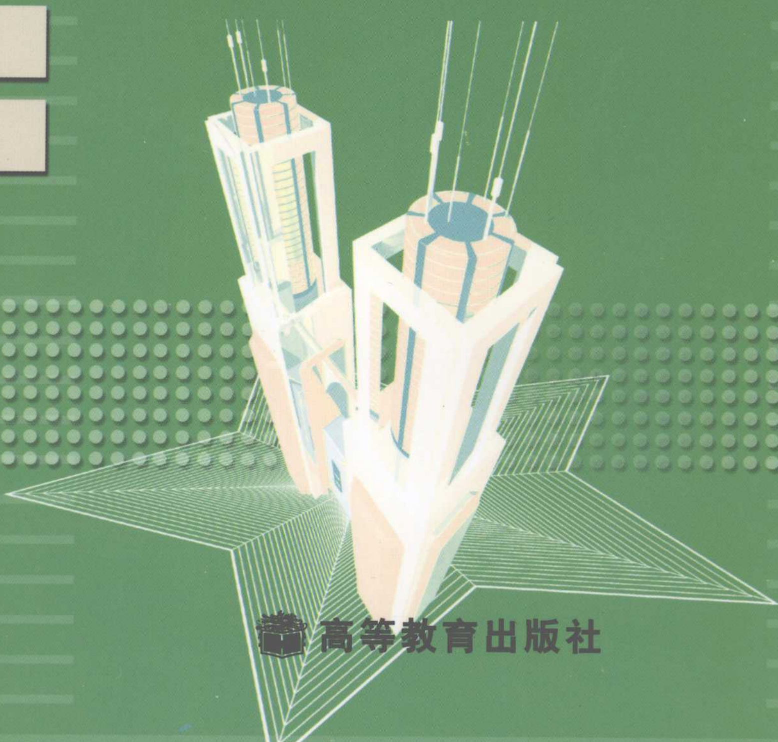
高等学校教材

工程数学

计算方法

华中科技大学数学系　张诚坚　何南忠



高等教育出版社

高等学校教材

工程数学
计算方法

华中科技大学数学系
张诚坚　何南忠

高等教育出版社

内容提要

本书是为高等学校工科类专业计算方法课程编写的教材. 本书共分六章，主要内容包括绪论，非线性方程的数值解法，线性方程组的数值解法，插值方法，数值积分及常微分方程初值问题的数值解法.

该教材以介绍通用数值算法为基础，同时引入现代算法的内容，书中既注重算法理论的严谨性，又突出算法设计的原始思想与实现技巧，从而使算法理论与算法实现形成一体化.

本书可作为高等学校工科类各专业的教材，也可供科技人员与工程技术人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

工程数学. 计算方法 / 张诚坚，何南忠. —北京：高等教育出版社，2008. 1

ISBN 978-7-04-022594-5

Ⅰ. 工… Ⅱ. ①张…②何… Ⅲ. ①工程数学-高等学校-教材②数值计算-高等学校-教材 Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 190516 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2008年1月第1版
印　　张	5.375	印　　次	2008年1月第1次印刷
字　　数	130 000	定　　价	8.90元

物料号　22594-00

前　　言

随着科学技术的高速发展，大量复杂的科学计算问题呈现在人们面前，要完成这些人自身所不能及的工作，必须借助于计算机这一人类有史以来最伟大的科技发明，而使计算机有效解决科学计算问题的关键技术是计算方法．鉴此，数值计算方法是每一位科研人员和工程技术人员所必备的知识，也是每一位理工科大学生必修的重要课程．本书正是为顺应这一知识需求而编写的．

数值计算方法包含十分丰富的内容，但是作为一门基础课教材，不可能也不必要面面俱到，重要的是使读者通过一些典型、通用的数值计算方法掌握方法构造的基本思想及其实现技巧，从而达到触类旁通的功效．在数值计算方法的基本概念与理论方面，我们力求严谨，使读者通读完全书后具备初步的算法分析能力．

全书共分六章，其内容分别为绪论、非线性方程的数值解法、线性方程组的数值解法、插值方法、数值积分、常微分方程初值问题的数值解法．此外，每章配备了一定量的习题，以使读者通过练习，进一步掌握教材内容．

