高等学校数学辅导教材之 1

高等数学辅导讲义

（上册）

编著 北京大学 李正元

国家行政学院出版社

高等学校数学辅导教材之①

高等数学辅导讲义

（上册）

编著　北京大学　李正元

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学辅导讲义/李正元编著. -北京：国家行政学院出版社，2002.8
ISBN 7-80140-241-3

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 054435 号

高等数学辅导讲义（上册）
李正元　编著
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路 6 号
邮政编码：100089
发行部电话：68920615，68929949
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷
*
850×1168　1/32 开本　35.75 印张　1150 千字
2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 7-80140-241-3/O·19　　定价：36.00 元（上、下册）

前　言

高等数学课程对于大学生来说，其重要性是不言而喻的，近年来被许多部委和省市列为教学的重点评估课程之一。在全国硕士学位研究生考试中被指定为全国统考科目。然而，一方面近年来由于教学改革的实施，高等数学授课时间有所减少，受到时间限制，概念的深入探讨，知识点的融会贯通，知识面的拓展势必受到一定影响；另一方面后续课程以及研究生入学考试对高等数学的要求在教学大纲范围内有深化的趋势。如何解决这一新的矛盾，如何把大学期间高等数学的学习与研究生入学考试复习紧密衔接，为此作者根据在北京大学多年的教学实践以及硕士研究生入学考试高等数学辅导的经验，听取了广大学员的意见，参考了**北京大学、清华大学、复旦大学、同济大学、华中科技大学、浙江大学、四川大学、西安交通大学**等高等院校的现行教材，认真编写了这本《高等数学辅导讲义》。

本书每章设有**基本内容诠释与重要结论归纳、典型题型归纳及解题方法与技巧、练习题及答案与提示**。本书以讲清讲透**基本概念**为主线，希望能帮助同学把握并理解各章的基本概念和重要的定理与公式；并通过选编

的**典型例题**，或是澄清基本概念与基本运算，或是指出同学解题中常犯的错误，或是介绍高等数学中常用解题思路与技巧，并且许多题目给出了多种解法，通过这些希望能开阔思路，活跃思维，举一反三，触类旁通，提高同学分析解决问题的能力。同学做各章设置的**练习题**可达到巩固、理解、提高的目的。在做练习题时，一定要独立思考，动手做题，实在有困难再看提示和参考答案。

要写好一本教材实非易事，疏漏错误难免，欢迎全国同行批评指正！

李正元

2002 年 8 月于北大燕北园

目　录

上　册

第一章　函数 ………………………………………………………… (1)
§1　函数概念与几类常见的函数 ……………………………… (1)
§2　复合函数，反函数与初等函数 …………………………… (7)
第二章　极限 ………………………………………………………… (18)
§1　数列的极限概念……………………………………………… (18)
§2　函数极限概念………………………………………………… (24)
§3　极限的性质…………………………………………………… (29)
§4　无穷小量，无穷大量及其联系…………………………… (31)
§5　极限运算法则………………………………………………… (37)
§6　极限存在性准则与两个重要的极限…………………… (48)
§7　无穷小的比较………………………………………………… (65)
§8　函数极限与数列极限的关系，极限的
不存在问题…………………………………………………… (73)
第三章　函数的连续性 …………………………………………… (86)
§1　函数的连续性概念及其判断……………………………… (86)
§2　连续函数的性质 …………………………………………… (103)
§3　函数连续性的应用………………………………………… (110)
第四章　导数………………………………………………………… (120)
§1　导数与高阶导数概念 ……………………………………… (120)

