21世纪高等学校规划教材

Textbook Series of 21st Century

概率论与数理统计

GAILVLUN YU SHULITONGJI

王晓慧　张宏志　主　编

邢丽君　禹海兰　副主编

曲忠宪　张　杰

郭丽杰

中国电力出版社

http://jc.cepp.com.cn

21世纪高等学校规划教材
Textbook Series of 21st Century

概率论与数理统计

GAILVLUN YU SHULITONGJI

主　编　王晓慧　张宏志
副主编　邢丽君　禹海兰
　　　　曲忠宪　张　杰
　　　　郭丽杰
编　写　郭新辰
主　审　刘泮石

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为21世纪高等学校规划教材。

全书共分9章，主要内容包括随机事件与概率、条件概率与独立性、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征与极限定理、数理统计的基础知识、参数估计、假设检验、单因素方差分析及一元线性回归。本书后有附表，每章后附有习题，书后还配有综合训练题及参考答案，供学生复习参考用。本书充分考虑了培养21世纪工程技术人才对数学的要求，在总结多年教学经验的基础上，充分吸取了现有教材的优点和教学成果，理论严谨、语言精练、概念准确、系统性强。

本书可作为高等学校的基础课教材，也可作为高职高专相关专业学生的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/王晓慧，张宏志主编. —北京：中国电力出版社，2008

21世纪高等学校规划教材

ISBN 978-7-5083-6687-6

Ⅰ. 概… Ⅱ. ①王…②张… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. 021

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第006981号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路6号 100044 http：//jc.cepp.com.cn）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2008年1月第一版 2008年1月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 12印张 288千字

定价 **19.00** 元

前 言

21 世纪是富于竞争和挑战的时代，是经济多元化、知识多元化的时代，是科学技术突飞猛进和经济高速发展的时代。因此，培养有创新意识和发展潜力、胜任国际竞争的挑战、适应社会和经济建设需要的人才，是大学教育的一个重要目标。在理工科大学教育中，数学课程既是基础理论课程，同时又能在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用。

本书是在充分考虑了培养 21 世纪工程技术人才对数学的要求，在总结多年教学经验的基础上，充分吸取了现有教材的优点和教学成果编写而成的。本书在编写过程中，注重课程内容的有机结合，强调对基本理论、解题方法的严谨精练的阐述，力求例题和习题选取丰富、具有综合性和实用性，重视对学生分析问题、解决问题及创新能力的培养。

本书由东北电力大学理学院王晓慧和张宏志主编。书中第 1 章由邢丽君编写，第 2 章由郭丽杰编写，第 3 章由张宏志编写，第 4 章由张杰编写，第 5、6 章由王晓慧编写，第 7、8 章由禹海兰编写，第 9 章由曲忠宪编写。

本书由东北电力大学刘洋石教授主审，他提出了许多宝贵意见和建议，在此表示衷心的感谢。

《概率论与数理统计》编写组

2007 年 8 月

目　录

第一章　随机事件与概率

概率论是研究随机现象的统计规律性的一个数学分支．本章主要介绍概率论中的基本概念，即随机事件与随机事件的概率，并进一步讨论随机事件的关系与运算，以及概率的性质与计算方法．

1.1　随　机　事　件

1.1.1　必然现象与随机现象

在自然界与人类的社会活动中常常会出现各种各样的现象．一般来说可分为两类：一类是**必然现象**（或称**确定性现象**），另一类是**随机现象**（或称**不确定性现象**）．

必然现象是指在相同条件下重复试验，所得结果总是确定的现象，只要试验条件不变，试验结果在试验之前是可以预言的．例如：在标准大气压下，将水加热到100℃，水必然沸腾；一枚硬币向上抛起后必然会落地，等等，这些现象都是必然现象．

随机现象是指在相同条件下重复试验，所得结果不一定相同的现象，即试验结果是不确定性的现象．对这种现象来说，每次试验之前哪一种结果发生是无法预言的．例如：将一枚硬币向上抛起，着地时可能正面向上，也可能反面向上；向一目标进行射击，可能命中目标，也可能不命中目标；从一批产品中随机抽检一件产品，结果可能是合格品，也可能是次品，等等．这些现象都是随机现象．

