高等院校素质教育通选课教材

数学模型八讲

——模型 模式与文化

雷功炎 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高等院校素质教育通选课教材

数学模型八讲

——模型 模式与文化

雷功炎 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学模型八讲:模型、模式与文化/雷功炎编著.—北京:北京大学出版社,2008.2
ISBN 978-7-301-12807-7

Ⅰ.数… Ⅱ.雷… Ⅲ.数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 153853 号

书　　名:数学模型八讲——模型、模式与文化
著作责任者:雷功炎　编著
责 任 编 辑:曾琬婷
封 面 设 计:林胜利
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-12807-7/O·0730
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址:http://www.pup.cn　　电子邮箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021　出版部 62754962
印 刷 者:北京大学印刷厂
经 销 者:新华书店
787mm×960mm　16 开本　12.25 印张　260 千字
2008 年 2 月第 1 版　　2008 年 2 月第 1 次印刷
印　　数:0001—4000 册
定　　价:22.00 元

内容简介

本书系作者在近年来为北京大学本科生所开设的一门数学与自然科学类通选课的讲义基础上经补充、修改而成.全书共分八讲,分别讨论数学中的基本哲学问题,数学悖论的意义,对称概念与艺术和社会学的联系,叶序等生物学规律的数学表达,变分问题的简要历史和意义,作为一种数学模式的最小二乘法,概率统计方法的应用和意义等课题.本书力图从一个更为基本的观点阐明数学的本质与意义,数学与其他科学的关系;说明应如何认识、理解与把握数学.全书试图从一个与经典数学教材不同的角度讲授有关内容,强调对问题的整体理解,避免过分的形式化,当然也包含有为说明问题所必须的推导;强调把握思想而不是具体的方法和技巧.

本书可作为综合大学、师范院校数学与自然科学类通选课教材,也可供高等院校数学模型课程作为参考教材或辅助读物,或供高等院校其他专业师生或中学数学教师及各类工程科技人员阅读参考.

前言

作为教学改革的一项重大举措，21 世纪初，北京大学为全校本科生增设了一类新型课程——通选课，其目的是进一步贯彻“加强基础，淡化专业，分流培养，因材施教”的方针，打破院系与学科界限，把按专业划分的以传授知识为主要目的分门别类的课程，转变为强调指导思想与观点的阐述，强调对知识的整体把握，侧重学科联系，侧重学生能力提高的通识教育，力图建立以素质培育为导向的新型课程体系. 在此范围内，笔者有幸开设了一门以介绍数学模型为具体内容，试图贯彻以上方针的课程. 本书就是在原有讲稿基础上，在通选课所应遵循的原则指导下，修改、充实、润色而成.

通选课的总体目标无疑是正确的，但这并不意味着所开设的每一门课程都达到了要求. 笔者自知，他的课程与理想的通选课就有相当距离. 这种现象是很自然的，主要出自于以下两方面原因. 其一是：这的确是一项意义深远的改革，尽管国内外优秀的同类课程不胜枚举，但总的说来，尚无系统的、全面成熟的经验可供借鉴. 其二则是教师个人的原因. 北京大学人才济济，无疑有众多学养深厚的老一辈学者或青年才俊开设了非常优秀的通选课；但也毋庸讳言，如笔者这样的教师，囿于自身成长年代的社会氛围、所受教育的背景、个人品性的愚拙，并非是神话中的百宝箱，想要什么，就能给出什么. 对笔者而言，通识教育的要求，首先就是对教师自身的挑战. 这一挑战涉及颇广，它不仅涉及教师自身的知识结构、深度、广度，认识能力与表达能力，更要涉及教师自身的哲学指导思想，对学科内容和方法的理解与认识. 因此，对于不同的通选课程和相应教材要具体分析，认真看待每门课程的成功与不足. 就笔者个人而言，则难免有滥竽之嫌，出版这部教材的目的主要是报告一下，笔者在这方面到底想了什么？做了什么？总结经验，吸取教训，听取各方面的批评与指正，以便改进. 丑媳妇也要见公婆嘛！

