高中
数学典型例题分析与自测

北京市西城区教研中心数学组 编著

海洋出版社

高中数学典型例题
分析与自测

北京市西城区教研中心数学组 编著

海 洋 出 版 社

1991 年·北京

内容简介

本书是北京市有多年教学经验的中学数学老师编写而成的。按照中学教育数学大纲的要求，本书分为若干部分，每一部分均通过典型例题分析基础知识的运用，分析解题的基本思路和方法，并配有自我检查题，附有答案或提示。全书经科学院研究所的家专的审阅，得到了颇高的评价。

本书可供从事高考的读者使用，也可供中学教师参考。

责任编辑　周培兴
责任校对　金玉筠

（京）新登字087号

高中数学典型例题分析与自测
北京市西城区教研中心数学组　编著

•

海洋出版社出版（北京市复兴门外大街1号）
新华书店北京发行所发行　建华印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：23 字数：400千字
1991年11月第一版　1991年11月第一次印刷
印数：1—5500

ISBN 7-5027-0198-2/G·5 定价：10.50元

前　言

为了帮助参加高考的人员深入理解和牢固掌握数学基础知识，加强基本技能的训练，灵活运用所学知识，提高分析问题和解题的能力，按照数学教学大纲的要求，组织我区有经验的部分教师和西城区教研中心的数学教研员一起编写了《高中数学典型例题分析与自测》一书。

本书按教学大纲要求分成若干单元，每一单元均有典型例题分析，基础知识的运用、分析解题的基本思路和方法、配有自我测验题，附有答案或提示。

参加本书编写的有北京三中陈莘联，北京四中田佣、北京六中孙家钰，北京十三中尹濬森，北京三十九中戴明源，北京四十二中俞裕安，北京师大实验中学张春条，北京师大二附中张自文，北京西城教研中心李松文、冼伟强、欧阳东方、刘绍贞、方珊等老师，最后由西城区教研中心中学教研室数学组统编。

由于水平有限，其中若有缺点和错误，欢迎读者批评，指正。

北京市西城区教学研究中心

中学教研室数学组

1988.10

目　录

立体几何部分

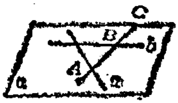
第一章　直线与平面

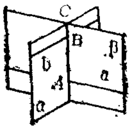
一、平面、空间两条直线

例1. 指出下列问题中的（A）、（B）、（C）、（D）哪些是正确的，并将正确的画图表示.

（1）一条直线与两条直线都相交，可以确定：（A）一个平面，（B）两个平面，（C）三个平面，（D）四个平面.

答：（A）（B）（C）是正确的. 图如下：

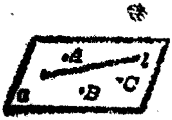

(A)

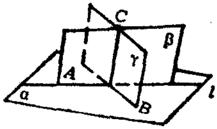

(B)

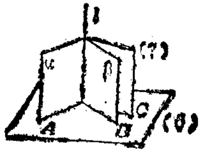
(C)

（2）一条直线和这直线外不在同一直线上的三点，可以确定：（A）一个平面，（B）两个平面，（C）三个平面，（D）四个平面.

答：（A）（C）（D）是正确的. 图如下：


(A)


(B)


(C)

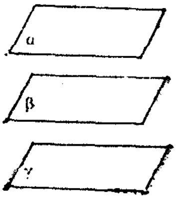
（A）三点与直线在同一平面内，可以确定一个平面。如图（A）

（C）三点中有两点与直线共面，可以确定三个平面。如图（C）

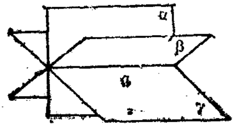
（D）三点中任何两点不与直线共面，可以确定四个平面。如图（D）

（3）三个平面能将空间分成：（A）四部分，（B）六部分，（C）七部分，（D）八部分。

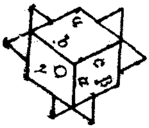
答：（A）（B）（C）（D）都是正确的。图如下：

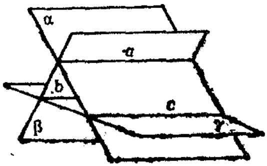


(A)

