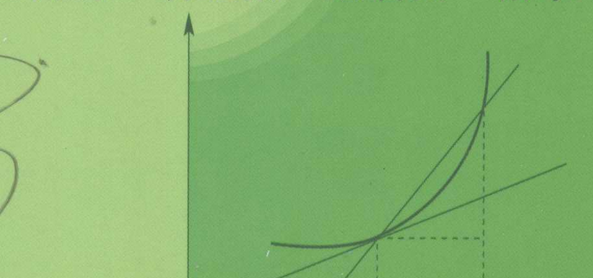
•《微积分》（第三版）配套辅导书•

经济应用数学基础（一）

微积分（第三版）习题解答与注释

——《微积分（第三版）学习参考》缩编本

赵树嫄　胡显佑　陆启良　褚永增　编著



中国人民大学出版社

•《微积分》(第三版)配套辅导

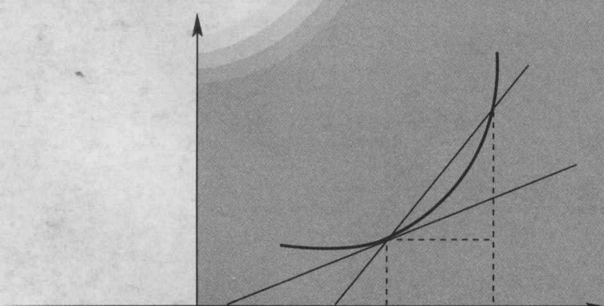
经济应用数学基础(一)

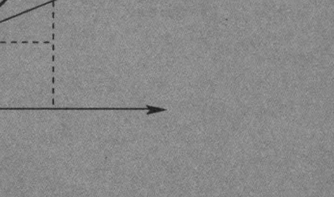
微积分(第三版)

习题解答与注释

——《微积分(第三版)学习参考》缩编本

赵树嫄　胡显佑　陆启良　褚永增　编著





中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学基础（一）：微积分（第三版）习题解答与注释/赵树嫄等编著.
北京：中国人民大学出版社，2008
ISBN 978-7-300-08921-8

Ⅰ.微…
Ⅱ.赵…
Ⅲ.微积分-高等学校-解题
Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 006837 号

经济应用数学基础（一）

微积分（第三版）习题解答与注释

——《微积分（第三版）学习参考》缩编本

赵树嫄　胡显佑
陆启良　褚永增　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司		
规　　格	148 mm×210 mm　32 开本	版　　次	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	12	印　　次	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	341 000	定　　价	18.00 元

出版说明

应广大读者的要求，我社邀请“经济应用数学基础”系列教材的主编赵树嫄教授主持对《微积分》(修订本)进行了修订，2007年6月出版了《微积分》(第三版)一书，并于2007年8月推出了其配套的教学与学习参考读物——《微积分(第三版)学习参考》。《微积分》(第三版)及其配套的学习参考书出版半年来，销量喜人，我们非常感谢广大读者的厚爱。

《微积分(第三版)学习参考》一书不仅包含教材中所有习题的解答及注释，而且还针对一些重要的知识点补充了一些难度略大一点的且有参考意义的题目，同时给出了详细的解答过程。这部分题对愿意多学一些、多练一些的学生非常有帮助。有读者来信反映，增加的习题使他们巩固和加强了对所学知识点的理解。但也有学生来信反映，《微积分(第三版)学习参考》一书价格偏高，希望我们出版一本篇幅小些、价格便宜些的学习参考书。因此我们出版了这本《微积分(第三版)学习参考》的缩编本，删去了学习参考中补充的习题及解答，保留了教材原有习题的解答与注释。

我们将原来的16开本改为大32开本，从而达到降低价格的目的。为了提高本书的质量，本书的编辑对全书重新进行了编辑加工。书中存在不妥之处，敬请广大读者来信来电批评指正。

