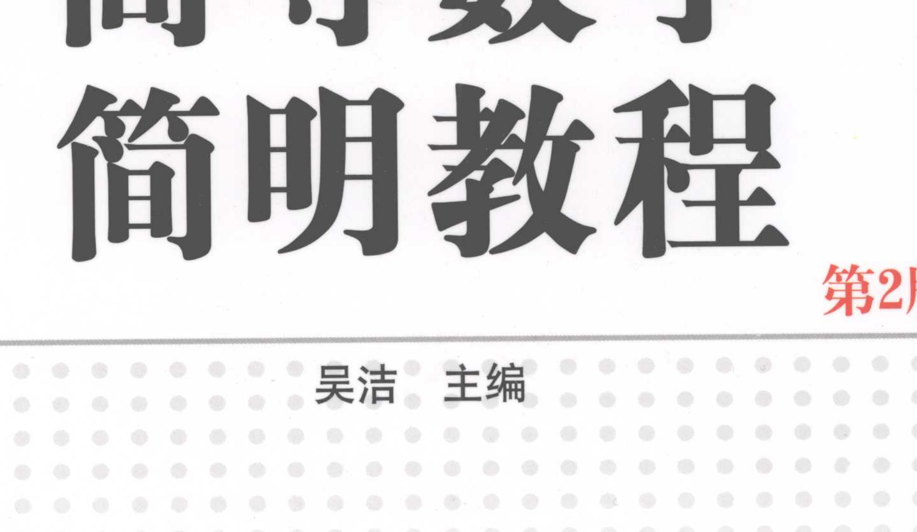
高职高专规划教材

高等数学简明教程

第2版

吴洁　主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高职高专规划教材

高等数学简明教程

第 2 版

主编　吴洁

参编　张雅琴　任晓华　胡农

机 械 工 业 出 版 社

全书共9章，包括一元函数微积分、多元函数微积分、向量代数与空间解析几何、无穷级数和常微分方程等内容，并编入部分数学文化与背景知识，以增加学生对数学历史、思想和方法的了解，激发学习兴趣，培养综合素质。

本书教学内容起点较低，范围和深度有一定弹性，语言叙述通俗、简练，例题示范量较大，每章有方法、技巧提示和在线学习作业，推荐相关数学网站，书后附有习题答案、常用数学公式等。

本书可作为高职高专院校、本科院校举办的职业技术学院工科类专业学生的高等数学教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学简明教程/吴洁主编．—2版．—北京：机械工业出版社，2008.2

高职高专规划教材

ISBN 978-7-111-12711-6

Ⅰ．高…　Ⅱ．吴…　Ⅲ．高等数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ．013

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第195573号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：李大国　责任校对：李秋荣
封面设计：马精明　责任印制：杨　曦
北京机工印刷厂印刷（兴文装订厂装订）
2008年2月第2版第1次印刷
169mm×239mm・14.25印张・551千字
0 001—4 000册
标准书号：ISBN 978-7-111-12711-6
定价：35.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
销售服务热线电话（010）68326294
购书热线电话：(010) 88379639　88379641　88379643
编辑热线电话：(010) 68354423
封面无防伪标均为盗版

第 2 版　前言

《高等数学简明教程》出版已经三年多了，几年的教学实践说明，本书充分体现了高等职业教育的特点，满足了专业学习的基本要求，符合必需、够用的原则，激发了学生的学习兴趣，提高了课程的教学质量。

本次修订是在原教材的基础上，结合了这几年的使用情况，对原有教材的一些章节进行了必要调整与完善，使之能够更好地适应教学的需要，以适应我国高等职业教育中数学教学改革与发展的要求。

此次修订主要变动内容如下：

将原来的多元函数微分法和重积分两章合并为一章，同时删除了曲线积分和曲面积分的内容；对一些内容进行了删减（如三重积分等）；为便于学生理解并掌握学习的重点和难点，增加了 100 余道例题、100 余道习题、80 余个图形，并将每章复习题分为 A、B 两组，其中 A 组题是基础性的，B 组题有一定的难度，以满足不同水平学生的要求；每章的提示与提高部分进行了重新编写，更易于学生自学和能力提升；全书习题参考答案也一并编入书后附录中。

本书再版后，保持并强化了原教材的特色，更加贴近我国高等职业教育现状，更加适合学生学习实际，更加有利于教师教学和学生自主学习，从而促进教学质量的提高。

本书由吴洁主编，张雅琴、任晓华和胡农参加了本书的编写工作。

在本次教材再版中，同行和学生提出了不少宝贵的意见，学院领导也予以了大力的支持，在此一并表示感谢。

编　者

第1版 前言

高等数学（微积分）的思想和方法广泛应用于科学技术、社会经济等领域，是高等职业院校数学教学的主要内容.