人们经过长期的反复实践，发现随机现象虽然就每次试验结果来说，具有不确定性，但大量重复试验，所得结果却呈现出某种规律性．例如：

(1) 掷一枚质量均匀的硬币．当投掷次数很大时，就会发现正面和反面出现的次数几乎各占一半．

(2) 对一目标进行射击．当射击次数不多时，对弹孔分布看不出有什么规律性；但当射击次数非常多时，就可发现弹孔的分布呈现一定的规律性，即弹孔关于目标的分布略呈对称性，且越靠近目标的弹孔越密，越远离目标的弹孔越稀．

从上述各例可以看到，随机现象也包含着规律性，它可在相同条件下的大量重复试验或观察中呈现出来，这种规律性称为**随机现象的统计规律性**．

1.1.2　随机试验与样本空间

在客观世界中，随机现象是极为普遍的．为了研究随机现象的统计规律性，要对随机现象进行试验和观察．这里所说的试验必须具有以下三个特点：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 试验的所有可能出现的结果不止一个，而且试验前是已知的；

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但究竟出现哪一个结果，试验前不能确切预言．

在概率论中，称具有上述三个特点的试验为**随机试验**，简称**试验**，以字母 E 表示．

要研究一个随机试验，首先要弄清楚这个试验所有可能的结果，每一个可能出现的结果称为随机试验的**样本点**，用字母 e 表示．由全体样本点构成的集合称为**样本空间**，用字母 S 表示．

换句话说，样本空间是试验的所有可能结果所组成的集合，这个集合中的元素就是样本点．下面看几个例子．

例 1　掷一枚质量均匀的硬币，观察正反面出现的情况．这是一个随机试验，可能出现的试验结果有两个，即正（正面向上）、反（反面向上）．故样本空间

$$S=\{\text{正},\text{反}\}.$$

例 2　将上述硬币掷两次，观察正反面出现情况．这也是一个随机试验，可能出现的试验结果有四个：（正正），（正反），（反正），（反反）．这里括号内的第一个字和第二个字，分别表示第一次和第二次掷的结果．故样本空间

$$S=\{(\text{正正}),(\text{正反}),(\text{反正}),(\text{反反})\}.$$

例 3　掷一颗骰子，观察出现的点数．用 e_i 表示"出现 i 点"，则 $e_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 为这个试验的基本事件．故样本空间

$$S=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}.$$

例 4　观察某交通道口中午 1h 内汽车流量（单位：辆）．这是一个随机试验．可能出现的试验结果是非负整数中的任意一个，由于难以规定汽车流量的上界，故样本空间

$$S=\{0,1,2,3,\cdots,n\}.$$

它是一个数集，由可列无限个样本点组成．

例 5　从一批灯泡中抽取一只灯泡，测试它的使用寿命．设 t 表示寿命，则样本空间

$$S=\{t:t\geqslant 0\}.$$

它是一个数集，由不可列无限个样本点组成．

从以上例子中可以看出：样本空间可以是数集，也可以不是数集；样本空间可以是有限集，也可以是无限集．

1.1.3　随机事件

当通过随机试验来研究随机现象时，常常不是关心某一个样本点在试验后是否出现，而是关心满足某些条件的样本点在试验后是否出现．例如，在上面例 4 中，要通过对该道口汽车流量的观察来决定是否需要扩建道口．假设超过 700 辆就认为需要扩建，这时，我们关心的便是试验结果是否大于 700，满足这一条件的样本点组成了样本空间的一个子集．称一个随机试验的样本空间的子集为**随机事件**，简称为**事件**，通常用大写字母 A，B，C，…表示．仅含一个样本点的随机事件称为**基本事件**．例如：在上面例 1 中，有两个基本事件 {正面}，{反面}；在上述例 4 与上述例 5 中，分别有无限多个基本事件．

在试验后，如果出现随机事件 A 中所包含的某个样本点，那么就称事件 A 发生；否则，就称**事件 A 不发生**．

样本空间 S 是其自身的一个子集，因而也是一个事件．由于样本空间 S 包含所有的样本点，因此每次试验必定有 S 中的一个样本点出现，即 S 必然发生，称 S 为**必然事件**．空集 $\varnothing$ 永远是样本空间的一个子集，因而也是一个事件．由于空集 $\varnothing$ 不包含任意一个样本点，因此每次试验后 $\varnothing$ 必定不发生，称 $\varnothing$ 为**不可能事件**．必然事件 S 和不可能事件 $\varnothing$ 是两个特殊的随机事件．