我们的联系方式：电子邮箱：panxuyan@263. net

联系电话：010—62511967

中国人民大学出版社

2008年1月

《微积分(第三版)学习参考》
出版说明

由赵树嫄教授主编的“经济应用数学基础”系列教材,20多年来深受广大读者喜爱,发行量极大,影响很广。该套教材的读者既有在校师生,也有很多自学读者。为适应读者学习或参考的需要,有不少出版单位出版了该套教材的各种版本的习题解答与辅导资料。近几年来,有很多读者来信、来电对该套教材提出了多方面的意见和建议,其中,不少读者希望中国人民大学出版社提供配套的学习辅导和教学参考读物。

为适应公共数学教学形势的发展,我社邀请赵树嫄教授主持对《微积分》(修订本)进行了再次修订,推出了第三版。同时,为了满足广大读者尤其是自学读者的学习需要,我们邀请了赵树嫄、胡显佑、陆启良、褚永增等老师编写了这本《微积分》(第三版)的学习参考读物,并邀请北京大学张乃岳先生对原稿进行了审校和编辑加工。本书是一本教与学的参考书。

这里要特别指出的是,编写、出版学习参考书的目的是使读者更加清晰、准确地把握正确的解题思路和方法,扩大知识面,加深对教材内容的理解,及时纠正在解题中出现的错误,克服在一些习题求解过程中遇到的困难。读者一定要本着对自己负责的态度,先自己做教材中的习题,不要先看解答或抄袭解答,在独立思考、独立解答的基础上,再参考本书,并领会注释中的点评。

通过这些注释,读者可以深刻领会教材中的基本概念的准确含义,开阔解题思路,掌握解题方法,避免在容易发生错误的环节上出现问题,从而提高解题能力,培养良好的数学思维。

本书是我社出版的《微积分》(第三版)的配套参考书,但它本身独立成

书,选用其他微积分教材的读者也可以选做参考书,同时也适合自学读者或准备考研的读者作为自学和练习的读物。

由于多方面原因,书中不妥之处在所难免,我们衷心欢迎广大读者批评指正。

中国人民大学出版社

2007年3月

目　录

第一章　函　数

(A)

1. 按下列要求举例：

(1) 一个有限集合

(2) 一个无限集合

(3) 一个空集

(4) 一个集合是另一个集合的子集

解：略.

2. 用集合的描述法表示下列集合：

(1) 大于 5 的所有实数集合

(2) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合

(3) 圆 $x^2+y^2=25$ 内部(不包括圆周)一切点的集合

(4) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合

解：下面的 x,y 都是实数.

(1) $\{x \mid x>5\}$

(2) $\{x \mid x^2-7x+12=0\}$

(3) $\{(x,y) \mid x^2+y^2<25\}$

(4) $\{(x,y) \mid y=x^2 \quad 且 \quad x-y=0\}$

3. 用列举法表示下列集合：

(1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合

(3) 集合 $\{x \mid |x-1| \leqslant 5, x 为整数\}$

解：(1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根为 $x=3$，$x=4$，故方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合为 $\{3,4\}$.

(2) 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 的交点，得 $(0,0),(1,1)$，故抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合为 $\{(0,0),(1,1)\}$.

(3) $|x-1|\leqslant 5$，即 $-5\leqslant x-1\leqslant 5$，也就是 $-4\leqslant x\leqslant 6$. 由于 x 为整数，故集合 $\{x\mid |x-1|\leqslant 5, x\text{ 为整数}\}$ 用列举法表示为：$\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$.

4. 写出 $A=\{0,1,2\}$ 的一切子集.

解： A 的子集有：$\varnothing$，$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{0,1\}$，$\{0,2\}$，$\{1,2\}$，$\{0,1,2\}$.