在编写本书过程中，我们得到了上海大学高健副教授及华中科技大学博士生王志勇、谷伟、李东方、陈浩、牛原玲等的大力帮助，此外也得到了校内外许多同行的支持与鼓励，编者对此深表感谢．

由于编者水平所限，仓促付梓，书中必有疏漏之处，诚望读者指正．

张诚坚　何南忠

2007 年 7 月于武汉

目 录

第一章 绪　论

科学技术发展到今天, 计算机的应用已渗透到社会生活的各个领域. 其中, 数值计算是计算机处理实际问题的一种关键手段, 从宏观天体运动学到微观分子细胞学说, 从工程系统到非工程系统, 无一能离开数值计算. 数值计算这门学科的诞生, 使科学发展产生了巨大飞跃, 它使各科学领域从定性分析阶段走向定量分析阶段, 从粗糙走向精密. 由此可见, 数值计算方法是当今每一位从事科学研究与应用的人不可缺少的知识. 本章主要介绍数值算法的预备知识及其基本思想.

§1.1 数值算法概论

一个实际问题当采用计算机来求解时, 主要分下面几个步骤:

$$\boxed{\text{实际问题}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{建立数学模型}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{构造数值算法}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{编程上机}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{获取近似结果}}$$

由此可知, **数值算法**是利用计算机求解数学问题近似解的方法. 其中, 所获近似解也称为原问题的**数值解**或**逼近解**. 当构造一个数值

算法时, 它既要面向数学模型, 使算法能尽可能地仿真原问题; 同时, 它也要面向计算机及其程序设计, 要求算法具递推性、简洁性及必要的准确性, 使其能借助于计算机最终在尽可能少的时间内获得符合原问题精度要求的数值解.

例 1.1 计算积分

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5}\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, 30.$$

解 通过直接计算可产生递推关系

$$I_n = -5I_{n-1} + \frac{1}{n}, \quad I_0 = \ln\frac{6}{5} \approx 1.8232\mathrm{e}-001.^{①} \tag{1.1}$$

且由经典微积分知识可推得 I_n 具如下性质:

(1) $I_n > 0$,

(2) I_n 单调递减,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$,

(4) $\dfrac{1}{6n} < I_{n-1} < \dfrac{1}{5n} \quad (n > 1)$.

下面我们用两种算法计算 I_n.

算法 A: 按公式 (1.1) 自 $n=1$ 计算到 $n=30$, 产生计算结果, 见表 1.1.

表 1.1

n	1	2	3	4
I_n	8.8392e-002	5.8039e-002	4.3139e-002	3.4306e-002
n	5	6	7	8
I_n	2.8468e-002	2.4325e-002	2.1233e-002	1.8837e-002
n	9	10	11	12
I_n	1.6926e-002	1.5368e-002	1.4071e-002	1.2977e-002

注: ① e − 001 表示 10^{-1}

续表

n	13	14	15	16
I_n	1.2040e-002	1.1229e-002	1.0522e-002	9.8903e-003
n	17	18	19	20
I_n	9.3719e-003	8.6960e-003	9.1515e-003	4.2426e-003
n	21	22	23	24
I_n	2.6406e-002	-8.6575e-002	4.7635e-001	-2.3401e+000
n	25	26	27	28
I_n	1.1740e+001	-5.8664e+001	2.9336e+002	-1.4667e+003
n	29	30		
I_n	7.3338e+003	-3.6669e+004		

由表 1.1 可见, 该算法产生的数值解自 $n=18$ 开始并未呈现单调递减性质且出现负值和大于 1 的数, 这显然与 I_n 的固有性质相矛盾, 因此本算法所得数值解不符合原问题要求. 究其原因, 我们在构造算法时未能充分考虑原积分模型的性态, 即由公式 (1.1), 其计算从 I_{n-1} 到 I_n 每向前推进一步, 其计算值的舍入误差便增长 5 倍, 误差由此积累传播导致最终数值解与原问题真解相悖的结果. 为克服这一缺陷, 我们改进算法 A 为:

算法 B: 第 1 步, 由性质 (4), 取

$$I_{30} \approx \frac{\dfrac{1}{6\times 31}+\dfrac{1}{5\times 31}}{2} = 5.9140\mathrm{e}-003,$$

第 2 步, 用递推公式

$$I_{n-1} = -\frac{I_n}{5} + \frac{1}{5n}, \tag{1.2}$$

自 $n=30$ 计算到 $n=1$. 由于该算法每向后推进一步, 其舍入误差便减少 5 倍, 因此获得合符原积分模型性态的数值结果 (见表 1.2).

