GAODENG DAISHU KAOYAN SHITI JIEXI

# 高等代数考研试题解析

王尊全 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

# 高等代数考研试题解析

王尊全　编著

机 械 工 业 出 版 社

全书共分9章，介绍了多项式，行列式，线性方程组，矩阵，二次型，线性空间，线性变换，λ-矩阵，欧氏空间与双线性函数。每章包括两个部分，基本内容及考点综述，试题精选。前者介绍本章的基本概念，基本结论及基本方法。后者精选有代表性的全国各著名高校及研究所的硕士研究生入学考试试题，并做了详尽的解答与分析。

本书可作为学习高等代数的参考书，更是考研人员备考复习的参考资料，也可作为高校教师的教学参考书。

**图书在版编目（CIP）数据**

高等代数考研试题解析/王尊全编著．—北京：机械工业出版社，2008.6
ISBN 978-7-111-24392-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．王…　Ⅲ．高等代数-研究生-入学考试-解题　Ⅳ．015-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第094429号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：张继宏　版式设计：张世琴　责任校对：姚培新
封面设计：鞠　杨　责任印制：邓　博
北京京丰印刷厂印刷
2008年7月第1版·第1次印刷
169mm×239mm·14.5印张·279千字
标准书号：ISBN 978-7-111-24392-2
定价：26.00元

# 前　言

鉴于当前考研队伍越来越庞大，高等代数是数学类考生必考的一门课程，而这方面的参考书很少，于是笔者编写了这本高等代数考研复习的参考书，希望对广大考生复习备考有所帮助。

本书编写有以下特点：

1. 内容丰富、全面，本书系统地总结了高等代数这门课程的基本概念、基本结论及基本方法，给出了大量的试题，利于考生全面、系统地复习。

2. 试题广泛，我们选择了全国几十所高校及研究所考研的数百道有代表性的试题，给出了详细的解题思路及解答。

3. 每章的基本方法，是笔者解题心得的总结，具有一般性。我们不刻意追求试题解析的技巧性，我们认为试题解法的普遍性、一般性更为重要。

本书的试题大部分是我的学生及同事帮我收集的，本书的编写得到机械工业出版社张继宏编辑的鼓励和大力支持，在此一并表示感谢。

限于笔者水平，试题的解答可能不是最简单的，甚至可能出现差错，恳请专家和读者不吝赐教。

**编著者**

**2007 年 10 月于宜昌**

# 目　　录


前言

第 1 章　多项式 …… 1

　基本内容与考点综述 …… 1

　试题精选 …… 3

第 2 章　行列式 …… 16

　基本内容与考点综述 …… 16

　试题精选 …… 18

第 3 章　线性方程组 …… 36

　基本内容与考点综述 …… 36

　试题精选 …… 39

第 4 章　矩阵 …… 59

　基本内容与考点综述 …… 59

　试题精选 …… 61

第 5 章　二次型 …… 82

　基本内容与考点综述 …… 82

　试题精选 …… 84

第 6 章　线性空间 …… 104

　基本内容与考点综述 …… 104

　试题精选 …… 107

第 7 章　线性变换 …… 136

　基本内容与考点综述 …… 136

　试题精选 …… 140

第 8 章　λ—矩阵 …… 169

　基本内容与考点综述 …… 169

　试题精选 …… 173

第 9 章　欧氏空间与双线性函数 …… 188

　基本内容与考点综述 …… 188

　试题精选 …… 195

# 第1章

# 多 项 式

## 基本内容与考点综述

### 基本概念

1. 整除

数域 $P$ 上的多项式 $g(x)$ 称为整除 $g(x)$，如果有数域 $P$ 上的多项式 $h(x)$ 使等式

$$f(x)=g(x)h(x)$$

成立，$g(x)\mid f(x)$ 表示 $g(x)$ 整除 $f(x)$。

2. 最大公因式

$f(x)$，$g(x)\in P[x]$，$P[x]$ 中多项式 $d(x)$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，如果它满足以下两个条件：

(1) $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$；

(2) $f(x)$，$g(x)$ 的任意公因式全是 $d(x)$ 的因式。

3. 互素

$P[x]$ 中的两个多项式 $f(x)$，$g(x)$ 称为互素的，如果 $(f(x),g(x))=1$。

4. 数域 $P$ 上的不可约多项式

数域 $P$ 上次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $p(x)$ 称为数域 $P$ 上的不可约多项式，如果它不能表成数域 $P$ 上的两个次数比 $p(x)$ 低的多项式的乘积。