§2　导数表与求导法则 …………………………………… (132)
§3　分段函数的求导法 …………………………………… (156)
§4　n 阶导数的求法 ………………………………………… (166)
§5　导数的简单应用 ………………………………………… (173)
第五章　微分………………………………………………………… (191)
§1　微分概念 ………………………………………………… (191)
§2　微分法则与一阶微分形式的不变性 ……………… (195)
§3　微分在近似计算中的应用 ……………………………… (199)
第六章　微分学中的中值定理及其应用……………………… (208)
§1　微分学中的中值定理 …………………………………… (208)
§2　函数为常数的条件与函数恒等式的证明 ………… (213)
§3　函数单调性与极值点的判别法……………………… (216)
§4　函数的最大值与最小值问题………………………… (228)
§5　函数凹凸性与拐点的判别法 ………………………… (241)
§6　利用导数作函数图形 …………………………………… (248)
§7　柯西中值定理的应用——洛必达法则 ……………… (258)
§8　洛必达法则的应用——无穷小阶的比较
与确定 ……………………………………………………… (271)
§9　微分学理论的应用——证明不等式 ……………… (276)
§10　微分学理论的应用——证明导函数或
函数存在零点…………………………………………… (287)
第七章　泰勒公式及其应用…………………………………… (306)
§1　带皮亚诺余项与拉格朗日余项的泰勒公式 ……… (306)
§2　泰勒公式的应用 ………………………………………… (313)
第八章　不定积分……………………………………………… (326)
§1　原函数与不定积分概念 ……………………………… (326)
§2　基本积分表与不定积分的简单运算法则 ……… (333)
§3　不定积分的换元积分法 ……………………………… (340)
§4　不定积分的分部积分法 ……………………………… (357)

§5　分段函数的积分 ………………………………………………（366）
§6　几类初等函数的积分法 ……………………………………（370）
第九章　定积分…………………………………………………（397）
§1　定积分的概念 ………………………………………………（397）
§2　定积分的性质 ………………………………………………（404）
§3　积分与微分的关系
——牛顿-莱布尼兹公式 ………………………………………（409）
§4　定积分的计算 ………………………………………………（416）
§5　变限积分及其性质 …………………………………………（438）
§6　定积分的近似计算 …………………………………………（453）
§7　定积分的微元分析法 ………………………………………（458）
§8　定积分的几何应用 …………………………………………（461）
§9　定积分的物理应用 …………………………………………（477）
§10　广义积分……………………………………………………（484）
第十章　向量代数与空间解析几何……………………………（518）
§1　向量概念及向量的加法与数乘向量 ………………………（518）
§2　向量的数量积，向量积与混合乘积 ………………………（527）
§3　向量运算的几何应用 ………………………………………（532）
§4　平面方程与直线方程 ………………………………………（540）
§5　平面、直线间的相互关系与距离公式 ……………………（548）
§6　曲面与曲线及二次曲面 ……………………………………（555）
§7　空间曲线在平面上的投影曲线 ……………………………（566）

下　册

第十一章　多元函数微分学

第十二章 重积分

第十三章 曲线积分与格林公式

第十四章 曲面积分，高斯公式与斯托克斯公式

第十五章 级数

第十六章* 含参变量的积分与傅里叶变换

第十七章 常微分方程

第一章 函 数

§1 函数概念与几类常见的函数

一、基本内容诠释与重要结论归纳

1. 函数概念

(1) 函数的定义 设在某一过程中有两个变量 x 与 y，若对变量 x 在其变化域 X 中的每一个值，依照某一对应关系，变量 y 都有唯一确定的一个值与之对应，我们就称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y = f(x) \quad (x \in X).$$

这时 x 称为自变量，y 称为因变量. 自变量 x 的变化域 X 称为函数的定义域，记为 $D(f)$，而相应的因变量 y 的变化域 Y 称为函数的值域，记为 $R(f)$.

(2) Y 是函数的值域的充要条件 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 X，则 Y 是 $f(x)$ 的值域的充要条件是：对 $\forall x \in X$，有 $f(x) \in Y$，且对 $\forall y \in Y$，至少 $\exists$ 一个 $x \in X$，使得 $f(x) = y$.