表 1.2

n	29	28	27	26
I_n	5.4839e-003	5.7998e-003	5.9829e-003	6.2108e-003
n	25	24	23	22
I_n	6.4501e-003	6.7100e-003	6.9913e-003	7.2974e-003
n	21	20	19	18
I_n	7.6314e-003	7.9975e-003	8.4005e-003	8.8462e-003
n	17	16	15	14
I_n	9.3419e-003	9.8963e-003	1.0521e-002	1.1229e-002
n	13	12	11	10
I_n	1.2040e-002	1.2977e-002	1.4071e-002	1.5368e-002
n	9	8	7	6
I_n	1.6926e-002	1.8837e-002	2.1233e-002	2.4325e-002
n	5	4	3	2
I_n	2.8468e-002	3.4306e-002	4.3139e-002	5.8039e-002
n	1	0		
I_n	8.8392e-002	1.8232e-001		

对上述例子, 我们采用的是由原模型精确解的递推关系来实现计算机求解的, 这种数值求解方法称为**直接法**. 在大多数情况下, 我们只能获得原模型解的近似递推关系, 即将连续系统离散化, 这种求解方法称为**离散变量法**. 如在后继章节中将要学习的代数方程 (组) 的迭代法、微分方程 (组) 的数值积分法及差分法等均属这类方法.

作为离散变量方法的实例, 我们考察结构力学、热传导问题中经常出现的数学定解问题 —— 两点边值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad x \in (a,b) \\ y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \end{cases} \tag{1.3}$$

的数值解法, 其中 $p(x)$、$q(x)$ 及 $f(x)$ 是 (a,b) 上的给定函数, α、β 为已知常数, 且设问题 (1.3) 在 $[a,b]$ 上恒有唯一解 $y(x)$. 其解法步骤如下:

(1) 将区间 $[a,b]$ 离散化, 即将 $[a,b]N$ 等分, 所得节点为

$$x_i = a + ih \quad (i = 0,1,2,\cdots,N;\ x_0 = a,\ x_N = b),$$

其中 $h = \dfrac{b-a}{N}$ 称为方法的步长;

(2) 将问题 (1.3) 离散化. 由于

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} = y'(x_i) + O(h^2),$$

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = y''(x_i) + O(h^2),$$

故可略去上两式中的余项 $O(h^2)$, 并取 $y_i \approx y(x_i)$, 即得

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad \text{(一阶中心差商)} \tag{1.4}$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad \text{(二阶中心差商)} \tag{1.5}$$

将 (1.4)、(1.5) 代入 (1.3) 中得差分格式

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \\ \qquad\qquad\qquad i = 1,2,\cdots,N-1, \\ y_0 = \alpha, \qquad\qquad y_N = \beta, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$ 及 $f_i = f(x_i)$. (1.6) 实质是含 $N-1$ 个未知数 $y_1, y_2, \cdots, y_{N-1}$ 的线性方程组, 由此可解得数值解 $y_1, y_2, \cdots, y_{N-1}$.

§1.2 预 备 知 识

在相继算法理论的学习中, 我们将涉及数值解的误差估计、稳定性及收敛性等, 为此本章引入一些相关的基础知识.

1.2.1 范数

定义 1.1 称 n 维实空间 $\mathbf{R}^n$ 上的一个非负函数 $\|\bullet\|$ 为**范数**, 若其满足

(1) $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n)$,

(2) $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$, $\forall\alpha \in \mathbf{R}$ 及 $\forall\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$,

(3) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$, $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$.

对一维实空间 $\mathbf{R}$ 而言, $\|\boldsymbol{x}\|$ 即为绝对值 $|x|$. 下面我们将主要涉及 $l_p(p=1,2,\cdots)$ 范数:

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n.$$

特别, l_∞ 范数即为

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\|\boldsymbol{x}\|_p = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|.$$

对于 $\mathbf{R}^n$ 上的任意两种范数有如下等价性定理:

定理 1.1 若 $\|\bullet\|$ 与 $\|\bullet\|'$ 为 $\mathbf{R}^n$ 上的任意两种范数, 则存在正常数 $C_2 \geqslant C_1$ 使得

$$C_1\|\boldsymbol{x}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\|' \leqslant C_2\|\boldsymbol{x}\|, \quad \forall\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n.$$

在范数概念下, 我们即可讨论向量序列的收敛性问题.