例 6 在上述例 2 中，若设事件 A= "第一次出现正面". 在一次试验中，A 发生当且仅当在这次试验中出现基本事件（正正），（正反）中的一个. 这样可以认为 A 是（正正），（正反）组成的，而将 A 定义为它们组成的集合

$$A=\{(正正),(正反)\}.$$

又如事件 B= "两次出现同一面". B 发生当且仅当基本事件（正正），（反反）中的一个出现. 而将 B 定义为它们组成的集合

$$B=\{(正正),(反反)\}.$$

类似地，事件 C= "至少有一次出现正面". 可定义为集合

$$C=\{(正正),(正反),(反正)\}.$$

事件 D= "第一次出现反面". 可定义为集合

$$D=\{(反反),(反正)\}.$$

1.2 事件的关系与运算

在实际问题中，往往要在同一个试验中同时研究几个事件以及它们之间的联系. 通过详细分析事件之间的关系，能够更深入地认识事件的本质，掌握较复杂的事件.

在下面的叙述中，为直观起见，用平面的一个矩形域表示样本空间 S，矩形内的每一点表示样本点（基本事件）；并用矩形内的两个圆分别表示事件 A 和事件 B.

1.2.1 事件的包含与相等

定义 1.1 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

B 包含 A 如图 1-1 所示.

例如，在 1.1 节例（6）中，由于 $A=\{(正正),(正反)\}$，$C=\{(正正),(正反),(反正)\}$，故 $A\subset C$.

对任一事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset S$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

1.2.2 事件的积（或交）

定义 1.2 "事件 A 与事件 B 同时发生"的事件，称为事件 A 与事件 B 的积（或积事件），记作 AB 或 $A\cap B$.

A 与 B 的积如图 1-2 中的阴影部分所示.

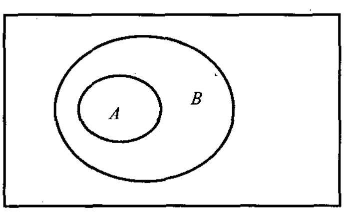

图 1-1

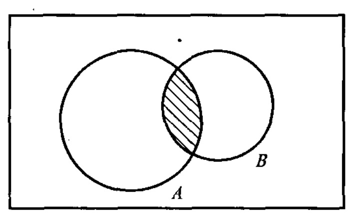

图 1-2

例如，在 1.1 节例 6 中，$AB=\{(正正)\}$，$AC=A$.

一般地，称"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生"的事件为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积，记作

$A_1A_2\cdots A_n$ 或$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

1.2.3 事件的和（或并）

定义 1.3 “事件 A 与事件 B 中至少有一个发生”的事件，称为事件 A 与事件 B 的**和**（**或和事件**），记作 $A\cup B$ 或 $A+B$.

A 与 B 的和如图 1-3 中的阴影部分所示.

例如，在 1.1 节例（6）中，由于 $A=\{$(正正)，(正反)$\}$，$B=\{$(正正)，(反反)$\}$，故 $A\cup B=\{$(正正)，(正反)，(反反)$\}$.

一般地，称“事件 A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生”的事件为 A_1，A_2，…，A_n 的和，记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 或$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

1.2.4 事件的差

定义 1.4 “事件 A 发生而事件 B 不发生”的事件，称为事件 A 与事件 B 的**差**，记作$A-B$.

A 与 B 的差如图 1-4 中的阴影部分所示.

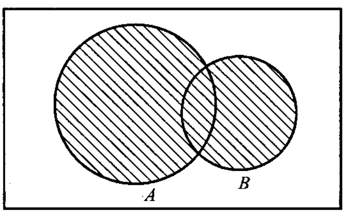

图 1-3

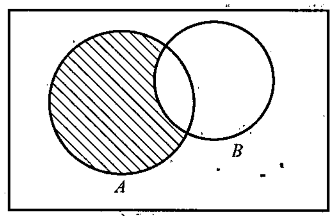

图 1-4

例如，在 1.1 节例 6 中，$A-B=\{$(正反)$\}$，$A-C=\varnothing$，$A-D=A$.

对任意事件 A，$A-A=\varnothing$，$A-\varnothing=A$，$A-S=\varnothing$.

1.2.5 互不相容事件

定义 1.5 如果事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 为**互不相容事件**（**或互斥事件**）.

如果 A_1，A_2，…，A_n 中的任意两个事件是互不相容的，则称 A_1，A_2，…，A_n 是互不相容的.

A 与 B 互不相容如图 1-5 所示.