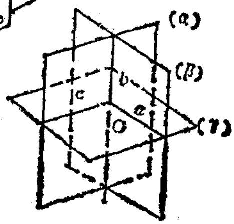


(B)





(C)



(D)

（A）三个互相平行的平面，将空间分为四部分。如图A

（B）三个平面相交于一条直线，将空间分为六部分如图B

（C）三个平面两两相交，且三条交线互相平行，可将空间分为七部分．如图（C）

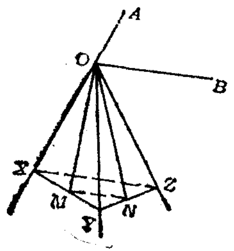
（D）三个平面两两相交，且三条交线交于一点，可将空间分为八部分．如图（D）

说明：（1）使学生从看实物，想图并正确的画出图来，从而进一步理解平面的基本性质．

（2）通过以上问题，培养学生画空间图形的能力．

（3）在第(1)问中，可以先从空间两条直线a、b的各种位置关系考虑，然后再加上一条直线c，这样易于画出各种情况．也可由三条直线a、b、c，它们可能相交于一点、两点、三点，分别来考虑．在第（2）问中，应先思考直线l与A、B、C三点中一点、两点、三点共面的不同情况及可能确定的平面数，画出草图，再标明点、线．在问题（3）中，强调了平面可以无限延展，并指出，三个平面两两相交，它们的三条交线或互相平行、或交于一点为什么？

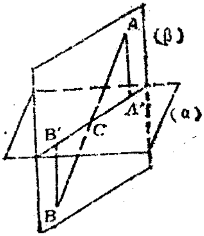
例2． 由一点O作射线OX，OY，OZ，求证：$\angle XOY$，$\angle YOZ$的平分线和$\angle ZOX$的外角平分线在同一平面内．



证明：如图，截取$OX=OY=OZ$，作$\angle XOY$，$\angle YOZ$的角平分线OM、ON，分别交XY、YZ于M、N，则M、N分别为XY、YZ的中点，$\therefore MN \parallel XZ$．设平面$OMN$与平面$OXZ$交于过$O$点的直线$OB$，则$OB \parallel XZ$．在$\angle XOZ$所在的平面内，由$\angle AOB=\angle OXZ$，$\angle BOZ=\angle OZX$，

而$\angle OXZ=\angle OZX$，$\therefore \angle AOB=\angle BOZ$，$OB$为$\angle XOZ$的外角的平分线．即$\angle XOY$，$\angle YOZ$的平分线与$\angle ZOX$外角的平分线共面．

说明：证明线共面的问题．一般由已知相交或平行直线确定平面，再证某直线在此平面内，本题是根据角平分线的特性，先作出平面，再证此平面内的某线合于条件．本题也可先作$\angle AOZ$的平分线OB'再证OB'在平面OMN内．



例3． 已知线段AB与平面α，$AB\cap\alpha=C$，$AA'\perp\alpha$于A'，$BB'\perp\alpha$于B'。求证点A'、B'、C在一直线上．

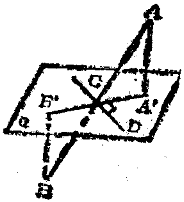
证法一：如图，

$$\because \left.\begin{array}{l}AA'\perp\alpha\\ BB'\perp\alpha\end{array}\right\}\rightarrow AA'\parallel BB'，过AA'，BB'作平面\beta，$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\cap\beta=A'B'，由\left.\begin{array}{r}AB\subset\beta\\ C\in AB\end{array}\right\}\rightarrow C\in\beta\\ \qquad\qquad 又AB\cap\alpha=C\rightarrow C\in\alpha\end{array}\right\}\rightarrow C\in A'B'$$