在本书的编写中，我们既遵循传统和教学规律，又有所改进和创新，下面就编写思路和意图说明如下：

1. 在保留高等数学基本框架和必要内容的基础上，简化了语言叙述，删除了绝大部分定理证明，加大了例题示范，增加了数学的应用思想和提示，以体现职业教育特色，适应学生知识层次，满足专业教学要求.

2. 将基础部分（基本理论和方法）与提高部分分开编排，增加了方法、技巧和应用提示，目的是希望给教师和学生多一种选择. 有能力的学生可自学提高部分内容，教师也可根据学生实际情况和学时多少有选择地讲授.

3. 适当编入数学文化和其他相关知识，并在每章课外学习中布置在线学习作业，这样做：一、可加深学生对数学思想和方法的理解；二、希望激发学生的学习兴趣、培养学习能力，进而提高数学水平和素质. 当然教师也要转变方法，强化学习指导，顺应数学教学改革的趋势.

参加本书编写的是天津中德职业技术学院的吴洁、张雅琴、任晓华和胡农老师.

在本书的编写过程中，我们参照了国内外众多院校教师和数学工作者编写的教材和书籍，上网浏览了优秀的数学网站，摘编、引用了部分数学同行的文章、演讲或访谈. 本书在学院李大卫院长、徐琤颖副院长、李全义部长、王山平老师鼎力支持下，得以顺利出版，在此我们一并表示谢意.

由于编者水平有限，书中错误或不当之处在所难免，敬请读者与同行指正.

天津中德职业技术学院

《高等数学简明教程》编写组

目　　录

第1章　函数与极限

预备知识

区间

区间是高等数学中常用的实数集,包括四种**有限区间**和五种**无穷区间**.

有限区间　设 a,b 为二实数,且 $a<b$,则满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合称为一个闭区间,记作

$$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$$

类似地有开区间和半开区间

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}$$
$$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$$
$$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$$

无穷区间　满足不等式 $-\infty<x<+\infty$ 的所有实数 x 的集合称为无穷区间,记作

$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$$

类似地有半无穷区间

$$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}$$
$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}$$
$$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}$$
$$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}$$

邻域

设 $\delta>0$,x_0 为实数,则集合 $\{x|\ |x-x_0|<\delta\}$ 称为 x_0 的 δ 邻域.由 $|x-x_0|<\delta$ 即 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 可知,x_0 的 δ 邻域是以 x_0 为中心,长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

刚起步的学生需要知道比事实和技巧更多的东西:吸收一种数学的世界观,一组判断问题是否有意思的准则,一种向别人传递数学知识、数学热情和数学味道的方法.

格列夫斯

本章将在复习和加深函数有关知识的基础上着重讨论函数的极限,并介绍函

数的连续性.

1.1 函数

函数是一种反映变量之间相依关系的数学模型.

在自然现象或社会现象中,往往同时存在几个不断变化的量,这些变量不是孤立的,而是相互联系并遵循一定的规律.函数就是描述这种联系的一个法则.比如,一个运动着的物体,它的速度和位移都是随时间变化而变化的,它们之间的关系就是一种函数关系.

1.1.1 函数的定义

定义 1 设 x,y 是两个变量,D 是给定的一个数集,若对于 D 中的每一个 x 值,根据某一法则 f,变量 y 都有唯一确定的值与它对应,那么,我们就说变量 y 是变量 x 的**函数**.记作

$$y=f(x),x\in D$$

式中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.自变量 x 的变化范围 D 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**,因变量 y 的变化范围称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

为了便于理解,可以把函数想象成一个数字处理装置.当输入(定义域的)一个值 x,则有(值域的)唯一确定的值 $f(x)$ 输出,如图 1-1 所示。

函数的定义域、对应关系称为函数的两个要素.