5. $k$ 重因式

不可约多项式 $p(x)$ 称为多项式 $f(x)$ 的 $k$ 重因式，如果 $p^k(x)$ 能整除 $f(x)$，而 $p^{k+1}(x)$ 不能整除 $f(x)$。

如果 $k=0$，那么 $p(x)$ 不是 $f(x)$ 的因式，如果 $k=1$，那么 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的单因式，如果 $k>1$，那么 $p(x)$ 称为 $f(x)$ 的重因式。

6. 本原多项式

如果一个非零的整系数多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的系数 $a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0$ 互素，则称$f(x)$是本原多项式。

## 基本结论

1. $\forall f(x)$，$g(x)\in P[x]$且$g(x)\neq 0$，一定有$q(x)$，$r(x)\in P[x]$使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

成立，其中$\partial(r(x))<\partial(g(x))$或者$r(x)=0$，并且这样的$q(x)$，$r(x)$是唯一决定的。

2. 如果$f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，那么$f(x)=cg(x)$,其中$c$为非零常数。

3. 如果$f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，那么$f(x)\mid h(x)$。

4. 如果$f(x)\mid g_i(x),i=1,2,\cdots,r$，那么$f(x)\left|\sum\limits_{i=1}^{r}u_i(x)g_i(x)\right.$，其中$u_i(x)$是数域$P$上的任意多项式。

5. $\forall f(x)$，$g(x)\in P[x]$，在$P[x]$中存在一个最大公因式$d(x)$且有$u(x)$，$v(x)\in P[x]$使得

$$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$$

6. $P[x]$中多项式$f(x)$，$g(x)$互素的充分必要条件是有$P[x]$中的多项式$u(x)$，$v(x)$使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

7. 如果$(f(x),g(x))=1$且$f(x)\mid g(x)h(x)$，那么$f(x)\mid h(x)$。

8. 如果$f_1(x)\mid g(x)$，$f_2(x)\mid g(x)$且$(f_1(x),f_2(x))=1$，那么$f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$。

9. $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式，$\dfrac{r}{s}$是$f(x)$的一个有理根，其中$r$，$s$互素，那么必有$s\mid a_n$，$r\mid a_0$，特别地，如果$a_n=1$，那么$f(x)$的有理根都是整数根。

10. 如果$p(x)$是不可约多项式，那么对于任意的两个多项式$f(x)$，$g(x)$，由$p(x)\mid f(x)g(x)$一定推出$p(x)\mid f(x)$或者$p(x)\mid g(x)$。

11. (因式分解及唯一性定理)数域$P$上每一个次数$\geqslant 1$的多项式$f(x)$都可以唯一地分解成数域$P$上一些不可约多项式的乘积。

12. 如果不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的$k$重因式($k\geqslant 1$)，那么它是微商$f'(x)$的$k-1$重因式。

13. 多项式$f(x)$没有重因式的充分必要条件是$f(x)$与$f'(x)$互素。

14. 在复数域上所有次数大于 1 的多项式都是可约的。

15. 在实数域上不可约多项式只能是 1 次多项式或判别式小于零的 2 次多项式。

16. 在有理数域上存在任意次的不可约多项式。

17. 如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积。

18.（Eisenstein 判别法）设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是整系数多项式，如果有一个素数 $p$，使

（1）$p$ 不能整除 $a_n$；

（2）$p\mid a_i$，$i=0,1,\cdots,n-1$；

（3）$p^2$ 不能整除 $a_0$。

那么 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

## 基本方法

关于最大公因式的证明，一般有以下几种方法：

（1）利用定义；

（2）证明等式两边能互相整除；

（3）如果 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，且 $g(x)\neq 0$，那么

$$(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$$

（4）如果 $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$，且有 $u(x)$，$v(x)\in P[x]$ 使

$$d(x)=f(x)u(x)+g(x)v(x)$$

则 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最大公因式。

## 试题精选

**例 1.**（上海交通大学，2004）假设 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为次数不超过 3 的首项系数为 1 的互异多项式，假设 $x^4+x^2+1$ 整除 $f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)$，试求 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的最大公因式。