即A'、B'、C在一直线上．

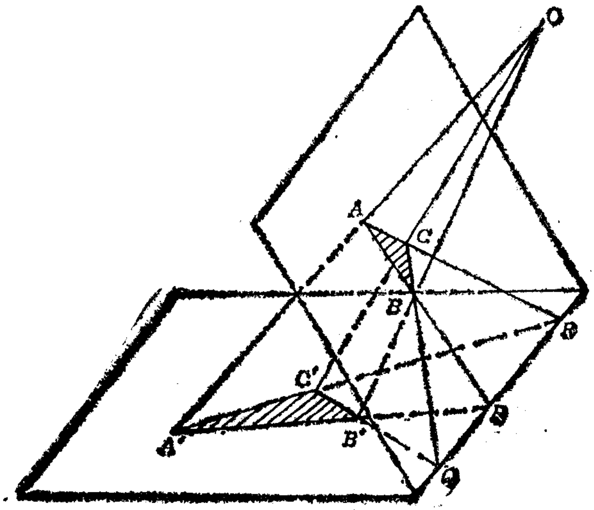
证法二：过C点在α内作$CD\perp CA'$，$\because AA'\perp\alpha$，根据三垂线定理，$\therefore CD\perp AC$，即$CD\perp BC$，又$BB'\perp\alpha$，根据三垂线定理之逆，$\therefore CD\perp CB'$．在平面α内过C点的CA'、CB'都垂直于直线CD，$\therefore$点A'、B'、C在一直线上．



说明：证点共线问题时，一般考虑这些点能否在有关二平面的交线上．证法二是应用三垂线定理及其逆并结合平面几何的定理证题的．

例4． 已知$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$分别在两个不同的平面上，且对应边的AB与$A'B'$，CB与$C'B'$，AC与$A'C'$的延长线分别交于点P、Q、R．求证（1）点P、Q、R在一直线上；（2）若直线$AA' \parallel BB'$则$AA' \parallel BB' \parallel CC'$；（3）若直线$AA' \cap BB' = O$则直线$AA'$、$BB'$、$CC'$交于一点$O$．

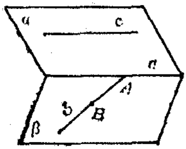
证明：①如图，$\because AB \cap A'B' = P$，$\therefore P \in$平面$ABC$，$P \in$平面$A'B'C'$．同理，$BC \cap B'C' = Q$，$AC \cap A'C' = R$，$\therefore$点$P$、$Q$、$R$在平面$ABC$与平面$A'B'C'$的交线上，



即P、Q、R在一直线上。②如图，$\because AB\cap A'B'=P$，$\therefore AA'$、BB'确定平面。同理，BB'与CC'共面，CC'与AA'共面。若$AA'\parallel BB'$，则$AA'\parallel$平面$BCC'B'$。又平面$BCC'B'\cap$平面$ACC'A'=CC'$，$\therefore AA'\parallel CC'$，即$AA'\parallel BB'\parallel CC'$。③如图，若$AA'\cap BB'=O$则$O\in$平面$BCC'B'$上。又$O\in$平面$ACC'A'$上。则$O$点在二平面的交线$CC'$上，$\therefore$直线$AA'$、$BB'$、$CC'$交于一点$O$。

说明：（1）证明线共点的问题，一般证第三条直线经过前两条直线的交点。（2）证线线平行的问题，一般从线线看，有三线平行定理。从线面观察，从线面平行中找线线平行，二线同垂直于一平面找线线平行，从面面观察，有二平行平面与第三平面相交得到线线平行，可根据题设条件与进度逐步小结平行的判定。

例5. 已知$\alpha\cap\beta=a$，$b\subset\beta$，且$b\cap a=A$。$c\subset\alpha$，且$c\parallel a$，求证b、c为异面直线。



证法一： 如图，$c\subset\alpha$，

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\cap\beta=a\\ b\cap a=A\end{array}\right\}\Rightarrow A\in\alpha,$$

$$\left.\begin{array}{l}A\in a\\ a\parallel c\end{array}\right\}\Rightarrow A\notin c$$

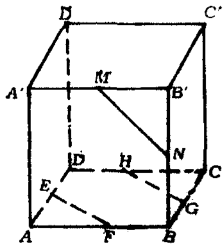
在直线b上任取一点B（不同于A）。

$b\subset\beta$则$B\notin\alpha$。$\therefore b$、c为异面直线（平面内一点与平面外一点的连线，和平面内不经过该点的直线是异面直线）。