1.2.6 对立事件

定义 1.6 如果事件 A 与事件 B 必有一个发生且仅有一个发生，即 $A\cup B=S$，$AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互为**对立事件**（或称 **A 与 B 互逆**）. 记作 $A=\bar{A}$ 或 $B=\bar{A}$.

A 的对立事件 $\bar{A}$ 如图 1-6 中的阴影部分所示.

此外，显然有

$$\bar{\bar{A}}=A,A-B=A\bar{B}.$$

随机事件可以看成是样本空间 S 的子集，事件之间的关系和运算与集合论中集合之间的关系和运算是完全一致的，因而事件之间的关系和运算具有下列性质：

(1) 交换律 $\quad A\cup B=B\cup A,AB=BA$；

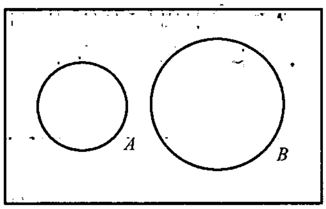

图 1-5

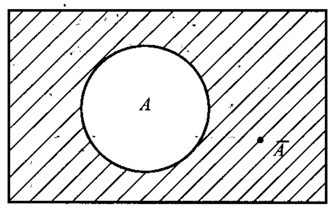

图 1-6

(2) 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A(BC)=(AB)C$;

(3) 分配律　$A(B\cup C)=AB\cup AC$, $A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$;

(4) 摩根法则　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

摩根法则在事件的运算中经常用到，它可以推广到更多的情况，即对于 n 个事件 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 有

$$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n};$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}.$$

【例 1-1】 从一批产品中每次取出一个产品进行检验（每次取出的产品不放回），事件 A_i 表示第 i 次取到合格品（$i=1, 2, 3$）. 试用事件的运算表示下列事件：

(1) 三次都取到了合格品；

(2) 三次中至少有一次取到了合格品；

(3) 三次中恰有两次取到了合格品；

(4) 三次中最多有一次取到了合格品.

解　(1)"三次都取到了合格品"$=A_1A_2A_3$;

(2)"三次中至少有一次取到了合格品"$=A_1\cup A_2\cup A_3$;

(3)"三次中恰有两次取到了合格品"$=A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$;

(4)"三次中最多有一次取到了合格品"$=\overline{A}_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_3\cup\overline{A}_2\overline{A}_3$.

1.3　事件的频率与概率

研究随机试验，不仅要知道它在一定条件下可能产生哪些结果，更重要的是要知道各种结果发生的可能性大小. 刻画随机事件发生可能性大小的量，则是下面要研究的事件的概率.

1.3.1　事件的频率

定义 1.7　设随机事件 A 在相同条件下的 n 次试验中发生了 m 次，则称比值 $\frac{m}{n}$ 为这 n 次试验中事件 A 发生的频率，记作 $f_n(A)=\frac{m}{n}$.

显然，任何随机事件的频率都是介于 0 与 1 之间的一个数，即 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$，且 $f_n(S)=1$，$f_n(\varnothing)=0$.

当事件 A 与 B 不相容时，$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

人们经过长期的实践发现，虽然一个随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生，但是在大量重复试验中这个事件发生的频率却具有稳定性. 例如，历史上有很多人做“上抛一枚均匀硬币”的随机试验，得到了许多数据，限于篇幅，下面列出三组数据：

试验者	试验次数 n	出现正面的次数 m	出现正面的频率 $f_n(A)$
蒲丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005

从这三组数据可以看出，当试验次数 n 较大时，频率 $f_n(A)$ 的值在 0.5 附近，并且随着 n 的增大，它逐渐稳定到 0.5 这个数值上. 因而，数值 0.5 的确反映了抛起一枚均匀硬币时出现正面这一事件发生的可能性的大小.

频率的这种稳定性就是对随机事件统计规律性的反映.

1.3.2 概率的统计定义

定义 1.8 在一个随机试验中，如果随着随机试验次数 n 的增大，事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 在某个常数 p 附近摆动并逐渐稳定于 p，则称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)=p$. 这个定义称为概率的统计定义.

由概率的统计定义和频率的性质，可得到概率的性质：

(1) 对于任意一个事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(S)=1$，$P(\varnothing)=0$；

(3) 若事件 A 与 B 互不相容，则有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. 这条性质称为**概率的可加性**.