**解** 由于

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

这里假设它的 4 个根分别为 $\omega_1$，$\omega_2$，$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$ 且

$$\omega_1=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\ \omega_2=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\ \varepsilon_1=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\ \varepsilon_2=\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$$

令$f_1(x^3)+x^4f_2(x^3)=(x^4+x^2+1)g(x)$，于是有方程组

$$\begin{cases}f_1(1)+\omega_1 f_2(1)=0\\ f_1(1)+\omega_2 f_2(1)=0\end{cases} \text{与} \begin{cases}f_1(-1)-\varepsilon_1 f_2(-1)=0\\ f_1(-1)-\varepsilon_2 f_2(-1)=0\end{cases}$$

解方程组得，

$$f_1(1)=f_2(1)=0,\ f_1(-1)=f_2(-1)=0。$$

于是有，

$$(x+1)(x-1)\mid f_1(x),\quad (x+1)(x-1)\mid f_2(x)$$

而$f_1(x)$，$f_2(x)$是互异的次数不超过3的首系数为1的多项式，所以$(f_1(x),f_2(x))=x^2-1$。

**例2.**（兰州大学，2002）设$f(x)$是整系数多项式，若$g(x)=f(x)+1$至少有三个互不相等的整数根，证明$f(x)$没有整数根。

**证明** 假定$f(x)$有整数根$m$，则

$$f(x)=(x-m)h(x)$$

由$x-m$是本原多项式，所以$h(x)$是整系数多项式，令$n_1$，$n_2$，$n_3$是$g(x)$的3个互不相等的整数根，则

$$g(x)=(x-n_1)(x-n_2)(x-n_3)p(x)$$

其中$p(x)$是整系数多项式，进而

$$g(m)=f(m)+1=1=(m-n_1)(m-n_2)(m-n_3)p(m)$$

于是$m-n_1$，$m-n_2$，$m-n_3$，$p(m)$只能是1或$-1$，那么，$m-n_1$，$m-n_2$，$m-n_3$中至少有两个同为1或同为$-1$，与$n_1$，$n_2$，$n_3$互不相等矛盾，所以$f(x)$没有整数根。

**例3.**（兰州大学，2004）设$f(x)$和$g(x)$是数域$F$上的两个不完全为零的多项式，令

$$I=\{u(x)f(x)+v(x)g(x)\mid u(x),\ v(x)\in F[x]\}$$

证明：(1) $I$关于多项式的加法和乘法封闭，并且对任意的$h(x)\in I$和任意的$k(x)\in F[x]$，有$h(x)k(x)\in I$。

(2) $I$中存在次数最小的首项系数为1的多项式$d(x)$，并且$d(x)=(f(x),g(x))$。

**证明** (1) 容易证明，略。

(2) 考虑

$$I_0=\{\partial(u(x)f(x)+v(x)g(x))\mid u(x),\ v(x)\in F[x]\text{且}\ u(x)f(x)+v(x)g(x)\neq 0\}$$

则$I_0$是非负整数的一个子集，由最小数原理，$I_0$中存在最小数，也就是说，$I$中存在次数最小的首项系数为1的多项式

$$d(x)=u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)$$

令 $h(x)$ 是 $I$ 中任意多项式，且设 $h(x)=d(x)q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或者 $\partial(r(x))<\partial(d(x))$。

若 $\partial(r(x))<\partial(d(x))$，则 $r(x)=h(x)-d(x)q(x)$。由(1)可知 $r(x)\in I$，出现矛盾。于是 $r(x)=0$，所以 $d(x)\mid h(x)$，显然 $f(x),g(x)\in I$，那么 $d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$。

如果 $p(x)\mid f(x)$，$p(x)\mid g(x)$，则

$$p(x)\mid u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)$$

即 $p(x)\mid d(x)$，所以 $d(x)=(f(x),\ g(x))$。

**例4.**（苏州大学，2005）设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，证明：如果存在一个偶数 $m$ 和一个奇数 $n$ 使得 $f(m)$ 和 $f(n)$ 都是奇数，则 $f(x)$ 没有整数根。

