;当 $\lambda=0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.**

数乘向量有下列运算规律.

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$,

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

证 (1) 由于

$$|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\lambda||\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|=|\lambda\mu||\boldsymbol{a}|=|(\lambda\mu)\boldsymbol{a}|,$$

即 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的模相等,又不论 λ,μ 为什么样的数,由定义可得知 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的方向也相同,因此有

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a};$$

(2) 根据向量加法的定义很容易证明

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$

利用图 6-12 及相似三角形的有关知识,可以得到

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$

由数乘向量的定义可知 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$,因此当 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$ 时,有

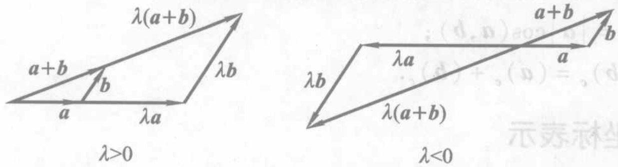


图 6 - 12

$$e_a=\frac{1}{|a|}a=\frac{a}{|a|},$$

由此可以推出下面定理.

定理　设 a 与 b 都是非零向量,则 $a/\!/b$ 的充分必要条件是存在数 λ,使 $b=\lambda a$.

证　充分性是显然的,下面证必要性.

设 $a/\!/b$,则必有 $e_a=e_b$,或 $e_a=-e_b$,即

$$\frac{a}{|a|}=\frac{b}{|b|},\quad \text{或}\quad \frac{a}{|a|}=-\frac{b}{|b|},$$

取 $\lambda=\frac{|b|}{|a|}$或 $\lambda=-\frac{|b|}{|a|}$,则有 $b=\lambda a$,于是定理得证.

四、向量的投影

设向量 a 与 b,如图 6 - 13,过 a 的起点 M 与终点 N 分别做与向量 b 所在的直线垂直的平面,这两个平面分别与 b 所在的直线交于点 M'和 N',由前面讨论知道,一定存在数 λ,使$\overrightarrow{M'N'}=\lambda e_b$,我们将这个数 λ 称为向量 a 在向量 b 上的投影,记作$(a)_b$,即

$$(a)_b=\lambda.$$

将向量 a 与 b 的起点移到一起,如图 6 - 14,规定不超过 π 的角 $\angle AOB=\varphi$ 为向量 a 与 b 的夹角,记做(a,b),即$(a,b)=\varphi$. 另外,规定向量与坐标轴的正方向的夹角为向量与坐标轴的夹角.

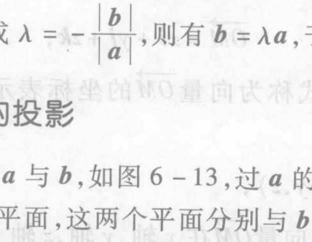


图 6 - 13

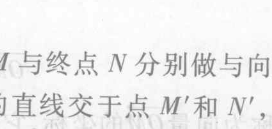


图 6 - 14

由以上定义可以得出**向量的投影具有如下性质**.

(1) $(\boldsymbol{a})_{b}=|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$;

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_{c}=(\boldsymbol{a})_{c}+(\boldsymbol{b})_{c}$.

五、向量的坐标表示

以上所述向量的概念及向量的线性运算都是用几何方法定义的,但是有些问题仅靠几何方法很难解决,因而下面要引进向量的坐标,把向量与数组联系起来,从而可将向量的运算化成数组的运算.

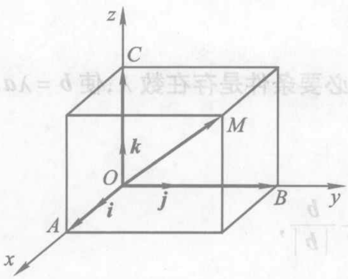


图 6 - 15

如图 6 - 15,设$\overrightarrow{OM}$是起点为原点,终点为$M(x,y,z)$的向量,根据向量的加法,有

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

在 x 轴,y 轴,z 轴的正方向分别取单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$(称为基本单位向量),则存在数 x,y,z,使$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$,于是有

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

我们将此式称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标表示式,它也可以简写为

$$\overrightarrow{OM}=(x,y,z),$$

其中 x,y,z 称为向量$\overrightarrow{OM}$的坐标,它们也是向量$\overrightarrow{OM}$在 x 轴,y 轴,z 轴上的投影.