关于函数的定义域,在实际问题中应根据实际意义具体确定.如果讨论的是纯数学问题,则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所组成的集合作为该函数的定义域.

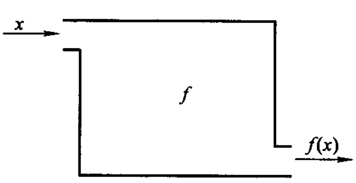


图 1-1

例 1-1 求 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,应满足 $4-x^2\geqslant 0$,即 $x^2\leqslant 4$,得 $-2\leqslant x\leqslant 2$,所以函数的定义域为$[-2,2]$.

例 1-2 求 $f(x)=\dfrac{\lg(2-x)}{x-1}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,应满足 $2-x>0$,且 $x-1\neq 0$,即 $x<2$ 且 $x\neq 1$,所以,函数的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,2)$.

1.1.2 函数的表示法

常用的函数表示法有三种:

1. 表格法

将自变量的值与对应的函数值列成表的方法,称为表格法.如平方表、三角函

数表等都是用表格法表示的函数关系.

2. 图像法

在坐标系中用图形来表示函数关系的方法,称为图像法.例如,气象台用自动记录仪把一天的气温变化情况自动描绘在记录纸上,如图 1-2 所示.根据这条曲线,就能知道一天内任何时刻的气温了。

3. 公式法

将自变量和因变量之间的关系用数学式子来表示的方法,称为公式法.这些数学式子也称为解析表达式.函数的解析表达式分三种,由此函数也可分为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**.

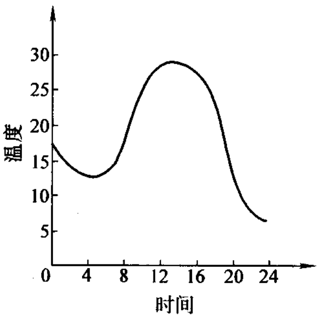


图　1-2

(1) 显函数　函数 y 由 x 的解析式直接表示出来.例如,$y=x^2-1$.

(2) 隐函数　函数的自变量 x 和因变量 y 的对应关系是由方程 $F(x,y)=0$ 来确定.例如,$y-\sin(x+y)=0$.

(3) 分段函数　函数在其定义域的不同范围内,具有不同的解析表达式.

例如,函数

$$y=\begin{cases}-x+1 & x\geqslant 0\\ x+1 & x<0\end{cases},$$

其图像如图 1-3 所示.

再如,符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases},$$

其图像如图 1-4 所示.

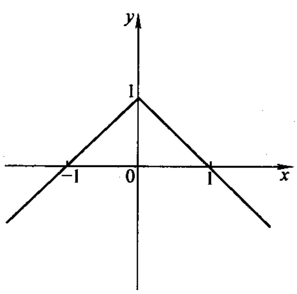


图　1-3

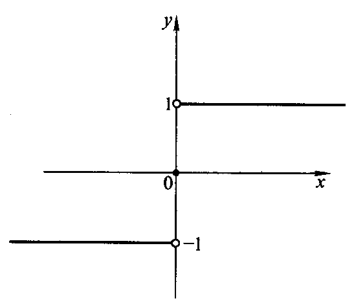


图　1-4

有些分段函数也用一些特殊的符号来表示.例如,整函数 $y=[x]$,其中$[x]$表

示不大于 x 的最大整数，如$[3.14]=3$；$[-0.2]=-1$. 整函数的图像如图 1-5 所示.

需要注意的是：分段函数在整个定义域上是一个函数，而不是几个函数.

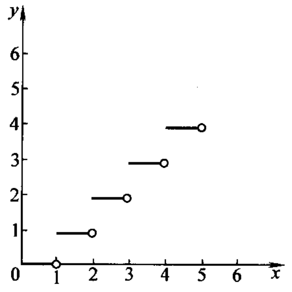


图 1-5

背景聚焦

你知道历史上的某一天是星期几吗？

历史上的某一天究竟是星期几？这是一个有趣的计算问题，你们一定很想知道它的计算方法。不过，要了解这一点，先得从闰年的设置讲起.