手头的这部讲义以数学模型和模式的讨论为主要内容，这是因为笔者此前曾为北京大学数学系与部分理科院系本科生开设过一门数学模型课程，部分学生对其很感兴趣，因而建议在更大的范围内讲授有关内容. 这就是与此有关的通选课的缘起. 然而，通选课不同于讲授应用数学内容的专业课，课程素材即便类似，渗透其中的指导思想，所要传达的信息，讲授的角度、重点、编排都会完全不同. 前面已经指出，通选课不以介绍特定的专业知识、技巧与方法为目的，它的精髓在于讲授思想、深层次的哲学观点，强调学科联系，培养学生把握辩证唯物主义的观点和方法论. 这是一个困难的任务，笔者只不过做了些许尝试.

本书的第一讲探讨数学中的主要哲学问题，其目的在于说明：数学不仅仅是一种专门知识或研究问题的独特方法，它实际与研究者本身的世界观密切关联；数学哲学不仅仅是对

数学的不同观点，而是直接影响到你认同什么样的数学，如何按照你所欣赏的途径学习与发展数学，以至影响一个人对一般科学思想与方法的理解. 显然数学哲学问题是没有唯一答案的，书中力图客观地介绍不同流派的基本思想，当然，侧重点是在笔者个人赞同的派别上. 这一讲中还试图阐述数学与其他领域，或者大言不惭地说数学与文化的关系. 显然笔者本人不具备全面地明晰阐述如上问题的学识素养，因而不得不把讨论局限在数学与计算机科学以及艺术的关系上. 虽然限定后的两个方面仍然超出笔者的能力，但此处不揣冒昧、大胆放言的原因在于：笔者深感有关的问题现今已经实际影响了学生的行为，影响了很多学生对知识的选择与把握. 无论如何，把矛盾揭示出来总是有益的.

本书的素材除了包含某些数学模型之外，还含有与“数学模式”有关的部分内容. “数学模式”这个词的使用当然与数学哲学中的结构主义流派有关，但书中是在更“自由”的意义上使用这一词语的. 例如在第二讲中，我们就把撒谎者悖论所含的逻辑结构视为一种“模式”，这一模式不仅出现在众多悖论的构成中，还以更复杂的形式表现在哥德尔不完全性定理的证明里，它的变形又是图灵停机问题的证明主线，它还是著名的集合论悖论——罗素悖论的本质. 实际上存在有更多的数学物理的重要结果，它们均可视做这同一模式在不同领域的表达；不仅如此，这一模式还被诸多的文学家、艺术家以多种方式幻化在各自的作品里. 如此种种不仅表现了数学模式的普遍意义，也从另一个角度说明了数学与其他领域的关系. 深刻的思想并非数学家所独有，不同领域的优秀人物“英雄所见略同”. 本书还探讨了其他几种“模式”，如对称模式、变分模式、投影模式，等等. 这种处理是否恰当，欢迎读者指正.

本书强调的另一主题是数学与其他学科、其他领域的广泛联系和交互作用. 除了传统的物理学、力学领域外，第三讲中介绍了如何利用“群”的概念，刻画由两性关系所决定的早期人类社会结构. 第八讲中，叙述了如何利用概率统计方法“量化”一个作家的文学特点. 尽管有关用数学方法处理文学作品的理论与方法还不完全成熟，我们仍将其收入本书，目的在于说明：对于人文、社会科学而言，数学仍是一个可能有所作为的尚待开拓的领域. 本书特别强调数学与生物学的关系，第四、第五讲完全用于这方面的讨论. 数学生物学实际是现代科学的前沿，它不仅包含生动、丰富的内容，而且处于蓬勃发展之中. 本书的内容只是一个引子，一个十分初等的介绍，目的仅在于引起读者对有关课题的关注.

本书中有部分内容需要读者有较强的数学基础，例如第六讲中关于控制论模型的论述，第七讲中关于“广义逆”的一节等. 对于是否将这些内容按现在的形式保留在书中，笔者曾考虑再三，最终还是留下了. 其原因是：读者或选课的学生中有相当一部分具有很不错的数学修养，他们不仅希望通过通选课得到思想上的启发，对学科整体有所把握，还希望对某些具体问题与方法有比较确切的了解，这一部分内容就是为了满足他们的需要而安排的；对于阅读这些内容有数学障碍的读者，则完全可以将它们跳过，丝毫不会影响对本书主旨的把握.