(3) 函数定义中的两个要素 定义域与对应规则是函数定义中的两个要素. 值域是随定义域与对应规则而确定. 两个函数当且仅当定义域相同且对应规则相同时，这两个函数才是相同的. 若函数有分析表达式，使分析表达式有意义的自变量的取值范围就是函数的自然定义域. 在具体问题中，自然定义域不一定就是定义域.

(4) 函数概念的实质 函数表示法(如分析表示法，图示法，列表法等)只是两个变量间函数关系的表现形式，变量之间是否存在函数关系，就看是否存在一种对应规则，使得其中一个量定了，另一个量就被唯一确定，它不依赖于对应规则的表现形式. 一个函数可以没有分析表达式，即使有分析表达式，在整个定义域上也不一定有统一的表达式. 如所谓分段函数，在整个定义域上自变量的不同变化范围，对应规则用不同的式子来表示.

(5) 常量与变量 自变量与因变量是相对的. 一个量在某个过程中是常量，在另一过程中可以是变量. 一个量在某个过程中是自变量，在另一个过程中可以是因变量，这一点既简单又重要.

2. 几类常见的函数

(1) 有界函数 若 $\exists$ 常数 $M>0$，对 $\forall x \in X$ 有 $|f(x)| \leqslant M$，称 $f(x)$ 在 X 上有界，也称 $f(x)$ 在 X 上是有界函数. 几何意义是：$y=f(x)$ 的图形位于直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

(2) 奇偶函数 设 X 关于原点对称(若 $x \in X \Rightarrow -x \in X$)，若对 $\forall x \in X$，有

$$f(x)=f(-x) \quad (f(x)=-f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 在 X 上是偶(奇)函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

(3) 单调函数 设 $f(x)$ 定义在区间 X 上，$\forall x_1, x_2 \in X$，若 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加(单调减少)，它们统称为单调函数. 单调增加(单调减少)也称为单调上升或单调递增(单调下降或单调递减).

$\forall x_1, x_2 \in X$，若 $x_1<x_2$，有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$，则称 $f(x)$ 在区间 X 上单调不减(单调不增).

(4) 周期函数 设 $f(x)$ 定义在 X 上，若 $\exists$ 常数 $T \neq 0$，满足：$\forall x \in X$，有 $x \pm T \in X$ 且 $f(x+T)=f(x)$ $(\forall x \in X)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期. 它的几何意义是：自变量每增加或减少一个固定的距离 T 后图形重复出现.

周期函数一定有无穷多个周期，若 T 是 $f(x)$ 的周期，则对 $\forall$ 自然数 n，$\pm nT$ 均是它的周期. 若无穷多个周期中，有一个最小的正数，则称它为最小周期，简称为周期.

二、典型题型归纳及解题方法与技巧

1. 函数的有界性，奇偶性，单调性与周期性

【例 1.1.1】 指出下列函数的定义域，值域，奇偶性，周期性(若是周期函数，指出其周期即最小周期)和有界性.

(1) $y=|x|$； (2) $y=\sqrt{x(4-x)}$；

(3) $y=\cos^2 x+2$； (4) $y=|\sin x|+|\cos x|$.

【解】 (1) $D(f)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$，$R(f)=\{y \mid y \geqslant 0\}$，

偶函数,非周期,无界.

(2) $D(f)=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 4\}$, $R(f)=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 2\}$,
非奇、非偶函数,非周期的有界函数.

(3) $D(f)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$, $R(f)=\{y\mid 2\leqslant y\leqslant 3\}$,
偶函数,周期函数(周期π),有界.

(4) $D(f)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$, $R(f)=\{y\mid 1\leqslant y\leqslant \sqrt{2}\}$,
偶函数,周期函数(周期$\frac{\pi}{2}$),有界.

【评注】 若$y=f(x)$的定义域$D(f)=X$,要证它的值域$R(f)=Y$,即证:1° 对$\forall x\in X, f(x)\in Y$;2° 对$\forall y\in Y$,存在$x\in X$,使得$f(x)=y$.