注释： 不要忘记空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subset A$；任何集合是它自身的子集，即 $A\subset A$. 这是因为，如果 $A\subset B$，则有“如果 $x\notin B$，则 $x\notin A$”，对于空集 $\varnothing$ 来说，$x\notin\varnothing$ 永远成立，所以对任何集合 A，都有 $\varnothing\subset A$；根据子集的定义，对任何的集合，都有 $A\subset A$.

5. 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,3,5\}$，$C=\{2,4,6\}$，求：

(1) $A\cup B$　　(2) $A\cap B$　　(3) $A\cup B\cup C$

(4) $A\cap B\cap C$　　(5) $A-B$

解： (1) $A\cup B=\{1,2,3,5\}$

(2) $A\cap B=\{1,3\}$

(3) $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$

(4) $A\cap B\cap C=\varnothing$

(5) $A-B=\{2\}$

6. 如果 $A=\{x\mid 3<x<5\}$，$B=\{x\mid x>4\}$，求：

(1) $A\cup B$　　(2) $A\cap B$　　(3) $A-B$

解： (1) $A\cup B=\{x\mid x>3\}$

(2) $A\cap B=\{x\mid 4<x<5\}$

(3) $A-B=\{x\mid 3<x\leqslant 4\}$

7. 设集合 $A=\{(x,y)\mid x+y-1=0\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid x-y+1=0\}$，求 $A\cap B$.

解： $A\cap B=\{(x,y)\mid x+y-1=0\text{ 且 }x-y+1=0\}$

解方程组 $\begin{cases}x+y-1=0\\x-y+1=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

于是有　$A\cap B=\{(x,y)\mid x+y-1=0\text{ 且 }x-y+1=0\}=\{(0,1)\}$

8. 如果 $A=\{(x,y)\mid x-y+2\geqslant 0\}$

$B=\{(x,y)\mid 2x+3y-6\geqslant 0\}$

$C=\{(x,y)\mid x-4\leqslant 0\}$

在坐标平面上标出集合 $A\cap B\cap C$ 的区域.

解：集合 A 在坐标平面上直线 $x-y+2=0$ 的右下方，包括直线上的点，集合 B 在直线 $2x+3y-6=0$ 的右上方，包括直线上的点，集合 C 在直线 $x-4=0$ 的左方，包括直线上的点.

因此，集合 $A\cap B\cap C$ 是由三条直线所围成的，包括边界在内的，用阴影表示的三角形区域，如图 1—1 所示.

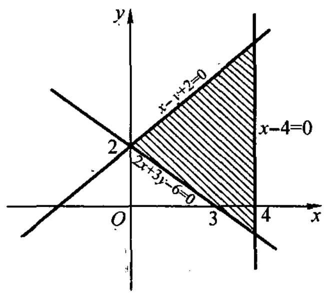


图 1—1

注释：用下面的方法判断 $Ax+By+C>0$（或 <0）的解集.

直线 $Ax+By+C=0$ 将坐标平面分成两个半平面，把原点(0,0)代入 $Ax+By+C=0$，若得 $Ax+By+C>0$（或 <0），则原点所在的半平面为 $Ax+By+C>0$（或 <0）的解集，另外一个半平面为 $Ax+By+C<0$（或 >0）的解集. 不等式为"$<$"或"$>$"时不包括直线上的点，不等式为"$\leqslant$"或"$\geqslant$"时包括直线上的点. 若直线过原点，另选其他点检验.

9. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,4,6\}$，求：

(1) $\overline{A}$　　(2) $\overline{B}$　　(3) $\overline{A}\cup\overline{B}$　　(4) $\overline{A}\cap\overline{B}$

解：(1) $\overline{A}=\{4,5,6\}$

(2) $\overline{B}=\{1,3,5\}$

(3) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,3,4,5,6\}$

(4) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{5\}$

10. 已知 $A=\{a,2,3,4\}$，$B=\{1,3,5,b\}$，若 $A\cap B=\{1,2,3\}$，求 a 和 b.