**证明** 假定 $f(x)$ 有整数根 $k$，则 $f(x)=(x-k)g(x)$，由 $x-k$ 是本原多项式，那么 $g(x)$ 是整系数多项式，由于

$$f(m)=(m-k)g(m),\ f(n)=(n-k)g(n),\ f(m)$$

且 $f(m)$，$f(n)$ 都是奇数，那么 $m-k$，$n-k$ 都是奇数，与 $m$ 是偶数且 $n$ 是奇数矛盾，所以 $f(x)$ 没有整数根。

**注** 第2题、第4题都是证明的一个否定的结果，一般情况下，用反证法证明。

**例5.**（上海大学，2005）设 $f(x)=x^{n+1}+x^n-2\quad(n\geqslant 1)$，求 $f(x)$ 在有理数域上的不可约因式并说明理由。

**解**

$$\begin{aligned}f(x)&=x^{n+1}+x^n-2=(x^{n+1}-1)+(x^n-1)\\&=(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+1)+(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)\\&=(x-1)(x^n+2x^{n-1}+2x^{n-2}+\cdots+2x+2)\\&=(x-1)g(x)\end{aligned}$$

对 $g(x)$，令 $p=2$，用 Eisenstein 判别法容易证明 $g(x)$ 在有理数域上不可约，因此 $f(x)$ 在有理数域上的不可约因式为 $x-1$ 及 $x^n+2x^{n-1}+\cdots+2x+2$。

**例6.**（上海大学，2005）设

$$x^n-1\mid(x-1)[f_1(x^n)+xf_2(x^n)+x^2f_3(x^n)+\cdots+x^{n-2}f_{n-1}(x^n)]\quad(n\geqslant 2)$$

求证：$x-1\mid f_i(x)\quad(i=1,2,\cdots,n-1)$。

**证明** 容易知道

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1 \mid f_1(x^n)+xf_2(x^n)+x^2f_3(x^n)+\cdots+x^{n-2}f_{n-1}(x^n)$$

这里令 $\varepsilon$ 是 $n$ 次本原单位根，那么

$$\begin{cases} f_1(1)+\varepsilon f_2(1)+\varepsilon^2 f_3(1)+\cdots\varepsilon^{n-2}f_{n-1}(1)=0 \\ f_1(1)+\varepsilon^2 f_2(1)+(\varepsilon^2)^2 f_3(1)+\cdots+(\varepsilon^2)^{n-2}f_{n-1}(1)=0 \\ \vdots \\ f_1(1)+\varepsilon^{n-1}f_2(1)+(\varepsilon^{n-1})^2 f_3(1)+\cdots+(\varepsilon^{n-1})^{n-2}f_{n-1}(1)=0 \end{cases}$$

以上关于 $f_1(1), f_2(1), \cdots, f_{n-1}(1)$ 的齐次线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-2} \\ 1 & \varepsilon^2 & (\varepsilon^2)^2 & \cdots & (\varepsilon^2)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & (\varepsilon^{n-1})^2 & \cdots & (\varepsilon^{n-1})^{n-2} \end{vmatrix} \neq 0$$

齐次线性方程组只有零解，于是 $f_1(1)=f_2(1)=\cdots=f_{n-1}(1)=0$，所以 $x-1 \mid f_i(x)$，$i=1,2,\cdots,n-1$。

**例 7.**（大连理工大学，2002）设 $p[x]$ 为数域 $p$ 上的多项式环，$f_1(x)$，$f_2(x) \in p[x]$，且 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 互素。证明：对于任意 $g_1(x)$，$g_2(x) \in p[x]$，存在 $g(x) \in p[x]$ 使得 $f_i(x) \mid g(x)-g_i(x)$，$i=1$，2。

**证明** 由 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 互素，那么存在 $u_1(x)$，$u_2(x) \in p[x]$，使

$$f_1(x)u_1(x)+f_2(x)u_2(x)=1$$

于是

$$f_1(x)u_1(x)g_1(x)+f_2(x)u_2(x)g_1(x)=g_1(x)$$
$$f_1(x)u_1(x)g_2(x)+f_2(x)u_2(x)g_2(x)=g_2(x)$$

令

$$g(x)=g_1(x)+g_2(x)-f_1(x)u_1(x)g_1(x)-f_2(x)u_2(x)g_2(x)$$

于是

$$\begin{aligned} g(x)-g_1(x) &= f_1(x)u_1(x)g_2(x)+f_2(x)u_2(x)g_2(x)- \\ &\quad f_1(x)u_1(x)g_1(x)-f_2(x)u_2(x)g_2(x) \\ &= f_1(x)(u_1(x)g_2(x)-u_1(x)g_1(x)) \end{aligned}$$