本课程考核主要采取期末课程论文的形式，题目由学生自己选定. 由于选课的学生文理科各系均有，数学基础参差不齐，独立完成论文有困难者允许以某个专题或数学课程的读书

报告代替，唯一的要求是不得抄袭. 凡是认真对待，有独立见解，即使未必完善，失之偏颇者也予以鼓励，目的是提倡学生独立思考，发挥创造力与想象力. 笔者认为，凡是以探讨思想观点、强调整体把握与学科联系，不以讲授专门技术为主要目的通选类课程，在考查学生方面均不宜过严、过细. 理由有二，一是不合课程宗旨，二是难于把握. 本书最后，选辑了学生论文所使用过的 50 个题目作为附录，从一个侧面大致反映了学生的学习情况.

本书在编写过程中得到了学校有关部门，尤其是数学科学学院及北京大学出版社等部门各级负责同志的关怀和支持，也得到了众多师友的指导和帮助. 笔者特别要感谢李忠、张顺燕、王长平、郭懋正、徐树方、刘旭峰、刘力平、周铁、邓明华诸位先生，他们从多个方面给予笔者以巨大的支持、鼓励和帮助. 张树义先生协助作者绘制了第三讲中的图 3-3 和图 3-4，责任编辑曾琬婷以及出版社刘勇同志也为本书的出版付出了诸多心血，在此一并致以诚挚的谢意. 最后还要感谢我学数学的女儿雷悦，她阅读了全部手稿，提出了一些其他批评者不便直抒的意见.

雷功炎
2007 年 6 月

目　录

第一讲

数学模型、模式与文化

本讲从关于数学模型的论述说起，概述了数学哲学的基本问题，介绍了数学哲学中理性主义和经验主义两大流派的根本差别；进而通过对逻辑主义、直觉主义和形式主义数学观点的较详细叙述，特别是通过哥德尔的重大发现，揭示了什么才是正确合理的数学观．在余下的篇幅中，论述了证明在数学中的真实地位，讨论了自由思想、观察、实验、灵感在学习与发展数学中的作用．提倡以外师造化、内法心源作为学习和发展数学的基本原则．最后简要讨论了数学与计算机科学和艺术的关系．

本书的首要目的是通过对若干数学模型和模式的介绍，探讨什么是数学，如何看待数学的起源和特点，如何认识数学的抽象性和逻辑严密性，如何认识数学的真理性和实践性，如何认识数学与其他人文及自然科学的关系，所涉及的模型和模式主要是作为讨论问题所必须的媒介及传达思想的载体．我们试图从一个更基本的角度，和读者一起探讨数学的本质，把握学习、研究和运用数学的关键，提高对数学的认识和素养．本书的第二个目的是在前述框架之下，尽可能介绍一些有用的数学知识，以满足部分对数学本身要求较多的读者之需要．但应说明，全书的内容都保持在基本数学知识的范围内．

这一讲是全书的绪论，试图讨论的主要内容是如何从整体上认识与理解数学，如何看待数学与其他学科的关系．笔者认为：要掌握数学，不仅要熟悉数学特定的内容、方法和语言，还要把握数学背后的哲学思想，养成正确的思维方式和恰当的心理状态；对数学的正确认识不仅仅是一种看法、一种知识，它直接影响我们如何学习与研究数学，追求什么样的数学．本讲的很多内容应属于数学哲学的讨论范畴，也就是说不属于数学本身，而是“关于数学”的各种说法．在一些人看来，这是一个费力不讨好的题目，英国著名数学家、剑桥分析学派的代表人物哈代（G. H. Hardy）就曾直言不讳地说过：“一个职业数学家如果发现自己在写关于数学的东西，一种忧伤之情将油然而生．数学家的职责是实干，证明新的定

理,扩展数学知识,而不是津津乐道于自己或其他数学家已经做过的事情.政治家瞧不起时事评论家,画家瞧不起艺术批评家,生物学家、物理学家和数学家们通常也有类似的感情,没有比实干者对评论家的蔑视更深刻、更有理了.解释、批评、鉴赏是二等智力的活儿."哈代宣称,他只是由于年逾花甲,不再拥有新鲜的智力和充沛的精力,无法从事充满挑战和创造活力的数学研究,才转而来写"关于数学"的文章.