利用向量的坐标表示式,可以将前面用几何方法定义的向量的模及向量的线性运算化成向量的坐标之间的运算(其中用到向量加法及数乘向量的运算规律).

设 $\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\pm(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=(x_1\pm x_2)\boldsymbol{i}+(y_1\pm y_2)\boldsymbol{j}+(z_1\pm z_2)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=\lambda x_1\boldsymbol{i}+\lambda y_1\boldsymbol{j}+\lambda z_1\boldsymbol{k}.$$

当$\overrightarrow{M_1M_2}$是起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$的向量时(如图 6 - 16),由于

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1},$$

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},$$

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

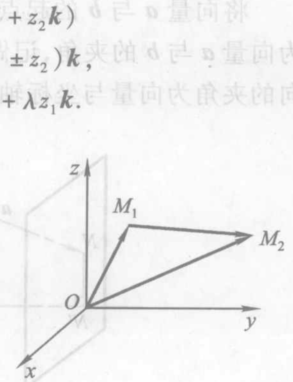


图 6 - 16

因此有

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

此式即为$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式,其中 x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1 为$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标. 如果我们把向量$\overrightarrow{M_1M_2}$平移,使其起点 M_1 移至原点时,则其终点 M_2 将被移到点$(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

利用向量的坐标,可以将 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 表示为

$$x_2=\lambda x_1, y_2=\lambda y_1, z_2=\lambda z_1,$$

或

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}.$$

在此式中,若某个分母(或分子)为零,则相应的分子(或分母)也应取为零. 例如,如果有 $z_2=0$,则意味着向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点与终点的 z 坐标相同,因而向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直于 z 轴,由于 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,故 $\boldsymbol{a}$ 也垂直于 z 轴,所以相应的 z_1 应等于零.

六、向量的方向角与方向余弦

这里要讨论如何用向量的坐标表示向量的方向.

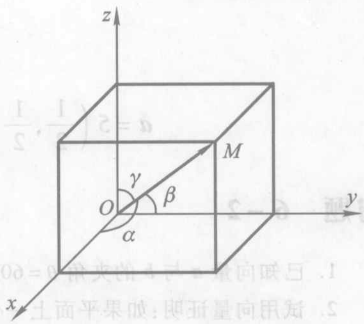


图 6－17

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个坐标轴正方向的夹角分别为 α,β,γ(如图 6－17),则 α,β,γ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角,而 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦. 方向角或方向余弦唯一确定了向量的方向.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,则

$$\boldsymbol{a}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\xlongequal{\text{def}}x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

如将 $\boldsymbol{a}$ 的起点移至原点,则 $\boldsymbol{a}$ 的终点被移到 $M(x,y,z)$,于是 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$,故有

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

由以上三式,又可以得到

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

因而

$$\boldsymbol{e}_a=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

例 1 已知 $M_1(1,-2,3)$，$M_2(0,2,-1)$，求$\overrightarrow{M_1M_2}$的模及方向余弦.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(0-1)\boldsymbol{i}+(2-(-2))\boldsymbol{j}+(-1-3)\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$,

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-4)^2}=\sqrt{33},$$

$$\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{33}},\cos\beta=\frac{4}{\sqrt{33}},\cos\gamma=\frac{-4}{\sqrt{33}}.$$

例 2 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 的模为5，它与 x 轴，y 轴正方向的夹角都是60°，与 z 轴正方向的夹角是钝角，求向量 $\boldsymbol{a}$.

解 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a=|\boldsymbol{a}|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,

由于
$$\alpha=\beta=60^\circ,\quad \cos\alpha=\cos\beta=\frac{1}{2},$$

得
$$\cos^2\gamma=1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},$$

由于 γ 是钝角，故

$$\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\boldsymbol{a}=5\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2},-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right).$$

习题 6-2

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=60°$，且 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=8$，计算 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$和 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

2. 试用向量证明：如果平面上一个四边形的对角线互相平分，则它是平行四边形.

3. 设正六边形 $ABCDEF$（字母顺序按逆时针方向），设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}$和$\overrightarrow{CB}$.

4. 设向量$\overrightarrow{AB}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$，其中 A 点的坐标为 $(2,-1,7)$，求 B 点的坐标.

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$ 的单位向量.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(-4,5,8)$，$\boldsymbol{c}=(-2,1,0)$，求向量 $\boldsymbol{d}$，使 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$ 是零向量.

7. 证明三点 $A(1,0,-1)$，$B(3,4,5)$，$C(0,-2,-4)$ 共线.