解：由 $A\cap B=\{1,2,3\}$ 可知集合 A，B 中都必有元素 1，2，3，因此可知 $a=1$，$b=2$.

11. 用集合的运算律证明：$X\cup\overline{X\cap Y}\cup Y=U$.

证：根据摩根律 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ 和结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$$\begin{aligned}X\cup\overline{X\cap Y}\cup Y&=X\cup(\overline{X}\cup\overline{Y})\cup Y\\&=[(X\cup\overline{X})\cup\overline{Y}]\cup Y\\&=(U\cup\overline{Y})\cup Y\\&=U\cup Y=U\end{aligned}$$

12. 如果 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{a,b,c\}$，求 $A\times B$.

解：$A\times B=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),$

$(c,c),(d,a),(d,b),(d,c)\}$

13. 如果 $X=Y=\{3,0,2\}$,求 $X\times Y$.

解: $X\times Y=\{(3,3),(3,0),(3,2),(0,3),(0,0),(0,2),(2,3),(2,0),(2,2)\}$

14. 设集合 $A=\{$北京,上海$\}$,$B=\{$南京,广州,深圳$\}$,求 $A\times B$ 与 $B\times A$.

解: $A\times B=\{$(北京,南京),(北京,广州),(北京,深圳),(上海,南京),(上海,广州),(上海,深圳)$\}$

$B\times A=\{$(南京,北京),(南京,上海),(广州,北京),(广州,上海),(深圳,北京),(深圳,上海)$\}$

15. 设集合 $X=\{x_1,x_2,x_3\}$,$Y=\{y_1,y_2\}$,$Z=\{z_1,z_2\}$,求 $X\times Y\times Z$.

解: $X\times Y\times Z=\{(x_1,y_1,z_1),(x_1,y_1,z_2),(x_1,y_2,z_1),(x_1,y_2,z_2),(x_2,y_1,z_1),(x_2,y_1,z_2),(x_2,y_2,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_1,z_1),(x_3,y_1,z_2),(x_3,y_2,z_1),(x_3,y_2,z_2)\}$

16. 解下列不等式:

(1) $x^2<9$ (2) $|x-4|<7$ (3) $0<(x-2)^2<4$

(4) $|ax-x_0|<\delta$ ($a>0$, $\delta>0$, x_0 为常数)

解: (1) $x^2<9$, 即 $|x|<3$, 所以有 $-3<x<3$.

(2) $|x-4|<7$, 即 $-7<x-4<7$, 所以有 $-3<x<11$.

(3) $0<(x-2)^2<4$, 即$(x-2)^2<4$ 且$(x-2)^2>0$, 那么有$|x-2|<2$ 且 $x\neq 2$, 也就是$-2<x-2<2$ 且 $x\neq 2$, 即 $0<x<4$ 且$x\neq 2$.

(4) $|ax-x_0|<\delta$, 即 $-\delta<ax-x_0<\delta$, 也即 $x_0-\delta<ax<x_0+\delta$, 又因为 $a>0$, 所以有 $\dfrac{x_0-\delta}{a}<x<\dfrac{x_0+\delta}{a}$.

17. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1) $|x|\leqslant 3$ (2) $|x-2|\leqslant 1$

(3) $|x-a|<\varepsilon$ (a 为常数, $\varepsilon>0$)

(4) $|x|\geqslant 5$ (5) $|x+1|>2$

解: (1) 由 $|x|\leqslant 3$, 有 $-3\leqslant x\leqslant 3$, 故 $x\in[-3,3]$.

(2) 由 $|x-2|\leqslant 1$, 有 $-1\leqslant x-2\leqslant 1$, 即 $1\leqslant x\leqslant 3$, 故 $x\in[1,3]$.

(3) 由 $|x-a|<\varepsilon$, 有$-\varepsilon<x-a<\varepsilon$, 即$a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$, 故$x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$.