然而,哈代的上述论点是值得商榷的.他本人的经历对此就提供了一个有趣的例证.在哈代不情愿做的"二等活儿"上,其成果远不如他做过的"一等活儿"更能经受时间的考验.现在"哈代圆法"、"哈代定理"、"哈代空间"等方法与课题,仍然是分析学中重要的工具和不衰的研究领域,但他"关于数学"的一些论断却已经被事实所否定.哈代曾断言:数学是一门"无害而清白"的职业,数论与相对论则是这种清白学问的两个范例.理由是:真正的数学对战争毫无影响,至今还没有人能发现有什么火药味的东西是数论和相对论造成的,而且将来很多年也不会有人能发现这类事情.这是他在1940年的说法.然而,1945年日本列岛上空爆炸的原子弹就对这一说法做了第一次否定.此外,自20世纪以来在中东和前南斯拉夫等地区内发生的一系列高科技战争,不仅使用了数论方法编制和解译通讯密码,而且高精度制导炸弹、夜视仪等多种现代武器的制造和使用都与数学有关.可见数学并不"清白".哈代还认为数学知识是作为一门艺术而存在的,他自己从未做过任何有实际用途的工作,他的数学发现"不可能给世界的康乐带来些微直接的好或坏的影响".然而哈代过谦了,他曾就一篇有关遗传学的文章给某杂志编辑部写过一封短信,发表自己的见解,就是这一封信使得哈代的名字与现代遗传学联系在一起.信中的内容即是今日所谓的哈代-温伯格(Hardy-Weinberg)定律,刻画了生物进化过程中基因组合的发展规律.

哈代是一位有成就的数学家,此处举出他的谬误并不是为了嘲讽.我们的目的只在于说明:数学哲学的讨论绝非是茶余饭后的谈资,绝非是"二等智力"的工作,并不能轻而易举地得到可靠的结论.诚然,任何哲学都不能代替具体深入的科学研究,但哲学思想确实在无形之中,在自觉与不自觉之中支配着每个学习者与研究者的兴趣、爱好、选题、观点和方法,决定着学习和研究的成败.因此,这不是一个可以忽视的问题.如果我们浏览一下著名数学家传记,将会发现他们中的许多人,都具有极其深厚的人文素养,特别是哲学素养.对于我们中的多数人而言,似乎从未明确意识到自己在数学上有过什么样的哲学考虑,但是这并不意味着你已摆脱了哲学观点的约束,而且很可能是被某种不十分正确的观点所支配.对数学的看法实际上是人类世界观的重要组成部分,它不仅仅是一种知识,不仅仅关系我们的数学思维,它甚至会影响我们对待一般科学问题的观点和态度.因此作为现代数学教育的一部分,有必要对有关问题进行一番探讨,以使我们的认识更全面、更符合实际,以便以一种更合理的方式学习、把握数学.

应当指出,所要进行的讨论绝不是一个轻松话题,它必然涉及数学哲学的一系列基本问题,而几乎在所有问题上,名家们都已发表过各种观点,不仅不同的人可以有完全相反的看

法，同一个人在不同场合也会有自相矛盾的见解. 在此，笔者仅能以一个普通数学工作者的身份，作为学习数学的一名学生，谈谈自己的感受和体会. 为了给自己的论点寻求支持，书中当然会引用若干名家的精彩言论. 但请读者注意，这些言论已经过了笔者的筛选和过滤，它们更多反映的是笔者的个人倾向，并非是完全客观、必然正确的. 欢迎读者独立思考，提出批评，参与讨论. 本书所肯定的内容，只应理解为笔者个人的看法与建议，读者完全可以否定.

本书以对数学模型与模式的讨论作为传达思想的媒介. 那么，到底什么是模型？ 什么是模式？ 它们在数学科学中地位如何？ 以下的论述首先从此开始.