由于一个回归年不是恰好 365 日，而是 365 日 5 小时 48 分 46 秒（或 365.2422 日）. 为了防止这多出的 0.2422 日积累起来，造成新年逐渐往后推移，因此每隔 4 年便设置一个闰年，这一年的二月从普通的 28 天改为 29 天. 这样闰年便有 366 天. 不过，这样补也不刚好，每百年差不多又多补了一天，因此又规定：遇到年数为“百年”的不设闰，扣回一天. 这就是常说的“百年 24 闰”. 但是，百年扣一天还是不刚好，又需要每四百年再补回来一天，因此又规定：公元年数为 400 倍数者设闰. 这样补来扣去，终于刚好！例如，1976、1988 这些年数被 4 整除的年份为闰年，而 1900、2100 这些年则不设闰，2000 年的年数恰能被 400 整除，又要设闰，如此等等.

我们可以根据设闰的规律，推算出在公元 x 年第 y 天是星期几. 这里变量 x 是公元的年数，变量 y 是从这一年的元旦，算到这一天为止（包含这一天）的天数.

数学家已为我们找到了这样的公式（利用整函数）.

$$n=x-1+\left[\frac{x-1}{4}\right]-\left[\frac{x-1}{100}\right]+\left[\frac{x-1}{400}\right]+y$$

按上式求出 n 后，除以 7，如果恰能除尽，则这一天为星期日；否则，余数为几，则为星期几.

例如 1961 年 6 月 24 日，容易算出 $x-1=1960$，而 $y=175$. 代入公式得

$$n=1960+\left[\frac{1960}{4}\right]-\left[\frac{1960}{100}\right]+\left[\frac{1960}{400}\right]+175$$
$$=1960+490-19+4+175=2610$$

而 2610 除以 7 余 6. 这就是说，这一天是星期六.

1.1.3　函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对任意 $x\in D$ 均有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**；若对任意 $x\in D$ 均有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**. 偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1-6a 所示；奇函数的图像关于原点对称，如图 1-6b 所示.

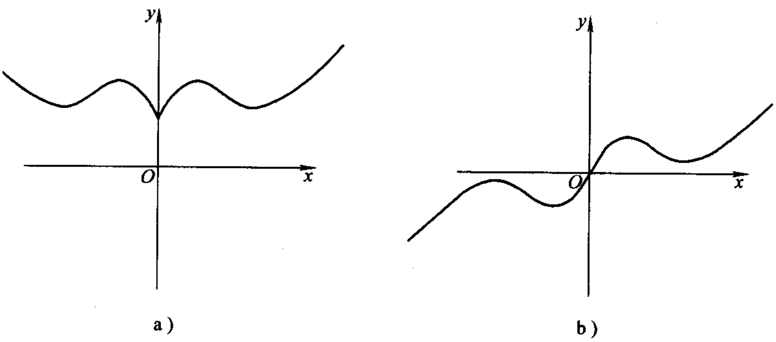


图　1-6

2. 函数的单调性

若函数 $y=f(x)$ 区间 (a,b) 内的任意两点 x_1、x_2，当 $x_2>x_1$ 时，有 $f(x_2)>f(x_1)$，则称此函数在区间 (a,b) 内**单调增加**；若有 $f(x_2)<f(x_1)$，则称此函数在区间 (a,b) 内**单调减少**. 单调增加的函数与单调减少的函数统称为**单调函数**.

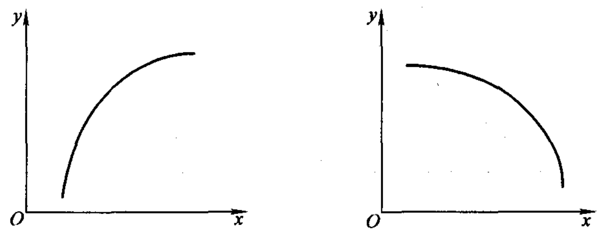
单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的，如图 1-7a 所示；单调减少函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的，如图 1-7b 所示.

3. 函数的有界性

设 D 是函数 $y=f(x)$ 的定义域，若存在一个正数 M，使得对一切 $x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 是有界函数，否则称函数 $f(x)$ 为无界函数.