所以 $f_1(x) \mid g(x)-g_1(x)$，同理 $f_2(x) \mid g-g_2(x)$。

**例 8.**（大连理工大学，2000）设 $p(x)$ 是次数大于零的多项式，如果对于任何多项式 $f(x)$，$g(x)$，由 $p(x) \mid f(x)g(x)$。可以推出 $p(x) \mid f(x)$ 或者 $p(x) \mid g(x)$，试证 $p(x)$ 是不可约多项式。

**证明** 假定 $p(x)$ 可约，令

$$p(x)=p_1(x)p_2(x)$$

且

$$\partial(p_1(x))<\partial(p(x))$$
$$\partial(p_2(x))<\partial(p(x))$$
$$p(x)\mid p_1(x)p_2(x)$$

而 $p(x)$ 不能整除 $p_1(x)$, $p(x)$ 不能整除 $p_2(x)$，矛盾，所以 $p(x)$ 是不可约多项式。

**例 9**. （大连理工大学，2004）设 $\mathbb{R}$，$\mathbb{Q}$ 分别表示实数域和有理数域，$f(x)$，$g(x)$ 属于 $\mathbb{Q}[x]$。证明：

(1) 若在 $\mathbb{R}[x]$ 中有 $g(x)\mid f(x)$，则在 $\mathbb{Q}[x]$ 中也有 $g(x)\mid f(x)$。

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中互素，当且仅当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $R[x]$ 中互素。

(3) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约多项式，则 $f(x)$ 的根都是单根。

**证明** (1)假定在 $\mathbb{Q}[x]$ 中 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$，那么

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),\ q(x),\ r(x)\in\mathbb{Q}[x]$$

且

$$\partial(r(x))<\partial(g(x))$$

以上等式在 $\mathbb{R}[x]$ 中也成立，所以在 $\mathbb{R}[x]$ 中 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$，矛盾。因此，结论成立。

(2) 如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中互素，那么存在 $u(x)$，$v(x)\in\mathbb{Q}[x]$，使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

以上等式在 $\mathbb{R}[x]$ 中也成立，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 中互素。如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不互素，那么存在

$$d(x)\in\mathbb{Q}[x],\ \partial(d(x))\geqslant 1,\ f(x)=d(x)f_1(x)$$
$$g(x)=d(x)g_1(x),\ f_1(x),\ g_1(x)\in\mathbb{Q}[x]$$

以上两个等式在 $\mathbb{R}[x]$ 中成立，因此，$f(x)$，$g(x)$ 在 $\mathbb{R}[x]$ 中不互素。

(3) $f(x)$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 中的不可约多项式，则 $(f(x),\ f'(x))=1$，否则 $(f(x),\ f'(x))=d(x)\neq 1$，则 $f(x)$ 有重因式，与 $f(x)$ 不可约矛盾。于是 $f(x)$ 没有重因式，所以 $f(x)$ 的根都是单根。

**例 10**. （南京大学，2002）证明多项式 $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^p}{p!}$ 在有理数域上不可约，其中 $p$ 为一素数。

**证明** 由式

$$p!\,f(x)=p!+p!\,x+3\cdots(p-1)px^2+4\cdots(p-1)px^3+\cdots+px^{p-1}+x^p$$

可知存在素数 $p$ 使得：

(i) $p$ 不能整除 1，

(ii) $p\mid p,\cdots,3\cdots(p-1)p,p!,p!$,

(iii) $p^2$ 不能整除 $p!$，

由 Eisenstein 判别法，$p!\ f(x)$ 在有理数域上不可约，于是 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