§1 数学模型与数学模式

随着计算机的日益普及，数学已不再是单纯的理论，它已被广泛应用于人类社会的各个方面，而且数学方法已经成为一种关系国民经济基础和关系国防实力的重要技术. 而数学之所以能够在各个领域发挥作用，有赖于各种数学模型的建立，只有有了模型，才可能对各式各样的问题利用计算机进行分析与处理. 那么，到底什么是模型呢？ 对此冯·诺依曼（Von Neumann）有过非常精辟的论述，他说："科学并不是试图去说明、去解释什么，科学主要的是要建立模型. 这里所说的模型实质是一种数学结构，加上某种特定的语言解释，来描述所观察到的现象. 这样一种数学结构的恰当性，唯一地、明确地由人们期待它的机能所决定."

实际上，上述思想的首倡者是伽利略（Galilei）. 被伽利略首先提出，并为其后继者不懈追求的首要思想就是：对科学现象寻求独立于任何物理解释的定量描述. 这里所说的"现象的定量描述"就是冯·诺依曼所说的数学模型. 这一思想促进了人类社会的巨大进步. 近代自然科学的巨大成功即源于此.

为说明如上想法在人类思想史与科学史上的重要地位，让我们遵循美国著名数学家和数学史家克莱因（M. Kline）的叙述，考察一下人类文明的历史，看一看主宰古希腊和中世纪欧洲学者思维的"目的论"与"因果论".

古希腊人认为宇宙是有秩序的，并且试图找出这种秩序存在的原因. 亚里士多德（Aristotle）曾花费大量时间，试图解释抛向空中的球为什么最终一定落到地面. 他认为：每一个物体都具有一个自然位置，物体的自然状态就是处于静止中的自然位置. 重物体的自然位置在地球中心，这也是宇宙的中心；而轻的物体，如气体，其自然位置在空中. 当没有外力作用时，所有物体将自发地趋向其自然位置，从而产生了自然运动. 古希腊人还认为天体之所以做圆周运动，是由于圆是最完满的图形，圆周运动是自然运动，不需要任何产生和保持这种运动的力. 克莱因戏称，这种"解释"是"二分观察加上八分美学与哲学". 中世纪的欧洲学者同样关心事情发生的原因，其解释是因果论的. 例如，为什么要下雨？ 是为了浇灌庄稼. 为什么要浇灌庄稼？ 是为了使人类有食物. 为什么要使人类有食物？ 是为了使人类生存. 人类为什么要生存？ 是为了一心一意地侍奉上帝.

直至文艺复兴之前，在上述目的论与因果论思想的统治下，人类社会虽然也累积了丰厚的文化与文明，但历时数千年，发展缓慢，步履艰难，未能产生使人类社会飞跃进步的科学、技术与哲学，中世纪的欧洲实际处于黑暗的宗教统治之下. 而在世界的东方，特别是在古老的中国，历史上虽然也曾创造了灿烂的文明，但传统的自然哲学，传统的科学、技术思想，远远不同于现代文明.

在人类文化史上，正是伽利略第一个提出了如何认识世界的正确指导思想和工作方法. 伽利略认识到目的论和因果论的玄想永远不能增进科学知识，不能给予人类任何揭示与利用自然规律的力量. 事实上，东方古代“天人合一”的玄学同样如此. 伽利略提出要以一种关于自然现象的定量描述，取代一切不可捉摸、主观随意的玄妙“理论”.

伽利略所提倡的对自然现象进行定量描述，实际就是为研究对象建立数学模型. 伽利略及其后继者的工作程序概括说来是这样的：首先通过观察找出描述客观事物的基本概念和基本规律；然后从这些基本规律或称之为原理或公理出发，利用逻辑的、数学的推导，演绎出更多的真理. 也就是说，根据最基本的原始概念的逻辑发展，构造并获得新的科学概念和规律. 如上工作程序包含三个基本步骤：(1) 首先要确定一组变量，这组变量表达了所研究现象的最基本性质，同时测量这组变量的值；(2) 寻求所研究现象的定量描述，即找出刻画变量间关系的数学表达式；(3) 从所得到的数学关系出发，进行逻辑演绎. 简言之，伽利略的思想实际是通过自然规律与数学的结合，建立现实世界与抽象思维的联系，建立前提与结论间的逻辑关系；通过数学模型表达、演绎、理解科学结构. 这一思想的一个典型例子就是初速度为 0 的自由落体位移公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$. 此公式完全不涉及落体运动的机制，它仅仅对运动进行描述，公式中的重力加速度 g 只是一个参数，完全不必考虑它的起因. 这一公式是实验规律的总结，但它成为从数学上解决一系列有关问题的基本出发点.