对于题(1),(3)易得到它们的值域.

对于题(4),考察 $y^2=1+2|\sin x\cos x|=1+|\sin 2x|$,
由此得y^2的值域为$[1,2]$.于是y的值域为$[1,\sqrt{2}]$.

对于题(2),可用配方法得 $y=\sqrt{4-(x-2)^2}$,由此可得相应的值域.

或者,对$\forall x\in[0,4]$, $\Rightarrow y\geqslant 0$.又对$y\geqslant 0$,考察方程

$$\sqrt{4(4-x)}=y\Leftrightarrow x^2-4x+y^2=0$$
$$\Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{4-y^2},$$

当$y\geqslant 0$时,仅当$y\in[0,2]$才有解$x\in[0,4]$.

因此求得值域为$[0,2]$.

【例 1.1.2】 设$f(x)=x\sin x\mathrm{e}^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$,则$f(x)$是

(A) 有界函数. (B) 单调函数.

(C) 周期函数. (D) 偶函数. 【 】

【分析一】 由$\sin x,\cos x$分别是$(-\infty,+\infty)$上的奇函数和偶函数,于是对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$有

$$f(-x)=(-x\sin(-x))\mathrm{e}^{\cos(-x)}=(-1)^2x\sin x\mathrm{e}^{\cos x}=f(x).$$

$\Rightarrow$ $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$为偶函数.故应选(D).

【分析二】 排除法.(以下记$[x]$为不超过x的最大整数.)

$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$不是有界函数,即要证任何正数M都不是$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的界.事实上,对于$\forall M>0$,令$x_M=2[M]\pi+\frac{\pi}{2}$,于是

$$|f(x_M)| = x_M.$$

我们来证 $x_M > M$ 总是成立的. 总有 $x_M > 1$. 当 $M > 1$ 时, 设 $n \leqslant M < n + 1(n = 1,2,3,\cdots)$, 则有

$$x_M > 2n\pi > n + 1 > M.$$

综合起来即得 $|f(x_M)| > M$ 成立, 这表明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 无界.

$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 不是单调的, 这只需比较

$$f(0) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad f(\pi) = 0$$

知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 既不单调增加, 也不单调减少, 从而不是单调函数.

$f(x)$ 也不是周期的. 因此选(D).

【评注】 ① 我们也可用奇偶函数的运算性质:"两个奇函数之积是偶函数, 两个偶函数之积为偶函数, 任一函数 $g(u)$ 与偶函数 $u = h(x)$ 的复合 $g(h(x))$ 也是偶函数"等来证明该例中的 $f(x)$ 是偶函数.

(关于复合函数见 §2, 该节基本上是复习初等数学的有关内容).

② 要证 $f(x)$ 在定义域 X 上无界, 则应说明任何正数 M 都不是 $f(x)$ 的界, 也就是要证: 对于任意给定的 $M > 0$, 都存在点 $x_M \in X$, 使得 $|f(x_M)| > M$ 成立.

③ 若存在 $x_1, x_2, x_3 \in X$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 但 $f(x_1) < f(x_2), f(x_2) > f(x_1)$ (或 $f(x_1) > f(x_2), f(x_2) < f(x_3)$) 同时成立, 则 $f(x)$ 在区间 X 上不是单调函数.

2. 证明函数的单调性, 有界性与周期性

【例 1.1.3】 记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数, 如 $[3.7] = 3, [-4.35] = -5$. 称 $y = [x]$ 为取整函数. 求证: $f(x) = x - [x]$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 是有界周期函数.