8. 设向量 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影.

9. 设点 $A(3,2,-1)$，$B(5,-4,7)$，$C(-1,1,2)$，求$\triangle ABC$ 上由点 C 向 AB 边所引中线的长度.

10. 设点 A，B，M 在一直线上，$A(1,2,3)$，$B(-1,2,3)$，且 $AM:MB=-\frac{3}{2}$，求点 M 的坐标.

11. 设 $A(1,2,-3)$，$B(2,-3,5)$ 为平行四边形相邻的两个顶点，而 $M(1,1,1)$ 为两条对

角线的交点，求其余两个顶点的坐标.

12. 已知三角形的三个顶点在 $A(2,5,0)$，$B(11,3,8)$，$C(5,1,12)$，求其重心的坐标.

13. 已知点 $M(4,\sqrt{2},1)$，$N(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{MN}$ 的模，方向余弦和方向角.

14. 设一向量与 x 轴和 y 轴的夹角相等，而与 z 轴的夹角是前者的两倍，求此向量的方向角.

15. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与单位向量 $\boldsymbol{j}$ 成 $60°$ 角，与单位向量 $\boldsymbol{k}$ 成 $120°$ 角，且 $|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{2}$，求向量 $\boldsymbol{a}$.

16. 向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于两向量 $\boldsymbol{b}=(7,-4,-4)$ 和 $\boldsymbol{c}=(-2,-1,2)$ 夹角的平分线，且 $|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{6}$，求向量 $\boldsymbol{a}$.

第三节 向量的乘积

一、向量的数量积

1. 数量积的概念

在物理学中我们知道，当质点在力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿某一直线由 A 移动到 B 时，如图 6－18 所示，如果记 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{s}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{s}), \tag{1}$$

其中 $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{s})$ 为向量 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 的夹角. 两个向量之间的这种运算有时会在其他问题中遇到，为了更方便地讨论这种运算，给出如下定义.

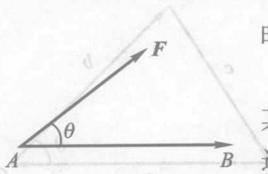


图 6－18

定义 1 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为两向量，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记做 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，其中 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

根据向量的投影定理，可以得到向量的数量积与向量的投影有如下关系：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=|\boldsymbol{a}|(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}},$$

$$(\boldsymbol{a})_{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|},\quad (\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

由数量积的定义可知，(1) 式中的功可以表示成

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}.$$

数量积有如下运算规律.

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$ (λ 是数);

(3) 分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

证 (1) 根据数量积的定义，交换律显然成立；

(2) 如图 6－19，当 $\lambda>0$ 时，$\cos(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，当 $\lambda<0$ 时，$\cos(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，因此有

$$(\lambda \boldsymbol{a})\cdot \boldsymbol{b}=|\lambda \boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\lambda \boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\lambda||\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\lambda \boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

$$=\pm\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|(\pm\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}))=\lambda|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$$

用同样方法可证明 $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$；

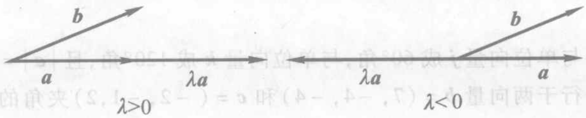


图 6－19

（3）根据向量的数量积与向量的投影的关系及投影定理，有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_c$$

$$=|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{a})_c+|\boldsymbol{c}|(\boldsymbol{b})_c=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}.$$

例 1 试用向量证明三角形的余弦定理.

证 如图 6－20，有

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

因此
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\pi-\theta)\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta,\end{aligned}$$

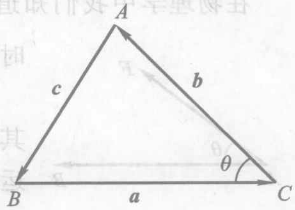


图 6－20

这就证明了余弦定理.

2. 数量积的坐标表示式

设向量

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k},$$

由数量积的运算规律，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\cdot(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})\\&=x_1x_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i})+x_1y_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j})+x_1z_2(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k})+y_1x_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i})+y_1y_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j})\\&\quad+y_1z_2(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k})+z_1x_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i})+z_1y_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j})+z_1z_2(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}),\end{aligned}$$

根据数量积的定义，有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0,$$

因此得

$$\boxed{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.}$$

此式称为数量积的坐标表示式. 由此式可以得到