应当指出，虽然伽利略的思想给数学科学的繁荣和发展开辟了道路，但他本人并不是现代数学的创始者. 在伽利略那里，数学没有摆脱直观性质，他的几何学未曾脱离物理世界. 伽利略的思想在他的后继者那里，特别是在牛顿(Newton)手中发扬光大. 由实验观测所得到的日心说和开卜勒三定律是牛顿万有引力定律的必要前提，然而，在牛顿那里，前提条件、物理概念和定律本身完全是以数学形式表达的. 牛顿以数学为工具，在 17 世纪铸造了现在所称的经典物理学. 在这一过程中，牛顿对数学本身，包括代数、几何，尤其是微积分的创立与发展做出了决定性的贡献. 必须指出，对于牛顿而言，数学是表达自然规律的工具. 他所努力的，首先是找出一条能将天体运动与地球上的物体运动统一起来的科学原理. 在牛顿力学中，数学语言不仅仅对物理定律给出一个简洁、清晰、一般的刻画，而且数学符号本身往往就代表了最基本的物理概念. 例如，牛顿第二定律 $F=ma$，F 表示力. 然而，我们可以不考虑这个力的性质和起源，它仅仅是一个数学符号，公式所表示的也只是一种数量关系. 从中我们可以再次体会伽利略所说的，对自然现象进行定量描述的意义. 狭义相对论的发现是伽利略

思想威力的另一个极好的例证. 爱因斯坦利用从实验结果总结出光速不变性原理，加上在所有惯性参照系中物理定律应该相同的假设，使用简单的数学推理，就成功地发现了狭义相对论，动摇了统治人类头脑几千年的时空观，带来了人类思想史上的大革命. 直至现在，伽利略的思想仍然是科学工作者所遵循的不变原则.

从 17 世纪直至现在的科学发展使人们相信，自然界是按照数学原则设计的，自然界的真正规律必然能够通过数学来探索和表达. 借助于数学概念、数学模型和演绎，科学工作者发现了一个由数量规律所支配的世界. 现在，不仅仅是物理学、力学等传统上与数学关系密切的学科，甚至化学、生物学、地质学及各种技术科学，乃至众多门类的人文、社会科学也已与数学结缘. 人们为各式各样的具体事物建立抽象的数学模型，将事物的描述和内在规律转化成数学公式，造就了一个数学的、定量的世界，这就是所谓自然界与科学的"数学化". 不同倾向的哲学家，尽管在若干根本问题上尖锐对立，但在推崇数学这一点上是相当一致的. 对此只需引述两个众所周知的例子. 康德(I. Kant)称："在任何特定的理论中，只有其中包含数学的部分，才是真正的科学."马克思说："一种科学只有在成功地运用数学时才达到完善的地步."

伽利略的基本思想是对自然现象进行定量描述，这一思想为数学，或者更准确地说为现代科学的发展开辟了道路. 然而，就与数学有关的发展而言，我们还必须注意数学自身的特点. 数学不仅仅是对现象的被动描述. 数学概念、数学推理以及数学表达客观规律的方式，是人类思维世世代代对原始素材积累、提炼、加工和创造的结果，它具有高度的抽象性、严密性和最广泛的适用性. 为正确、全面地把握数学，不能忽视数学本身的独特之处. 针对这一方面，我们以与伽利略同时代的，对哲学、科学方法论和数学发展做出巨大贡献的另一巨人笛卡儿(Descartes)作为代表. 笛卡儿比伽利略多活了八年，他去世时牛顿八岁，就时间而言，他是一个承先启后的人物. 笛卡儿对科学方法的研究以及如何应用这些方法的讨论都写在一本小书——《谈谈方法》之中. 笛卡儿明确提出，科学的本质是数学，科学是可以归结到数学的. 他谨慎地构造寻求真理的规则，试图从对数学的研究中提取若干基本原理，然后遵循这些原理，对一切思维过程建立一个理性的演绎结构，任何结论只能从确定无误的、被公认的前提推导而来. 笛卡儿的思想实际就是试图将数学方法推广、普及和一般化.