【分析与证明】 可通过取整函数 $y = [x]$ 分段变化的规律来了解函数 $f(x) = x - [x]$ 是怎样变化的:

当 $n \leqslant x < n + 1 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时, $n + 1 \leqslant x + 1 < n + 2$, 按定义有

$$[x] = n, [x + 1] = n + 1,$$

$$0 = n - n \leqslant f(x) = x - [x] < (n + 1) - n = 1,$$

$$f(x + 1) = (x + 1) - [x + 1] = x + 1 - (n + 1)$$
$$= x - n = x - [x] = f(x).$$

因此 $f(x)$ 是有界的，并且是以 1 为周期的周期函数.

【例 1.1.4】 设在区间 X 上 $f_i(x)(i=1,2)$ 为周期函数，周期为 T_i 且 $\exists$ 自然数 m,n 使得 $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{m}{n}$. 求证：$f_1(x)+f_2(x)$，$f_1(x)\cdot f_2(x)$ 均为 X 上的周期函数.

【证明】 注意 $nT_1=mT_2$. 因 $f_1(x)$ 以 T_1 为周期 $\Rightarrow f_1(x)$ 以 nT_1 为周期. 同理 $f_2(x)$ 以 mT_2 为周期. 令 $T=nT_1(=mT_2)\Rightarrow$

$$\begin{aligned}f_1(x+T)+f_2(x+T)&=f_1(x+nT_1)+f_2(x+mT_2)\\&=f_1(x)+f_2(x),\end{aligned}$$

即 $f_1(x)+f_2(x)$ 以 T 为周期.

同理可证 $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 以 $T=nT_1(=mT_2)$ 为周期.

【例 1.1.5】 求证：$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调增加.

【证明】 对 $\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$x_2>x_1$，我们有

$$\begin{aligned}&f(x_2)-f(x_1)\\&=\frac{e^{x_2}-e^{-x_2}}{e^{x_2}+e^{-x_2}}-\frac{e^{x_1}-e^{-x_1}}{e^{x_1}+e^{-x_1}}\\&=\frac{(e^{x_2}-e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})-(e^{x_1}-e^{-x_1})(e^{x_2}+e^{-x_2})}{(e^{x_2}+e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})}\\&=\frac{2(e^{x_2-x_1}-e^{-(x_2-x_1)})}{(e^{x_2}+e^{-x_2})(e^{x_1}+e^{-x_1})}>0,\end{aligned}$$

因此，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调增加.

3. 利用函数概念求函数表达式

【例 1.1.6】 设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上，且满足：

$$2f(x)+f(1-x)=x^2.$$

求 $f(x)$ 的表达式.

【分析与求解】 注意：$f(x)=f(1-(1-x))$，在等式

$$2f(x)+f(1-x)=x^2 \tag{1.1-1}$$

中将 x 换成 $1-x$，得

$$2f(1-x)+f(1-(1-x))=(1-x)^2,$$

即

$$2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2. \tag{1.1-2}$$

由(1.1-1)式乘 2 减去(1.1-2)式即可消去 $f(1-x)$ 得

$$3f(x)=2x^2-(1-x)^2,$$

即 $$3f(x)=x^2+2x-1,$$

亦即 $$f(x)=\frac{1}{3}(x^2+2x-1), \forall x\in(-\infty,+\infty).$$

练习题 1.1

1.1－1 判断下列函数是否相同,若不同,为什么?

(1) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$;

(2) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$, $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$.

1.1－2 求下列各函数的定义域:

(1) $y=\lg\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

(2) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x}$;

(3) $y=\cot\sqrt{x}$;

(4) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

(5) $y=\lg(\cos(\lg x))$.

1.1－3 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x, & 0<x<+\infty,\end{cases}$ 求 $f(-2), f(-1), f(0), f(2)$.

1.1－4 指数下列函数的定义域,奇偶性,周期性(若是周期的,指出周期即最小周期)和有界性.

(1) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$;

(2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$;

(3) $y=\tan(\sin x)$;

(4) $y=\dfrac{|x|}{x}$;

(5) $y=\sin x-\cos x$;

(6) $y=\sin(x^2)$.