1.3.3 概率的公理化定义

概率的统计定义显然适合一般情况，但是在进行理论研究时，不可能对每一个事件都通过做大量的试验来找出频率的稳定性，因此有必要采用抽象化的方法给出概率的一般定义.

定义 1.9 设 E 是一随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的任意一个事件 A，有一实数 $P(A)$ 与之对应，如果 $P(A)$ 满足下列三条公理：

公理 1 对于任意一个事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

公理 2 $P(S)=1$；

公理 3 当可列无限个事件 A_1，A_2，…两两互不相容时，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots.$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

公理 3 称为**可列可加性**或**完全可加性公理**.

下面将从这三条公理出发推导概率的一些重要性质.

1.3.4 概率的性质

性质 (1) $P(\varnothing)=0$

证 在公理 3 中，取 $A_i=\varnothing$，$i=1, 2, \cdots$. 于是，由可列可加性得

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\varnothing).$$

由公理 1 知道，实数 $P(\varnothing)\geqslant 0$，因此，要使上式成立，只能有 $P(\varnothing)=0$.

性质 (2)　（有限可加性）设 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

证　由公理 3 及性质（1）可得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \cdots) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + P(\varnothing) + \cdots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \end{aligned}$$

性质 (3)　对于任意一个事件 A，有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

证　因 A，$\bar{A}$ 互不相容，由性质（2）

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}).$$

又因 $A \cup \bar{A} = S$，故 $P(A \cup \bar{A}) = 1$，于是可得

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

性质 (4)　若 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$，且有

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

证　因 $A \subset B$，故

$$B = A + (B - A).$$

其中，A 与 $B-A$ 互斥（见图 1-7），由公理 3

$$P(B) = P(A) + P(B - A),$$

得

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

因为 $P(B - A) \geqslant 0$，所以由上式可得

$$P(A) \leqslant P(B).$$

推论　设 A、B 为任意两事件，则

$$P(A - B) = P(A) - P(AB).$$

性质 (5)　（一般概率加法公式）对于任意两个事件 A，B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

证　因 $A \cup B = A \cup (B - AB)$，$A$ 与 $(B-AB)$ 互斥（见图 1-8），由公理 3

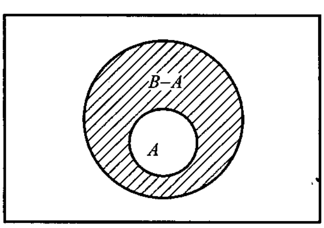

图 1-7

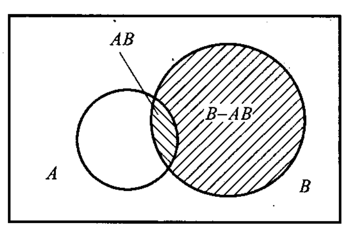

图 1-8

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB).$$

又因 $AB \subset B$，故由性质（4）

$$P(B - AB) = P(B) - P(AB).$$

从而得到

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质（5）可以推广到任意 n 个事件上.

当 $n=3$ 时，有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

一般地，设 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

上式可用数学归纳法证明.

1.4 古 典 概 率

为了研究事件发生的可能性，就需要用一个数字来描述这种可能性的大小. 人们就把刻画这种可能性大小的数值叫做事件的概率. 那么，对于一个给定的事件 A，其概率 $P(A)$ 如何求？本节先对一种最简单的情况加以讨论.

1.4.1 古典概率的定义

先看一个简单的例子. 投一枚均匀的硬币，考虑出现正面和出现反面这两个事件的概率.

由于硬币是均匀的，因而出现正面和出现反面的可能性是一样的. 故人们有理由认为出现正面和出现反面这两个事件的概率都是$\frac{1}{2}$.

这个例子具有下面两个特点：

(1) 样本空间包含的基本事件的个数是有限的；

(2) 每个基本事件发生的可能性是相等的.

具有上述两个特点的试验，称为古典概型的试验，是概率论初期研究的主要对象. 一般有下面的定义.

定义 1.10 设 E 是一随机试验，若它的样本空间 S 满足下面两个条件：

(1) 只有有限个基本事件；

(2) 每个基本事件发生的可能性是相等的.

则称 E 为**古典概型的试验**.

在古典概型的情况下，事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 所包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}.$$

显然，古典概率的定义满足概率公理化定义中的 3 条公理.