笛卡儿的规则明确地表述在《谈谈方法》一书的第二部分中. 其第一条是："凡是我没有明确地认识到的东西，我决不把它当成真的接受."也就是说，要小心避免习惯上默认的、未经认真检验的前提与推理，避免先入之见与轻率的判断，不把任何有些许怀疑的东西加入到判断之中. 第二条是："把所审查的每一个难题按照可能和必要的程度，分成若干部分，以便一一解决."第三条是："按次序进行我的思考，从最简单最容易认识的对象开始，一点一点逐步上升，直到认识最复杂的对象；就连那些本来没有先后关系的东西也给它们设定一个顺序."最后一条是："在任何情况下，都要尽量全面地考察，尽量普遍地复查，作到确信毫无遗漏."这就是笛卡儿提倡的一般方法论，实际上，它也是任何一个训练有素的数学工作者处处遵循的原则. 应当指出，不同的哲学流派对科学方法论有不同的看法. 一般认为：科学方法

论应区分发现真理的过程和对发现进行检验时的逻辑,“发现”或“发明”是无规律可循的,数学主要提供的是证明,即检验的方法. 但是很多人认为:尽管不存在固定的发现与发明的程序,但一般原则还是存在的. 近代著名数学教育家波里亚(G. Polya)在他的多部著作,例如《怎样解题》、《数学与猜想》中,通过众多生动的实例,说明归纳、类比、联想、猜测等非演绎逻辑,即所谓“合情推理”方法对数学研究的作用. 这些内容似应属于“发现”的思维范畴.

伽利略和笛卡儿都对科学方法论的创立做出了划时代的贡献,但是需要指出二者在哲学思想上有很大不同. 伽利略认为基本原理必须来源于经验和实验,获取基本原理的方法应当是自然说了什么,而不是我们想了什么. 而笛卡儿的哲学观点则被认为是二元论的. 他一方面承认物质和运动的客观属性,另一方面相信只需对任何一类现象加以思考,就能得出基本原理,认为人心中本来就有完美、时间、空间和运动的概念. 在此我们无意探讨唯物主义与唯心主义的哲学差别. 令笔者感兴趣的是无论伽利略还是笛卡儿,二者的思想都对数学与其他科学的发展起了极为重要的作用,而且代表了发展与研究数学必不可少的两个彼此不同、彼此对立而又互为补充的方面. 无论是纯粹数学中研究对象和公理体系的选择,还是应用数学中数学模型的建立,本质上都不能脱离客观世界,离不开对事物的观察、实验与客观描述;但仅此还不是数学,数学离不开数学家主观思维的加工、创造、抽象和推理. 我们把此二者视为由伽利略和笛卡儿所分别代表的不同方面. 数学既与现实世界密不可分,又不是外部世界的机械描述;既有素朴的数学,又有在此基础上一步一步形式化了的数学;既要注意数学的内容,也不可忽视数学的表达. 简言之,对数学应有不同层次、不同侧面的理解.

我们不可忽视科学方法论的作用,文艺复兴以来的科学发展与科学方法论的创立是不可分的. 举一个反面的例子:我国古代学者早就提出了“格物致知”的说法,用现代语言解释就是:推究事物原理,以增进知识. 抽象而言,这无疑是正确的. 然而,中国古代并未解决“格物致知”的正确方法,一个典型的例子来自明代理学家王阳明,他曾说过:“阳明早岁,曾以格物致病.”又说:“物无可格,格物功夫只在身心上作.”我们的祖先尽管创造了辉煌的历史和文明,但不可否认,我国现代科学的整个思想体系却是从西方输入的. 对此,缺乏正确的科学方法,不能说不是一个原因.