**例 11.**（四川大学，2001）$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是不同的整数，证明

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1$$

在有理数域上不可约或是某一有理系数多项式的平方。

**证明** 如果 $f(x)$ 在有理数域上不可约，则结论成立。如果 $f(x)$ 在有理数域上可约，则 $f(x)$ 可以写成两个次数比它低的整系数多项式的乘积。

令

$$f(x)=f_1(x)f_2(x),\ \partial(f_1(x))<n,\ \partial(f_2(x))<n$$

由 $f(a_i)=1$，$i=1,\cdots,n$，则

$$f_1(a_i)f_2(a_i)=1$$

又 $f_1(a_i)$，$f_2(a_i)\in\mathbb{Z}$，于是

$$f_1(a_i)=f_2(a_i),\ i=1,\cdots,n$$

那么，

$$f_1(x)=f_2(x)$$

所以

$$f(x)=f_1^2(x)$$

**例 12.**（广西师范大学，1996）$f_1(x)$，$f_2(x)$ 是数域 $F$ 上两个互素的多项式，$r_1(x)$，$r_2(x)$ 是 $F[x]$ 中任意两个多项式，且 $r_1(x)$，$r_2(x)$ 的次数分别小于 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 的次数，证明存在多项式 $g(x)\in F[x]$，它被 $f_1(x)$ 除余式为 $r_1(x)$，被 $f_2(x)$ 除余式为 $r_2(x)$。

**证明** 因为

$$(f_1(x),\ f_2(x))=1$$

那么存在 $u_1(x)$，$u_2(x)\in F[x]$，使

$$f_1(x)u_1(x)+f_2(x)u_2(x)=1$$

于是

$$f_1(x)u_1(x)[r_2(x)-r_1(x)]+f_2(x)u_2(x)[r_2(x)-r_1(x)]=r_2(x)-r_1(x)$$

令

$$u_1(x)[r_2(x)-r_1(x)]=q_1(x),u_2(x)[r_1(x)-r_2(x)]=q_2(x)$$

则

$$f_1(x)q_1(x)+r_1(x)=f_2(x)q_2(x)+r_2(x)$$

令 $g(x)=f_1(x)q_1(x)+r_1(x)$，那么结论成立。

**例 13.**（广西师范大学，1997）$f(x)$，$p(x)\in\mathbb{Q}[x]$，$p(x)$在$\mathbb{Q}$上不可约，且 $f(x)$与$p(x)$有一个公共复根，证明$p(x)\mid f(x)$。

**证明** $p(x)$不可约，那么$(p(x),f(x))=1$或者$p(x)\mid f(x)$，假定$(p(x),f(x))=1$，那么存在$u(x)$，$v(x)\in\mathbb{Q}[x]$，使得

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$$

令$\alpha$是$f(x)$与$g(x)$的公共复根，则$f(\alpha)u(\alpha)+g(\alpha)v(\alpha)=1$矛盾，于是$p(x)\mid f(x)$。

**例 14.**（四川大学，1998）$f(x)\in P[x]$，$f(x)=f(-x)$，如果$x-a\mid f(x)$，证明$x^2-a^2\mid f(x)$。

**证明** 假设$f(x)=(x-a)q(x)$，$q(x)\in P[x]$,则

$$f(x)=f(-x)=(-x-a)q(-x)=(x+a)r(x)$$

当$a=0$时，$x\mid f(x)$，$f(x)$的常数项为0，又$f(x)=f(-x)$，则$f(x)$奇次项系数为0，于是$x^2\mid f(x)$，当$a\neq0$时，$(x+a,\ x-a)=1$，于是$x^2-a^2\mid f(x)$。