4. 函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，若存在常数 $T>0$，使得对一切 $x\in D$，皆有 $f(x)=f(x+T)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数. 大家熟悉的三角函数就是周期函数. 其实，在实际应用中会遇到许多周期函数，如电学中的矩形波（见图 1-8）、锯齿波（见图 1-9）等.



a)　　b)

图 1-7

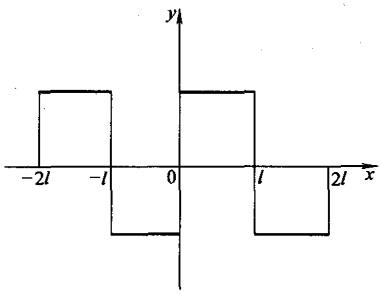


图 1-8

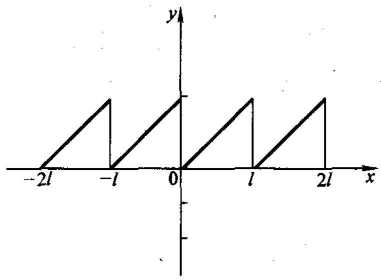


图 1-9

例 1-3 判断函数 $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$ 的奇偶性.

解 因为

$$f(-x)=\frac{-x}{(-x-1)(-x+1)}=-\frac{x}{(x-1)(x+1)}=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

例 1-4 判断函数 $f(x)=\dfrac{x\cos x}{1+x^2}$ 的有界性.

解 因为 $1+x^2\geqslant 2x$，所以

$$|f(x)|=\left|\frac{x\cos x}{1+x^2}\right|\leqslant\left|\frac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\left|\frac{x}{2x}\right|=\frac{1}{2}$$

因此，$f(x)$ 是有界函数.

1.1.4 反函数

定义 2 给定函数 $y=f(x)$，如果把 y 作为自变量，x 作为函数，则由关系式 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，而 $y=f(x)$ 称为直接函数．习惯上总是用 x 表示自变量，y 表示函数，因此 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 通常也写成 $y=\varphi(x)$. 函数 $y=\varphi(x)$ 与函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例 1-5 求函数 $y=x^3-1$ 的反函数.

解　因为 $y=x^3-1$，所以 $x=\sqrt[3]{y+1}$，再改写为 $y=\sqrt[3]{x+1}$，函数的图像如图 1-10 所示.

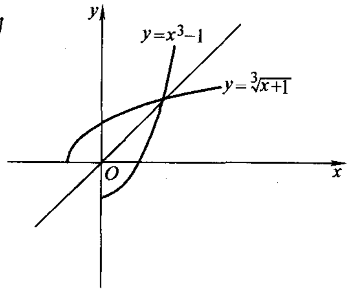


图　1-10

1.1.5　基本初等函数

常数函数 $y=C$（C 是任意实数）；

幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 是任意实数）；

指数函数 $y=a^x$（$a>0,a\neq1$，a 为常数）；

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0,a\neq1$，a 为常数）；

三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$；

反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

以上六种函数统称为**基本初等函数**.

1.1.6　复合函数

定义 3　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，当 x 在某一区间上取值时，相应的 u 值使 y 有意义，则称 y 为 x 的复合函数，记作 $y=f(u)=f(\varphi(x))$，其中 x 是自变量，u 是中间变量. 有的复合函数是多重复合，有多个中间变量.

如前所述，若函数能被想象成一个数字处理装置，那么复合函数也能被想象成若干个简单的数字处理装置串联起来形成的一个复杂的数字处理装置，如图 1-11 所示，其中 $g(x)$ 既是第一台装置的输出，又是第二台装置的输入.

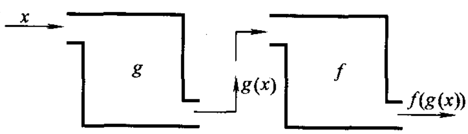


图　1-11

例 1-6　设 $y=f(u)=\sin u,u=\varphi(x)=x^2+1$，求 $f(\varphi(x))$.

解　$f(\varphi(x))=\sin u=\sin(x^2+1)$.

例 1-7　设 $y=f(u)=\sqrt{u},u=\varphi(t)=\mathrm{e}^t,t=\phi(x)=x^3$，求 $f(\varphi(\phi(x)))$.

解　$f(\varphi(\phi(x)))=\sqrt{u}=\sqrt{\mathrm{e}^t}=\sqrt{\mathrm{e}^{x^3}}$.

例 1-8　设 $y=f(u)=\arctan u,u=\varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}},\ t=\phi(x)=x^2-1$，求 $f(\varphi(\phi(x)))$.

解　$f(\varphi(\phi(x)))=\arctan u=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{t}}=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

例 1-9　已知 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，求 $f(f(x))$.