20 世纪,从逻辑与数学的发展中产生了一个新的数学流派,称之为结构主义. 结构主义者认为,数学这一领域应称做关于模式的科学,其目的是解释人们从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构与对称. 结构主义者将彼此间有一定关系的诸多个体组成的集合称为系统. 例如,一所大学的行政机构或一个公司的管理部门是一个由人组成的系统,成员间有领导、被领导与合作共事的关系;又如,一种语言是由字、词和句子组成的系统,其组成要素间有语法和语义的关系. 而所谓的“结构”或称“模式”则是系统的抽象形式,所强调的是系统个体间的内部关系,而忽略掉个体关系之外的所有其他特征. 数学就是研究这些各式各样的抽象结构或模式的性质. 例如,算术研究自然数的结构,实分析研究实数结构,群论研究群的结构,欧几里得几何研究欧氏空间的结构,等等.

每种结构往往可以是多个不同系统的抽象. 例如,平面或空间的不变群既可用来描述几何图形,也可用来刻画矿物晶体的特点,还可表达其他物理规律,甚至早期人类社会的婚姻关系. 结构或模式越抽象,它所能代表的系统就越普遍、越一般,所揭示的关系或规律就越深刻. 在这个意义上,结构或模式可以被理解成高度抽象、更为一般的"数学模型",而针对具体问题的数学模型则是结构或模式的初级形式. 二者在抽象程度上,在适用范围上,以及在逻辑严密性上都有差别. 但本质思想上有共通之处,都是从观察、实验、归纳、分析来建立必须的基本前提,或者说"公理",然后在假设可靠的、有意义的前提下,或者说"在假设可靠的公理体系下",进行逻辑演绎,导出新的真理性结论. 当然无论就内容或形式而言,它们都处于不同的层次. 实际上,把数学视为一种关于"模式"的科学,已形成现代数学哲学的一个著名流派,其在数学哲学的几乎所有根本问题上都有自己的观点. 此处的目的仅在于表明笔者个人对"数学模式"与"数学模型"关系的理解,故不再就结构主义观点继续深入讨论. 特别是,笔者不同意把数学与物理学及其他科学割裂开来,将数学过度形式化和抽象化的观点.

总之,本书的主要目的是: 试图通过对若干数学模型与模式的介绍,探讨与数学有关的多方面问题. 在这一过程中,具体的数学表达与演绎是不可避免的,然而,我们希望传达的主要信息,则是在这些模型与模式中所包含的对数学更一般的理解与认识,比起具体的数学内容而言,这种理解与认识无疑是更基本、更重要的. 在讨论过程中,我们会涉及一些数学史的内容. 寻找历史的源头,有助于更清楚地认识与理解问题,探寻不同的发展途径. 我们关心的是源头,而不是故道;关心的是火种,而不是灰烬. 对历史与文化的兴趣,是近代科学思想的源泉之一,火山口处流动的岩浆比起凝固的岩石说来,无疑展现了更多的活力.

上述关于数学模型的讨论,实际已经涉及了数学哲学中的一个重要问题,即如何认识数学与物理学及其他科学的关系. 数学与其他科学的关系是十分广泛、极为密切的,其范围远远超出"数学模型"或所谓的"应用数学"的领域. 我们需要弄清数学对象与科学对象间的关联,说明为何数学可以广泛应用于数学之外的物质世界. 如前所述,很多科学理论的创立与实际问题的解决是由于发现或构造了与现象相应的数学模型,是由于对现象进行了数学描述. 问题在于: 实数、复数、函数、微分、积分、希尔伯特空间等数学概念为什么可以描述非数学对象? 数学定理为什么可以决定非数学领域客观事物的规律与行为? 在这一问题上同样存在有形形色色的回答,上文表达的是笔者认为合理的一种观点,即认为数学概念有其实在背景,数学命题反映了客观规律,无论数学的研究对象还是正确的数学推理,都有其客观实在性. 然而,在"数学与其他科学密不可分"这一问题上,与数学哲学的其他领域一样,存在各种看法. 例如,的确有这样的数学哲学家,认为数学对物理学不是必须的,他们把时空中的"点"视为物理实体,以这些"点"取代"数"的概念,并以力学为例,说明可以绕过"数学"建立物理学.

下面让我们直接对数学哲学的基本问题作一简要介绍,以便对"数学到底是什么?"得到一个更全面的概括认识.