**例 15.**（北京大学，1997）设$f(x)$是有理数域$\mathbb{Q}$上的一个$m$次多项式($m\geq 0$)，$n$是大于$m$的正整数，证明：$\sqrt[n]{2}$不是$f(x)$的实根。

**证明** 假定$\sqrt[n]{2}$是$f(x)$的实根，而$\sqrt[n]{2}$是有理数域上的不可约多项式$x^n-2$的一个根，那么$(x^n-2,f(x))=1$，或者$x^n-2\mid f(x)$。

如果$(x^n-2,\ f(x))=1$，那么存在$u(x)$，$v(x)\in\mathbb{Q}[x]$，使

$$(x^n-2)u(x)+f(x)v(x)=1$$

于是

$$[(\sqrt[n]{2})^n-2]u(\sqrt[n]{2})+f(\sqrt[n]{2})v(\sqrt[n]{2})=1$$

矛盾,所以$x^n-2\mid f(x)$，而$n>m$矛盾,故$\sqrt[n]{2}$不是$f(x)$的根。

**例 16.**（华南理工大学，2000）$p(x)$是数域$F$上的不可约多项式，若

$$p(x)\mid f(x)+g(x)，且\ p(x)\mid f(x)g(x)$$

则$p(x)\mid f(x)$且$p(x)\mid g(x)$，其中$f(x),g(x)\in F[x]$。

**证明** $p(x)$是数域$F$上的不可约多项式，$p(x)\mid f(x)g(x)$，则$p(x)\mid f(x)$，或$p(x)\mid g(x)$

假定$p(x)\mid f(x)$且$p(x)\mid g(x)$不成立，那么$p(x)\mid f(x)$且$p(x)$不能整除$g(x)$，

或者 $p(x)$ 不能整除 $f(x)$ 且 $p(x)\mid g(x)$。

对第一种情况，$p(x)$ 不能整除 $f(x)+g(x)$，矛盾。

对第二种情况，同样可以推出矛盾，于是结论成立。

**例 17.**（南京师范大学，1998）求以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 为根的有理系数不可约多项式 $f(x)$。

**解** 容易知

$$[(x-\sqrt{2})-\sqrt{3}][(x-\sqrt{2})+\sqrt{3}]=x^2-2\sqrt{2}x-1$$

$$[(x^2-1)-2\sqrt{2}x][(x^2-1)+2\sqrt{2}x]=x^4-10x^2+1=f(x)$$

由于 $f(\pm 1)\neq 0$，于是 $f(x)$ 不能表成一个一次与一个三次的有理系数多项式之积。

如果 $f(x)$ 能表成两个次数都为 2 的有理数多项式之积，$f(x)=f_1(x)f_2(x)$。此式当然也可以看成是实数域上的分解。由 $f(x)$ 在实数域上分解的唯一性，

$$f_1(x)=x^2-2\sqrt{2}x-1,\ f_2(x)=x^2+2\sqrt{2}x-1$$

矛盾，所以 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

**例 18.**（南京大学，1997）$F$ 是任意一数域，$f(x)$ 是 $F$ 上的一元多项式，首项系数为 $a$，次数为 $n$，证明 $f'(x)\mid f(x)$ 当且仅当存在 $b\in F$，使 $f(x)=a(x-b)^n$。

**证明** 如果 $f(x)=a(x-b)^n$。显然 $f'(x)\mid f(x)$，反之，令

$$f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}\cdots p_t^{k_t}(x),\quad k_1+k_2+\cdots+k_t=n$$

那么

$$f'(x)=cp_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2-1}(x)\cdots p_t^{k_t-1}(x)g(x)$$

其中 $p_i(x)$ 不能整除 $g(x)$，$i=1,\cdots,t$，$\partial(f'(x))=n-1$。由 $f'(x)\mid f(x)$，于是

$$(f(x),\ f'(x))=df'(x)$$

其中 $d$ 是 $f'(x)$ 首项系数的倒数，而

$$h(x)=\frac{f(x)}{(f(x),\ f'(x))}=ap_1(x)p_2(x)\cdots p_t(x)=\frac{f(x)}{df'(x)}$$

是一次多项式，令 $h(x)=a(x-b)$，于是 $t=1$，$p_1(x)=x-b$。所以

$$f(x)=a(x-b)^n。$$

**例 19.**（北京大学，2002）设 $f_n(x)=x^{n+2}-(x+1)^{2n+1}$，证明：对任意的非负整数 $n$，$(x^2+x+1,\ f_n(x))=1$。

**证明** $x^2+x+1$ 是有理数域上的不可约多项式，于是 $x^2+x+1\mid f_n(x)$ 或者

$(x^2+x+1, f_n(x))=1$，假定 $x^2+x+1 \mid f_n(x)$，令 $\varepsilon$ 是三次本原单位根，则 $\varepsilon^3=1$，$\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$，且 $f_n(\varepsilon)=0$。

$$\begin{aligned}f_n(\varepsilon)&=\varepsilon^{n+2}-(\varepsilon+1)^{2n+1}=\varepsilon^{n+2}-(-\varepsilon^2)^{2n+1}=\varepsilon^{n+2}+\varepsilon^{4n+2}\\&=\varepsilon^{n+2}(1+\varepsilon^{3n})=2\varepsilon^{n+2}\neq 0\end{aligned}$$

矛盾，于是 $(x^2+x+1, f(x))=1$。

**例 20.**（上海交通大学，2002）$f_1(x)=af(x)+bg(x)$，$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，证明 $(f(x), g(x))=(f_1(x), g_1(x))$。