1.4.2 古典概率计算的例子

【例 1-2】 设电话号码由五个数码组成，每个数码可以是 0，1，2，…，9 中的任意一个. 设 $A_1=$ “5 个数码全相同”，$A_2=$ “5 个数码全不相同”，$A_3=$ “5 个数码中有两个 3”，

求这些事件的概率.

解 将每一个可能的电话号码作为基本事件，它们可认为是等可能性的. 由于数码是可重复的，故基本事件的总数为 10^5.

显然，A_1 中包含的基本事件的个数是 10，故

$$P(A_1)=\frac{10}{10^5}=\frac{1}{10^4}.$$

A_2 中包含的基本事件的个数是 $P_{10}^5=10\times9\times8\times7\times6$，故

$$P(A_2)=\frac{10\times9\times8\times7\times6}{10^5}=0.3024.$$

A_3 中包含的基本事件的个数是 $C_5^2 9^3$，这是因为数码 3 在电话号码中占两个位置的方法有 C_5^2 种，而其余 3 个数码中的每一个都可以从剩下的 9 个数码 0，1，2，4，…，9 中重复选取，有 9 种方法. 故

$$P(A_3)=\frac{C_5^2 9^3}{10^5}=0.0729.$$

【例 1-3】 10 件产品中有 3 件是次品，从中每次取一件不放回地取两次，求：

(1) 取得的两件中恰有一件是次品的概率；

(2) 取得的两件中至少有一件是次品的概率.

解 每次取一件不放回地取两次，可视为一次取两件，则基本事件的总数为 $C_{10}^2=45$. 设

$A=$“取得的两件中恰有一件是次品”，

$B=$“取得的两件中至少有一件是次品”.

(1) A 所含的基本事件的个数 $C_3^1C_7^1=21$，于是

$$P(A)=\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}.$$

(2) 解法 1：设 $C=$“取得的两件都是次品”，则 C 所含的基本事件数为 $C_3^2=3$，由于 $B=A\cup C$，且 $AC=\varnothing$，于是

$$P(B)=P(A\cup C)=P(A)+P(C)=\frac{7}{15}+\frac{3}{45}=\frac{8}{15}.$$

解法 2：因为 $\bar{B}=$“取得的两件都是正品”，故 $\bar{B}$ 所含的基本事件的个数 $C_7^2=21$，于是

$$P(\bar{B})=\frac{C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}.$$

故

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}.$$

【例 1-4】 由 10，11，…，99 中任取一个两位数，求这个数能被 2 或 3 整除的概率.

解 设 $A=$“被 2 整除”，$B=$“被 3 整除”，则

$A\cup B=$“被 2 或被 3 整除”，

$AB=$“同时被 2 和被 3 整除”.

由于 10 到 99 中的两位数有 90 个，其中能被 2 整除的有 45 个，能被 3 整除的有 30 个，而能被 6 整除的有 15 个. 故

$$P(A)=\frac{45}{90},\ P(B)=\frac{30}{90},\ P(AB)=\frac{15}{90}.$$

由一般概率加法公式得

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=\frac{45}{90}+\frac{30}{90}-\frac{15}{90}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

【例 1-5】 将 10 本书任意放在书架上，求其中指定的 3 本书靠在一起的概率.

解 将 10 本书的每一种排列看作基本事件，则基本事件的总数为 10!.

设 A 表示指定的 3 本书靠在一起的事件，如果将 3 本书看作一本书与剩下的 7 本书进行排列，则有 8! 种，而 3 本书靠在一起的排法有 3! 种，故 A 中包含的基本事件个数为 8! 3!. 所以

$$P(A)=\frac{8!3!}{10!}=\frac{1}{15}.$$

【例 1-6】 将 r 个人随机地分配到 n 个房间（$r\leqslant n$），设 $A_1=$"某指定的 r 个房间中各有一人"；$A_2=$"恰有 r 个房间中各有一人"；$A_3=$"某指定的房间中恰有 k 人"（$k\leqslant n$）.

求事件 A_1，A_2，A_3 的概率.

解 由于每一个人都可以分配到 n 个房间中的任一房间，所以将 r 个人分配到 n 个房间去共有 n^r 种分法，每种分法当作一个基本事件，那么基本事件的总数为 n^r.