解 $f(f(x))=\dfrac{1}{\sqrt{f^2(x)+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}+1}}=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}}$.

例 1-10 分析函数 $y=\sin x^2$ 的复合结构.

解 所给函数是由 $y=\sin u, u=x^2$ 复合而成.

例 1-11 分析函数 $y=\tan^2\dfrac{x}{2}$的复合结构.

解 所给函数是由 $y=u^2, u=\tan t, t=\dfrac{x}{2}$复合而成.

例 1-12 分析函数 $y=e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}$的复合结构.

解 所给函数是由 $y=e^u, u=\arcsin t, t=\sqrt{v}, v=x^2-1$ 复合而成.

例 1-13 分析函数 $y=\dfrac{1}{\ln(1+\sqrt{1+x^2})}$的复合结构.

解 所给函数是由 $y=\dfrac{1}{u}, u=\ln t, t=1+\sqrt{v}, v=1+x^2$ 复合而成.

例 1-14 分析函数 $y=\sqrt[3]{\arctan\cos 2^{2x}}$的复合结构.

解 所给函数是由 $y=\sqrt[3]{u}, u=\arctan t, t=\cos v, v=2^s, s=2x$ 复合而成.

定义 4 由基本初等函数及常数经过有限次四则运算及复合所得到的函数都是**初等函数**. 例如，函数 $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$, $y=\arcsin e^{\frac{x}{2}}$, $y=\lg(\sin x)$等都是初等函数.

习 题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^3-7x+6}$; (2) $y=\sqrt{x+1}$;

(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; (4) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-1}$;

(5) $y=\dfrac{1}{\ln\ln x}$; (6) $y=\arcsin\dfrac{2x^2+1}{x^2+5}$;

(7) $y=\sqrt{\ln(x-1)}$; (8) $y=\arccos\dfrac{2x+1}{5}+\sqrt{x+1}$;

(9) $y=\dfrac{\ln(x-3)+\ln(7-x)}{\sqrt{(x-2)(x-4)(x-6)}}$.

2. 已知 $f(x)$的定义域为$(-2,3)$，求 $f(x+1)+f(x-1)$的定义域.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1} & x\geq 1\\ x^2 & x<1\end{cases}$，作出 $f(x)$的图像，并求 $f(5)$、$f(-2)$的值.

4. 设 $f(\sin x)=\sin 3x-\sin x$，求 $f(x)$.

5. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2}+x^2$，求 $f(x)$.

6. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}(x>0)$；　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

(3) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

7. 已知 $f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上是奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+1$，试写出 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的函数表达式并作图.

8. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\dfrac{1}{x^5}$；　(2) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

(3) $y=\dfrac{x\cos x}{x^2+1}$；　(4) $y=e^{x^2}$；

(5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

9. 求下列函数的周期：

(1) $y=\sin\dfrac{1}{2}x$；　(2) $y=2+\cos 3x$；

(3) $y=\sin x\cos x$.

10. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f(f(x))$.

11. 分析下列函数的复合结构：

(1) $y=(1-x)^3$；　(2) $y=\sin^2 x$；

(3) $y=e^{\sqrt{2+x^2}}$；　(4) $y=\ln\arcsin\dfrac{1}{1+x}$；

(5) $y=\arcsin\sqrt{\cos x}$；　(6) $y=\ln\ln x$；

(7) $y=\tan^3(e^{3x})$；　(8) $y=\arctan\sqrt{\ln(1+x^2)}$.

1.2　极限

极限是微积分的重要基本概念之一.微积分的许多概念都是用极限表述的，一些重要的性质和法则也是通过极限方法推得的，因此，掌握极限的概念、性质和计算是学好微积分的基础.下面先看两个引例.

引例 1　确定圆面积就是一个求极限的过程.我国古代三国(大约公元 260 年)时期的伟大数学家刘徽用圆内接正多边形的面积来逼近圆面积，如图 1-12 所示，若用 A 表示圆的面积，A_n 表示圆内接正 n 边形的面积，显然，正多边形的边数 n 越多，正 n 边形的面积 A_n 就越接近于圆的面积 A.当边数无限增加时，正 n 边形的面积 A_n 就无限接近于圆的面积 A.

下面用逼近原理具体计算一个曲边梯形的面积.