(4) 由 $|x|\geqslant 5$, 有 $x\leqslant -5$ 或 $x\geqslant 5$, 即 $x\in(-\infty,-5]\cup[5,+\infty)$.

(5) 由 $|x+1|>2$, 有 $x+1<-2$ 或 $x+1>2$, 也就是 $x<-3$ 或 $x>1$,

即 $x\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$.

18. 用区间表示下列实数集合：

(1) $I_1=\{x\mid |x+3|<2\}$

(2) $I_2=\{x\mid 1<|x-2|<3\}$

(3) $I_3=\{x\mid |x-2|<|x+3|\}$

解：(1) 由 $|x+3|<2$，有 $-2<x+3<2$，也就是 $-5<x<-1$，即 $x\in(-5,-1)$，于是可得 $I_1=(-5,-1)$.

(2) 由 $|x-2|<3$，有 $-3<x-2<3$，即 $-1<x<5$；由 $|x-2|>1$，有 $x-2>1$ 或 $x-2<-1$，即 $x>3$ 或 $x<1$，那么有 $-1<x<1$ 或 $3<x<5$，即 $x\in(-1,1)\cup(3,5)$，于是可得：$I_2=(-1,1)\cup(3,5)$.

(3) 由 $|x-2|<|x+3|$ 可得

$$x+3>|x-2| \quad ①$$

或

$$x+3<-|x-2| \quad ②$$

由 ① 有 $\begin{cases}x-2<x+3\\x-2>-x-3\end{cases}$，可得 $x>-\dfrac{1}{2}$；

由 ② 有 $|x-2|<-x-3$，即 $\begin{cases}x-2<-3-x\\x-2>x+3\end{cases}$，无解.

故 $|x-2|<|x+3|$ 的解集为 $x\in\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，于是可得 $I_3=\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

注释：第 18 题(3) 亦可采用如下解法：

$|x-2|<|x+3|$，即 $\sqrt{(x-2)^2}<\sqrt{(x+3)^2}$，那么有：$(x-2)^2<(x+3)^2$. 化简得 $10x>-5$，所以 $x>-\dfrac{1}{2}$，即 $x\in(-\dfrac{1}{2},+\infty)$.

注释：解绝对值不等式，要设法去掉绝对值符号，主要常用的是绝对值的定义与性质，如 $a>0$ 时 $|x|<a\Longleftrightarrow -a<x<a$，$|x|>a\Longleftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$. 有时也可用不等式两边平方.

19. 下列给出的关系是不是函数关系？

(1) $y=\sqrt{-x}$　　(2) $y=\lg(-x^2)$

(3) $y=\sqrt{-x^2-1}$　　(4) $y=\sqrt{-x^2+1}$

(5) $y=\arcsin(x^2+2)$　　(6) $y^2=x+1$

解：(1) $y=\sqrt{-x}$

$-x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 0$，所以 $y=\sqrt{-x}$ 是定义域为 $(-\infty,0]$ 上的函数关系.

(2) $y=\lg(-x^2)$

对数的真数要求大于零,但 $-x^2\leqslant 0$, 所以 $y=\lg(-x^2)$ 不是函数关系.

(3) $y=\sqrt{-x^2-1}$

偶次根号下要求大于等于零,但 $-x^2-1=-(x^2+1)<0$, 所以 $y=\sqrt{-x^2-1}$ 不是函数关系.

(4) $y=\sqrt{-x^2+1}$

$-x^2+1\geqslant 0, x^2\leqslant 1, |x|\leqslant 1, -1\leqslant x\leqslant 1$, 所以 $y=\sqrt{-x^2+1}$ 是定义域为 $[-1,1]$ 上的函数关系.

(5) $y=\arcsin(x^2+2)$

反正弦函数要求 $|x^2+2|\leqslant 1$,但 $|x^2+2|>1$, 所以 $y=\arcsin(x^2+2)$ 不是函数关系.