1.1－5 求函数使其满足下列给定的关系:

(1) 设 $f(\dfrac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}\,(x>0)$,求 $f(x)$;

(2) 设 $f\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)=2f(x)+x$,求 $f(x)$.

§2 复合函数，反函数与初等函数

一、基本内容诠释与重要结论归纳

1. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含函数 $u = \varphi(x)$ 的值域，则在函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y = f(\varphi(x))(x \in X)$，称为由 $u = \varphi(x)$ 与 $y = f(u)$ 复合而成的复合函数. u 称为中间变量. 中间变量 u 在函数 $y = f(u)$ 中是自变量，而在函数 $u = \varphi(x)$ 中是因变量.

2. 反函数

(1) 反函数的定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 X，值域为 Y. 若对 $\forall y \in Y$，有唯一确定的 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$，由此对应关系在 Y 上确定了一个函数，称为 $y = f(x)$ 的反函数，记为 $x = f^{-1}(y)$.

(2) 函数与其反函数的关系 设 $y = f(x)$，定义域为 X，值域为 Y. 若 $y = f(x)$ 存在反函数 $x = f^{-1}(y)$，则它的定义域为 Y，值域为 X，且有

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad (\forall y \in Y), \qquad f^{-1}(f(x)) = x \quad (\forall x \in X).$$

$y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形重合，$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

(3) 反函数的存在性 $f(x)$ 在 X 上存在反函数 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall x_1, x_2 \in X$，若 $x_1 \neq x_2$，则 $f(x_1) \neq f(x_2)$.

单调函数一定存在反函数，且反函数有相同的单调性.

3. 基本初等函数

常数函数($y = c$)，幂函数($y = x^a$)，指数函数($y = a^x$)，对数函数($y = \log_a x$)，三角函数($y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$)，反三角函数($y = \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x, \operatorname{arcsec} x, \operatorname{arccsc} x$)称为基本初等函数.

要熟悉这些函数的函数关系，定义域，函数图形和一些性质(包括有界性、奇偶性、单调性与周期性等).

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算以及复合运算而得到的函数称

为初等函数.

二、典型题型归纳及解题方法与技巧

1. 求复合函数的定义域

【例 1.2.1】 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$,求下列函数的定义域:

(1) $y = f(x^2)$;

(2) $y = f(\mathrm{sgn}x)$,其中 $\mathrm{sgn}x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases}$

(3) $y = f(x+a) + f(x-a), a > 0$;

(4) $y = f(\sin x)$.

【解】 若已知 $y = f(x)$ 的定义域为 X,求复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 的定义域即求 $u = \varphi(x)$ 的定义域中最大部分使得相应的值域等于或属于 X.

(1) 使 $u = x^2$ 的值域为 $[0,2]$ 时相应的定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$,故 $y = f(x^2)$ 的定义域为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

(2) 仅当 $x \geqslant 0$ 时 $u = \mathrm{sgn}x$ 的值域属于 $[0,2]$,所以 $y = f(\mathrm{sgn}x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$.

(3) $y = f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域为

$$\begin{cases} 0 \leqslant x + a \leqslant 2, \\ 0 \leqslant x - a \leqslant 2. \end{cases}$$

当 $a \leqslant 1$ 时,定义域为 $a \leqslant x \leqslant 2-a$;当 $a > 1$ 时,这个函数没有定义.

(4) 使 $u = \sin x$ 的值域属于 $[0,2]$ 相应的定义域为 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. 这就是 $f(\sin x)$ 的定义域.

2. 求复合函数

【例 1.2.2】 求下列函数的复合函数:

(1) 设 $\varphi(x) = x^2, \psi(x) = 2^x$,求 $\varphi(\varphi(x)), \varphi(\psi(x)), \psi(\varphi(x)), \psi(\psi(x))$.

(2) 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leqslant 0, \\ 2+x, & x > 0, \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geqslant 0. \end{cases}$$ 求 $g(f(x))$ 与 $f(g(x))$.