**证明 1**

$$\begin{aligned}(f_1(x), g_1(x))&=(af(x)+bg(x), cf(x)+dg(x))\\&=\left(\frac{bc-ad}{c}g(x), cf(x)+dg(x)\right)\\&=(g(x), cf(x)+dg(x))\\&=(g(x), cf(x))\\&=(g(x), f(x))\end{aligned}$$

**证明 2** 令 $d_1(x)=(f_1(x), g_1(x))$，$d(x)=(f(x), g(x))$。由

$$f_1(x)=af(x)+bg(x) \tag{1}$$

$$g_1(x)=cf(x)+dg(x) \tag{2}$$

于是 $d(x)\mid f_1(x)$，$d(x)\mid g_1(x)$，那么 $d(x)\mid d_1(x)$。

由式(1)与式(2)可以看成是关于 $f(x)$，$g(x)$ 的线性方程组，解得，

$$g(x)=\frac{1}{ad-bc}(ag_1(x)-cf_1(x))$$

$$f(x)=\frac{1}{ad-bc}(df_1(x)-bg_1(x))$$

于是 $d_1(x)\mid f(x)$，$d_1(x)\mid g(x)$，那么 $d_1(x)\mid d(x)$。显然 $d(x)\mid d_1(x)$，于是

$$(f(x), g(x))=(f_1(x), g_1(x))。$$

**例 21.**（华东师范大学，1992）$f(x)\in P[x]$，对任意 $a$，$b\in P$，$f(a+b)=f(a)+f(b)$，证明，$f(x)=kx$，$k\in P$。

**证明** $$f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$$

于是 $f(0)=0$。$f(x)$ 的常数项为零，令 $f(x)=xg(x)$

$\forall a\in p$，

$$\begin{aligned}f(2a)&=2ag(2a)\\&=f(a)+f(a)\\&=2f(a)=2ag(a)\end{aligned}$$

于是

$$g(a)=g(2a)。$$

那么

$$g(a)=g(2a)=g(4a)=\cdots,$$

令 $g(a)=k$,则 $g(x)-k=0$ 有无穷多解，于是 $g(x)-k$ 是零多项式，即 $g(x)=k$，所以 $f(x)=kx$。

**例 22.**（华东师范大学，1993）设 $m$，$n$ 是两个正整数，

$$f(x)=x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1,g(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$$

证明:$(f(x),\ g(x))=1$ 当且仅当 $(m,\ n)=1$。

**证明** 只要证明

$$(x^m-1,\ x^n-1)=x-1\Leftrightarrow(m,\ n)=1$$

这里我们证明更一般的结论。

$$(x^m-1,x^n-1)=x^{(m,n)}-1\quad（不妨假定\ m\geqslant n）$$

令 $(m,\ n)=d$，由整数的带余除法，有

$$m=q_1n+r_1,\ 0\leqslant r_1<n$$
$$n=q_2r_1+r_2,\ 0\leqslant r_2<r_1$$

其中

$$r_1=q_3r_2+r_3,且\ 0\leqslant r_3<r_2,\cdots,r_{k-1}=q_{k+1}r_k,$$

则有 $d=(m,\ n)=r_k$，进而

$$\begin{aligned}(x^m-1,\ x^n-1)&=((x^{nq_1}-1)x^{r_1}+x^{r_1}-1,\ x^n-1)\\&=((x^n-1)g(x)+x^{r_1}-1,\ x^n-1)\\&=(x^n-1,\ x^{r_1}-1)\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\begin{aligned}(x^n-1,\ x^{r_1}-1)&=(x^{r_1}-1,\ x^{r_2}-1)\\&\vdots\\&=(x^{r_{k-1}}-1,\ x^{r_k}-1)\\&=x^d-1\\&=x^{(m,\ n)}-1\end{aligned}$$

**例 23.**（华东师范大学，1994）设 $f(x)$，$g(x)\in\mathbb{Q}[x]$，$f(x)$ 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的不可约多项式，$\alpha$ 是复数，使 $f(\alpha)=0$，$g(\alpha)\neq0$。证明存在多项式 $h(x)\in\mathbb{Q}[x]$ 使 $h(\alpha)=\dfrac{1}{g(\alpha)}$。

**证明** $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约，那么 $(f(x),\ g(x))=1$ 或者 $f(x)\mid g(x)$。若后者