(6) $y^2=x+1$

$y=\pm\sqrt{x+1}$, $x+1\geqslant 0$, $x\geqslant -1$. 对于 $x\in[-1,+\infty)$ 中的每一个 x 值,变量 y 有两个值与之对应, 所以 $y^2=x+1$ 不是(单值) 函数关系.

注释: 讨论给定关系是不是函数关系,要看下列两点:

(i) 定义域非空;

(ii) 对应规则能使定义域中每一个自变量的值都有唯一确定的因变量的实数值与之对应.

20. 下列给出的各对函数是不是相同的函数?

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$

(2) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$

(3) $y=\sqrt{x^2(1-x)}$ 与 $y=x\sqrt{1-x}$

(4) $y=\sqrt[3]{x^3(1-x)}$ 与 $y=x\sqrt[3]{1-x}$

(5) $y=\sqrt{x(x-1)}$ 与 $y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$

(6) $y=\sqrt{x(1-x)}$ 与 $y=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$

解: (1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域要求 $x\neq 1$,即定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, $y=x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,故二者不是相同的函数.

(2) $y=\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $y=2\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,故二者不是相同的函数.

(3) $y=\sqrt{x^2(1-x)}$ 的定义域为 $(-\infty,1]$, $y=x\sqrt{1-x}$ 的定义域为

$(-\infty,1]$，$y=\sqrt{x^2(1-x)}$ 与 $y=x\sqrt{1-x}$ 的定义域虽然相同，但其对应规则不同，$y=\sqrt{x^2(1-x)}$ 的值域为 $[0,+\infty)$，而 $y=x\sqrt{1-x}$ 的值域为 $(-\infty,\frac{2\sqrt{3}}{9})$，故二者不是相同的函数.

(4) $y=\sqrt[3]{x^3(1-x)}$ 与 $y=x\sqrt[3]{1-x}$ 的定义域皆为 $(-\infty,+\infty)$，且其对应规则也相同，故二者是相同的函数.

(5) $y=\sqrt{x(x-1)}$ 的定义域要求满足 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x-1\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant 0\\x-1\leqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x\geqslant 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant 0\\x\leqslant 1\end{cases}$，亦即 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant 0$. 因此，$y=\sqrt{x(x-1)}$ 的定义域为 $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$；而 $y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$ 的定义域要求满足 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x-1\geqslant 0\end{cases}$，即 $x\geqslant 1$，因此，$y=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$ 的定义域为 $[1,+\infty)$，所以二者不是相同的函数.

(6) $y=\sqrt{x(1-x)}$ 的定义域要求满足 $\begin{cases}x\geqslant 0\\1-x\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant 0\\1-x\leqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\x\leqslant 1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\leqslant 0\\x\geqslant 1\end{cases}$，亦即 $0\leqslant x\leqslant 1$. 因此，$y=\sqrt{x(1-x)}$ 的定义域为 $[0,1]$，$y=\sqrt{x}\sqrt{1-x}$ 的定义域为 $[0,1]$，二者对应规则亦相同，故二者是相同的函数.

注释： 函数的两要素是定义域与对应规则，只有两要素均相同的函数，才是相同的函数，判别两函数是否相同就从这两方面着手：

(ⅰ) 验证定义域是否相同；

(ⅱ) 判别对应规则是否一致.

仅当二者完全相同时，两函数才是相同的函数.

相同的函数，定义域相同，对应规则相同，而对应规则相同则值域肯定相同，因为对应规则相同就是表现在相同的自变量的值对应相同的函数值上. 因此，如果值域不同，则对应规则肯定不同. 在判别两函数的对应规则是否相同时，能由值域不同，得出对应规则不同的结论. 但值域相同，对应规则不一定相同. 例如 $y=x^2$ 与 $y=x^4$，定义域皆为 $(-\infty,+\infty)$，值域皆为 $[0,+\infty)$，但对应规则不同，所以，不能用值域相同来说明对应规则相同.