(1) 将 r 个人分配到指定的 r 个房间，每个房间 1 个人，共有 $r!$ 种分法. 故

$$P(A_1)=\frac{r!}{n^r}.$$

(2) 由于 r 个房间可以是任意的，即可以从 n 个房间中任意选出 r 个来，这种选法共有 C_n^r 种，对于每种选定的 r 个房间，每一房间分配 1 个人的方法有 $r!$ 种，故 A_2 中包含的基本事件数为 $C_n^r r!$，因此

$$P(A_2)=\frac{C_n^r r!}{n^r}.$$

(3) 由于某指定房间中分配 k 个人的分法有 C_r^k 种，而其余 $r-k$ 个人任意分配到 $n-1$ 个房间的分法有 $(n-1)^{r-k}$种，所以 A_3 中包含的基本事件数为 $C_r^k(n-1)^{n-r}$，因此

$$P(A_3)=\frac{C_r^k(n-1)^{r-k}}{n^r}.$$

【例 1-7】 袋中有 a 个黑球，b 个白球，若随机地把球一个接一个地摸出来，求 $A=$"第 k 次摸出的球是黑球"的概率（$k\leqslant a+b$）.

解 把 a 个黑球和 b 个白球都看作是不同的（比如，设想它们都编了号），且把 $a+b$ 个球的每一种排列看作基本事件，于是，基本事件的总数为 $(a+b)!$.

由于第 k 次摸得黑球有 a 种可能，而另外 $a+b-1$ 次摸球的排列有 $(a+b-1)!$ 种可能. 所以 A 中包含的基本事件数为 $a(a+b-1)!$，因此

$$P(A)=\frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

值得注意的是，这个结果与 k 值无关. 这表明无论哪一次取得黑球的概率都是一样的，

或者说取得黑球的概率与先后次序无关. 这从理论上说明了平时人们采用的"抓阄"的办法是公平合理的.

1.5 几 何 概 率

概率的古典定义是在样本空间的基本事件只有有限个且等可能性的情况下给出的，对于基本事件为无穷多个的情况，古典概率的定义就不适用了. 考虑如何把古典概率定义进一步推广，使适用于无限多个基本事件而又有某种等可能性的场合，从而引出了几何概型的定义. 先看下面的例子：

【例 1-8】 在一个均匀的陀螺的圆周上均匀地刻上区间 $[0, 3)$ 上的诸数，旋转陀螺，求事件 A 表示"陀螺停下时其圆周上与桌面接触的刻度位于区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上"的概率.

解 由于陀螺及刻度的均匀性，它停下来时其圆周各点与桌面接触的可能性是相等的，即接触点的刻度位于在 $[0, 3)$ 内一个区间上可能性与这区间的长度成比例. 于是所求的概率可规定为

$$P(A)=\frac{\text{区间}\left[\frac{1}{2},2\right]\text{的长度}}{\text{区间}[0,3)\text{的长度}}=\frac{2-\frac{1}{2}}{3-0}=\frac{1}{2}.$$

【例 1-9】 设 400ml 自来水中有一个大肠杆菌，今从中随机地抽取 2ml 自来水，放到显微镜下观察，求事件 B 表示"发现大肠杆菌"的概率.

解 由于取水样的随机性，可以认为 400ml 水中各点被取是等可能性的. 因此，用水样的体积与水总体积之比作为所求的概率是合理的，即

$$P(B)=\frac{2}{400}=\frac{1}{200}.$$

[例 1-8] 和 [例 1-9]，是以等可能性为基础，借助于几何的度量（长度和体积）来规定事件概率的. 下面给出几何概率的定义.

定义 1.11 向一区域 S 中（如一维的区间，二维的平面区域，…）掷一质点 M，如果 M 必落在 S 内，且落在 S 内任何子区域 A 上的可能性只与 A 的度量（如长度，面积，…）成正比，而与 A 的位置及形状无关，则这个试验称为**几何概型的试验**；并定义 M 落在 A 中的概率为

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}.$$

式中：$L(S)$ 为样本空间 S 的度量；$L(A)$ 为子区域 A 的度量.

显然，几何概率的定义满足概率公理化定义中的 3 条公理.

【例 1-10】（约会问题）两个人约定于 $0\sim T$ 时间内在某地见面，先到者等候 $t(t\leqslant T)$ 时后离去，求两个人能会面的概率.

解 以 x，y 分别表示两个人到达的时刻，则 $0\leqslant x\leqslant T$，$0\leqslant y\leqslant T$，满足上两个不等式的点 (x, y) 构成边长为 T 的正方形 S（见图 1-9），两个人能会面的充要条件是

$$|x-y|\leqslant t.$$