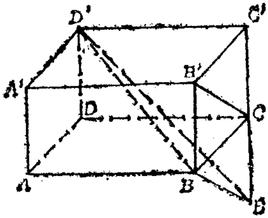
证法二： 用反证法。假设b、c共面，可能$b\parallel c$或b与c相交。（1）若$b\parallel c$，已知$a\parallel c$，$\therefore a\parallel b$与已知$a\cap b=A$矛盾，$\therefore b\parallel c$不成立。（2）若$b\cap c=O$，已知$b\subset\beta$，$c\subset\alpha$，

又$\alpha\cap\beta=a$，则交点O必在a直线上，即a、c交于O，与已知$a\parallel c$矛盾．∴b、c相交不成立．综上（1）（2），故b、c为异面直线．

说明：（1）证法一应用了高中课本第11页的例题证法，它是证异面直线的依据．（2）证法二是用反证法．应掌握反证法的要领．



例6．（1）如图，在正方 $BCD—A'B'C'D'$中，E、F、G、H、M、N分别为AD，AB，BC，CD，$A'B'$和BB'的中点：（1）直线EF与MN的位置关系是____，它们的夹角是____．直线GH与MN的位置关系是____，它们的夹角是____．（2）长方体$ABCD—A'B'C'D'$中，$AB=3\text{cm}$，$BC=2\text{cm}$，$CC'=1\text{cm}$，求$D'B$与$B'C$所成角的余弦角。

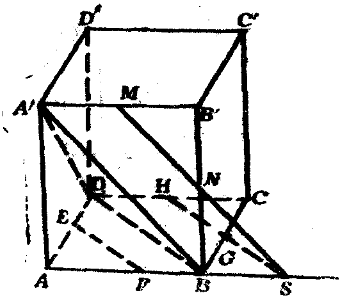


解（1）EF与MN是异面直线，成60°角．GH与MN是相交直线，成60°角．

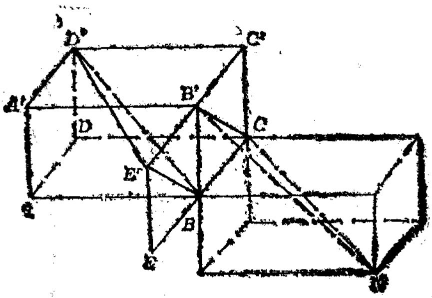
（2）如图，延长$C'C$至E，使$CE=CC'$，连BE。∵$BB'\perp CE$，∴$BE\parallel B'C$，故$\angle D'BE$为$D'B$与$B'C$所成的角．在$\triangle D'BE$中，$D'B=\sqrt{14}$，$BE=\sqrt{5}$，$D'E=\sqrt{13}$．根据余弦定理，

$$\cos\angle D'BE=\frac{|D'B|^2+|BE|^2-|D'E|^2}{2|D'B|\cdot|BE|}$$

$$=\frac{14+5-13}{2\sqrt{14}\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{70}}{70}.$$



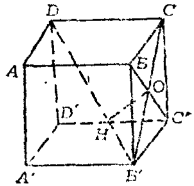
说明：①从空间图形中，判断线线的位置关系，要注意推理论证。如图两个平行四边形 $A'BSM$ 与 $DBSH$，说明MN与GH为相交直线。由$MNS\parallel A'B$,$HGS\parallel DB$,知MN与HG所成角为60°.②求异面直线所成的角，一般用



平移法找角。常用的方法有：①找特殊点引平行线；②适当延伸等长线段。同样的正方体，长方体等，取平行线得到角。如第（2）题引角的方法很多，如上图，延长线段$B'E'=B'C'$，或延伸一个同样的长方体CN得到所求角。应注意取锐角或直角，如图所示。

例7. 求异面直线间的距离。

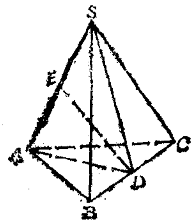
（1）已知正方体AC'的棱长为a，求DB'与BC'间的距离。



分析： 要线线垂直，可先考虑线面垂直。根据正方体的特点，连$B'C$则$BC'\perp$平面DCB'。再过O点作$OH\perp B'D$于H，OH即异面直线DB'与BC'间的距离。

计算： 由$\triangle B'OH\backsim\triangle B'CD$得$OH=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$。