21. 已知 $f(x)=x^2-3x+2$，求：$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(-x)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$ $(x\neq 0)$，$f(x+1)$.

解： $f(0)=2$，$f(1)=0$，$f(2)=0$，$f(-x)=x^2+3x+2$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2 \quad (x\neq 0)$$

$$f(x+1)=(x+1)^2-3(x+1)+2=x^2-x$$

22. 设 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，求：$f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

解： $$f[f(x)]=\frac{f(x)}{1-f(x)}=\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\frac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}$$

$$f\{f[f(x)]\}=\frac{f[f(x)]}{1-f[f(x)]}=\frac{\frac{x}{1-2x}}{1-\frac{x}{1-2x}}=\frac{x}{1-3x}$$

23. 如果 $f(x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$，证明 $f(-x)=-f(x)$.（e是一个常数，它是无理数，$e\approx 2.71828$.）

证： $$f(-x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=-\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-f(x)$$

24. 如果 $f(x)=\frac{1-x^2}{\cos x}$，证明 $f(-x)=f(x)$.

证： $$f(-x)=\frac{1-(-x)^2}{\cos(-x)}=\frac{1-x^2}{\cos x}=f(x)$$

25. 如果 $f(x)=a^x\quad (a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$，证明：

$$f(x)\cdot f(y)=f(x+y),\quad \frac{f(x)}{f(y)}=f(x-y)$$

证： $f(x)\cdot f(y)=a^x\cdot a^y=a^{x+y}=f(x+y)$

$$\frac{f(x)}{f(y)}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}=f(x-y)$$

26. 如果 $f(x)=\log_a x\quad (a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$，证明：

$$f(x)+f(y)=f(xy),\quad f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$$

证： $f(x)+f(y)=\log_a x+\log_a y=\log_a(xy)=f(xy)$

$$f(x)-f(y)=\log_a x-\log_a y=\log_a \frac{x}{y}=f\left(\frac{x}{y}\right)$$

27. 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{9-x^2}$　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$

(3) $y=\dfrac{-5}{x^2+4}$　　(4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$

(5) $y=1-2^{1-x^2}$　　(6) $y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$

(7) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$　　(8) $y=\dfrac{\arccos\dfrac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$

(9) $y=\lg[\lg(\lg x)]$

解：(1) $9-x^2\geqslant 0$，即 $x^2\leqslant 9$，$|x|\leqslant 3$，所以函数定义域为$[-3,3]$.

(2) $\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\neq\pm 1\\ x\geqslant -2\end{cases}$，

所以函数定义域为$[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) $x^2+4\neq 0$，x 可取任意实数，所以函数定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(4) $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1$，亦即 $-2\leqslant x-1\leqslant 2$，因此有 $-1\leqslant x\leqslant 3$，所以函数定义域为$[-1,3]$.

(5) x 可取任意实数，所以函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(6) $\begin{cases}3-x>0\\ |x|-1>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x<3\\ x<-1 \text{ 或 } x>1\end{cases}$，

所以函数定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,3)$.

(7) $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$，即 $\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$，即 $x^2-5x+4\leqslant 0$，即 $(x-1)(x-4)\leqslant 0$. 只要 $\begin{cases}x-1\leqslant 0\\ x-4\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1\geqslant 0\\ x-4\leqslant 0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x\leqslant 1\\ x\geqslant 4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 1\\ x\leqslant 4\end{cases}$，因此有 $1\leqslant x\leqslant 4$，所以函数定义域为$[1,4]$.

(8) $\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\\ x^2-x-6>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}|2x-1|\leqslant 7 & ①\\ (x+2)(x-3)>0 & ②\end{cases}$

由 ① 有 $-7\leqslant 2x-1\leqslant 7$，即 $-6\leqslant 2x\leqslant 8$，即 $-3\leqslant x\leqslant 4$.