定义 1.2 设有向量序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)} \in \mathbf{R}^n|\boldsymbol{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_n^{(k)})^{\mathrm{T}}\}$, 若

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则称序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

定理 1.2 在空间 $\mathbf{R}^n$ 中, 序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于向量 $\boldsymbol{x}$ 的充要条件是存在范数 $\|\bullet\|$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\| = 0.$$

证 一方面, 若序列 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于向量 $\boldsymbol{x}$, 则

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\|_\infty=0;$$

另一方面, 若存在范数 $\|\bullet\|$ 使得

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\|=0,$$

则由定理 1.1, 存在常数 $C_2\geqslant C_1>0$, 使得

$$C_1\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\|\leqslant\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\|_\infty\leqslant C_2\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\|.$$

因此, 由夹逼定理知 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\boldsymbol{x}^{(k)}-\boldsymbol{x}\|_\infty=0$, 故 $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ 收敛于 $\boldsymbol{x}$.

定义 1.3 设 A 为 n 阶方阵, $\|\bullet\|$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的某范数, 则称

$$\max_{\|\boldsymbol{x}\|=1}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|\quad(\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n)$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的从属于该向量范数的范数, 记为 $\|\boldsymbol{A}\|$.

利用定义 1.3 可直接推得其矩阵范数具有如下性质:

(1) 对任意 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $\|\boldsymbol{A}\|\geqslant 0$, 且 $\|\boldsymbol{A}\|=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$;

(2) 对任意实数 k 及任意 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 有

$$\|k\boldsymbol{A}\|=|k|\|\boldsymbol{A}\|;$$

(3) 对任意两个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 有

$$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|+\|\boldsymbol{B}\|,\quad \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|;$$

(4) 对 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 及任意 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 有

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|.$$

由矩阵范数的定义及其性质可知, 矩阵范数与向量范数之间存在着一定的对应关系, 特别地, 性质 (4) 称为两者之间的**相容性**.

定理 1.3 设有 n 阶实方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 则与 l_1、l_2、l_∞ 范数相容的矩阵范数分别为

$$\|\boldsymbol{A}\|_1=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|, \tag{1.7}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}, \tag{1.8}$$

$$\|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|, \tag{1.9}$$

其中 $\rho(\bullet)$ 为矩阵的谱半径, 其满足

$$\rho(\boldsymbol{B})=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i^{\boldsymbol{B}}|,$$

$\lambda_i^{\boldsymbol{B}}$ 为方阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值.

证 此处仅证 (1.8), 其余两式类似可证. 由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为对称非负定阵, 则其特征值 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 非负, 且存在 n 维正交方阵 $\boldsymbol{H}$, 使得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_i)\boldsymbol{H},$$

其中

$$\mathrm{diag}(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

$\forall \boldsymbol{x}\in\{\boldsymbol{x}|\quad \|\boldsymbol{x}\|_2=1\}$, 若记 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$, 则有

$$\|\boldsymbol{y}\|_2^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}=\|\boldsymbol{x}\|_2^2=1,$$

及

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{Ax}\|_2^2 &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}\\ &= (\boldsymbol{Hx})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_i)(\boldsymbol{Hx})\\ &= \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{y}_i^2\\ &\leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\lambda_i\right)\|\boldsymbol{y}\|_2^2.\end{aligned}$$

从而

$$\|\boldsymbol{Ax}\|_2 \leqslant \sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}.$$

另一方面, 若 $\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$ 对应矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的单位特征向量为 $\tilde{\boldsymbol{x}}$, 则

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{A}\|_2^2 &\geqslant \|\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\|_2^2\\ &= \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\\ &= \tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\tilde{\boldsymbol{x}}\\ &= \rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_2^2\\ &= \rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),\end{aligned}$$

即 $\|\boldsymbol{A}\|_2 \geqslant \sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}$. 故式 (1.8) 得证.

定理 1.4 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 则对任意矩阵范数 $\|\bullet\|$ 有 $\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \|\boldsymbol{A}\|$.