（2）正三棱锥$S\text{-}ABC$，底面边长为a，侧棱长为b，求对棱SA与BC间的距离。

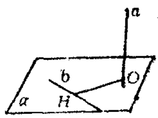


分析： ①先考虑过SA（或BC）与BC（或SA）垂直的平面。②根据正三棱锥的特点，取BC的中点D，连SD、AD，则$BC\perp$平面ADS。③过D点作$DE\perp SA$于E，则DE为SA与BC间的距离。

计算： 由直角三角形得 $DE=\dfrac{\sqrt{3b^2-a^2}}{2}$。

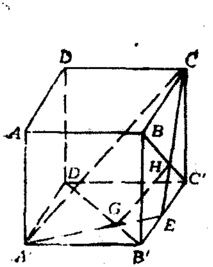
说明： 通过以上两例，看出是异面直线a、b，易于找过b而垂直于a的平面。

解法步骤： 如下图①使a垂直于过b的平面α，②由a与平面α的交点O作b的垂线OH，交点与垂足间的线段OH的长即a、b间的距离。



（3）已知正方体的棱长为a，求$B'D'$与BC'间的距离。

分析： ①要找与$B'D'$及BC'都垂

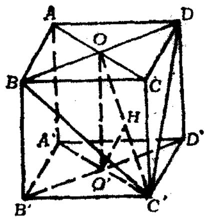


直且相交的直线，先只考虑与$B'D'$及BC'都垂直的直线，由三垂线定理，知$A'C$与$B'D'$及BC'都垂直。②再找与$D'B'$及BC'都相交且与$A'C$平行的直线。由正方体的特点，取$B'C'$的中点E，连EC与BC'交于H。连$A'E$与$B'D'$交于G，由$EH:EC=EG:EA'=1:3$，则$GH\parallel A'C$，得GH为$D'B'$与BC'间的距离。

计算：$\because GH:A'C=1:3$，$\therefore GH=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$。

此种解法简捷，但初学时不易由正方体的特点分析出距离。

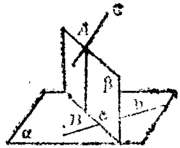
另一种解法是，从"异面直线a、b间的距离就是a和过b且平行于a的平面α间的距离"来考虑。①找过BC'的平面$BC'D$平行于$B'D'$，②要找$B'D'$到平面$BC'D$的距离，先考虑适当作$B'D'$的垂面，根据正方体的特点，能找到$B'D'\perp$平面$AA'C'C$。得到平面$AA'C'C$交平面$BC'D$于OC'，③由平面$AA'CC'\perp$平面$BC'D$，过O'点作$O'H\perp OC'$于H，则得$O'H$为$B'D'$与BC'间的距离。



计算：在$Rt\triangle OO'C'$中，由$O'H\times OC'=OO'\times O'C$，$\therefore O'H=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$。

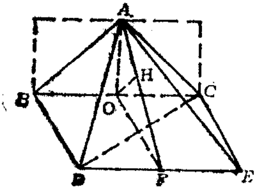
说明：此种解法，在异面直线的位置关系上不易找距离

时，可用异面直线a、b，找过b而平行于a的平面的方法。



解法步骤 ①取过b的平面α使之平行于a；②作a的垂面β与平面α交于直线c；③从a与垂面β的交点A，作交线c的垂线，得交点A与垂足B间的线段长$|AB|$，即为所求。

（4）有两个三角板，其中30°板的长直角边与45°板的斜边等长，将它们搭成一个直两面角，若BC的长为a，求异面直线AD与BC的距离。



分析：①一般将直二面角的两个半平面置于正方体或长方体中，便于画图思考元素间的位置关系。②找过AD平行于BC的平面，要作$DE\perp BC$，连AE，则得BC∥平面ADE。③找BC的垂面，就其特点作$AO\perp BC$于O，再作$OF\perp DE$于F，连AF，则$BC\perp$平面AOF，平面$AOF\perp$平面ADE。④过BC与垂面AOF的交点O作$OH\perp AF$于H，则$OH\perp$平面ADE，OH即BC与平面ADE间的距离，OH即BC与AD间的距离。

计算：在Rt△AOF中，$OH\times AF=AO\times OF$得$OH=\frac{\sqrt{7}}{7}a$。

自我检查题【一】A组

1. 三条直线a、b、c相交于一点，最多能确定几个平