证 设 λ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值, $\boldsymbol{x}$ 为其相应的特征向量, 则

$$|\lambda|\|\boldsymbol{x}\| = \|\lambda\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{Ax}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{x}\|,$$

即 $|\lambda| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|$. 故 $\rho(\boldsymbol{A}) \leqslant \|\boldsymbol{A}\|$.

此外矩阵范数与谱半径之间还存在如下关系:

定理 1.5 $\forall\varepsilon > 0$, 必存在 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中的某范数 $\|\bullet\|$, 使得

$$\|\boldsymbol{A}\| \leqslant \rho(\boldsymbol{A}) + \varepsilon, \quad \boldsymbol{A} \text{ 为任意 } n \text{ 阶方阵}.$$

记 $\mathbf{R}^{n\times m}$ 为全体实 $n\times m$ 阶矩阵的集合, 在矩阵范数的概念下, 我们可讨论矩阵序列的收敛性.

定义 1.4 设有矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}^{(k)} | \boldsymbol{A}^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})\}\subset\mathbf{R}^{n\times m}$, 若

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}=a_{ij},\quad i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m,$$

则称矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}^{(k)}\}$ 收敛于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}$.

矩阵序列有类似于向量序列的收敛性结果.

定理 1.6 设有矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}^{(k)}\}\subset\mathbf{R}^{n\times n}$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^{(k)}=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是存在矩阵范数 $\|\bullet\|$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{A}^{(k)}-\boldsymbol{A}\|=0.$$

进一步有:

定理 1.7 $\forall\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $\lim\limits_{m\to\infty}\boldsymbol{A}^m=\mathbf{0}$ 的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{A})<1$.

证 根据定理 1.6, 本定理仅需证明: 对某矩阵范数 $\|\bullet\|$, $\lim\limits_{m\to\infty}\|\boldsymbol{A}^m\|=0$ 的充要条件是 $\rho(\boldsymbol{A})<1$. 事实上, 一方面由定理 1.4, 有

$$[\rho(\boldsymbol{A})]^m=\rho(\boldsymbol{A}^m)\leqslant\|\boldsymbol{A}^m\|\to 0\quad(m\to\infty),$$

从而 $\rho(\boldsymbol{A})<1$. 另一方面, 由于 $\rho(\boldsymbol{A})<1$, 则存在 $\varepsilon>0$, 使得

$$\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon<1.$$

进一步, 由定理 1.5 存在 $\mathbf{R}^{n\times n}$ 中某范数 $\|\bullet\|$ 使得

$$\|\boldsymbol{A}^m\|\leqslant\|\boldsymbol{A}\|^m\leqslant(\rho(\boldsymbol{A})+\varepsilon)^m\to 0\quad(m\to\infty).$$

由此得 $\lim\limits_{m\to\infty}\|\boldsymbol{A}^m\|=0$.

定理 1.8 设有 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 若存在矩阵范数 $\|\bullet\|$, 使得 $\|\boldsymbol{A}\|<1$, 则 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 非奇异, 且有

$$\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|\boldsymbol{A}\|},$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵.

证 由于

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i^{\boldsymbol{A}}| \leqslant \|\boldsymbol{A}\| < 1,$$

则 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 非奇异, 且 $\lim\limits_{m\to\infty} \boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{0}$. 又

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k) = \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{k+1},$$

即

$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^k = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{k+1}),$$

令 $k\to\infty$, 即得

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k.$$

由此得

$$\|(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|\boldsymbol{A}\|^k = \frac{1}{1-\|\boldsymbol{A}\|}.$$

1.2.2 差分方程

形如

$$F(t; x(t), x(t+1), \cdots, x(t+k)) = 0, \tag{1.10}$$

且 $x(t)$、$x(t+k)$ 均含于 (1.10) 中的方程称为 k **阶差分方程**. 在今后数值算法的学习中, 我们常常遇见的是 (1.10) 中 t 取有理数或整数情形的差分方程. 在这里我们重点介绍线性差分方程

$$\sum_{j=0}^{k} a_j(n) x_{n+j} = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{1.11}$$

其中系数 $a_j(n)$、$b_n \in \mathbf{C}$, 且 $a_k(n)a_0(n) \neq 0$. 若给定其 k 个初始值 $x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}$, 则由 (1.11) 即可求出其解序列 $\{x_n\}$. 特别地, 若 $b_n = 0 (n = 0, 1, 2, \cdots)$, 则称之为**齐次的**, 否则称为**非齐次的**.