06

高中精学巧练丛书

精要点拨与能力激活

丛书主编 乔世伟 / 副主编 徐界生 / 本册主编 孙金明

上海市 松江二中 编写

高一数学 第二学期 （试用本）

GAOZHONG JINGXUE QIAOLIAN CONGSHU

学习导引 范例解析 巩固练习

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

GAOZHONG JINGXUE
QIAOLIAN CONGSHU

◎ 倡导自主探究 ◎ 拓展学习时空

◎ 激活创新思维 ◎ 提升实践能力

“高中精学巧练丛书”第四辑书目

高一数学（试用本）精要点拨与能力激活（第一学期）

高一语文（试用本）精要点拨与能力激活（第一学期）

高一英语（牛津版）精要点拨与能力激活（第一学期）

高一物理（试用本）精要点拨与能力激活（第一学期）

高一化学（试用本）精要点拨与能力激活（第一学期）

↗ 高一数学（试用本）精要点拨与能力激活（第二学期）

高一语文（试用本）精要点拨与能力激活（第二学期）

高一英语（牛津版）精要点拨与能力激活（第二学期）

高一物理（试用本）精要点拨与能力激活（第二学期）

高一化学（试用本）精要点拨与能力激活（第二学期）

ISBN 978-7-5628-2164-9

9 787562 821649 >

责任编辑／钱四海

责任校对／李　晔

封面设计／大象设计工作室 010-84803033

定价：13.00元

精要点拨与能力激活

丛书主编 乔世伟 / 副主编 徐界生 / 本册主编 孙金明

上海市 松江二中 编写

高一数学 第二学期 （试用本）

GAOZHONG JINGXUE QIAOLIAN CONGSHU

学习导引 范例解析 巩固练习

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高一数学(试用本)精要点拨与能力激活:第二学期/上海市松江二中编写.
—上海:华东理工大学出版社,2008.1
(高中精学巧练丛书)
ISBN 978-7-5628-2164-9

Ⅰ.高…　Ⅱ.上…　Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第162910号

高中精学巧练丛书

高一数学(试用本)精要点拨与能力激活(第二学期)

上海市松江二中编写

本册主编 / 孙金明
责任编辑 / 钱四海
责任校对 / 李　晔
封面设计 / 大象设计工作室
出版发行 / 华东理工大学出版社
地　址:上海市梅陇路130号,200237
电　话:(021)64250306(营销部)
传　真:(021)64252707
网　址:www.hdlgpress.com.cn
印　　刷 / 上海崇明裕安印刷厂
开　　本 / 787mm×1092mm　1/16
印　　张 / 8
字　　数 / 197千字
版　　次 / 2008年1月第1版
印　　次 / 2008年1月第1次
印　　数 / 1—8050册
书　　号 / ISBN 978-7-5628-2164-9/G·318
定　　价 / 13.00元

高中精学巧练丛书编委会名单

主　编　乔世伟

副主编　徐界生

编　委　孙金明　朱桂娟　葛韵华

　　　　　朱红兵　顾韦平

前 言

本丛书是我校《高中教学精华丛书》与时俱进的最新版本。

《高中教学精华丛书》自 1996 年 8 月初版以来，受到广大中学师生的普遍欢迎，经多次重版共销售近百万册。此后，随着教改形势的发展，教材及高考命题的变化，为进一步提高丛书质量，满足读者要求，我们于 2001 年 6 月对本丛书作了相当的修改增删，以“修订版”的新貌出现在各家书店的图书专柜上，再一次赢得了广大读者的嘉许。

然而，时代的演变，教改的推进是一个生生不息的过程，以服务广大高中师生、服务高中教学为宗旨的我校丛书编写只能是顺应发展，以变应变。上海市新一轮课改提出了“以国际化大都市为背景，以德育为核心，以培养学生创新精神和实践能力为重点，以学习方式的改变为特征”的明确要求，这对我们来说，不仅是一次探索新路的挑战，也是一次重编新书的机遇。借百年老校之传承，积数载教改之经验，凭优良师资之实力，受二期课改之驱动，我们遵循高考改革方向，重视实践效果，群策群力，集思广益，终于编写出与二期课改相配套的丛书，命其名为《高中精学巧练丛书》。

在最初的《高中教学精华丛书》的各个分册中，我们曾力求分别体现其实用性、针对性、侧重性、贴近性、全面性、启发性，以期适应自主学习、自主发展、应对考查、应战高考的需要，后又加大“引导性”、“示范性”的力度，更有利于掌握变中求胜的先机。现在，以上种种仍择优融入新编丛书之中。体例不同了，编排不同了，内容不同了，题路不同了，但择优整合、发展创新的原则没有变，落实能力立意、应用为要的措施更强化。注重夯实基础，促进理解；循序渐进，同步操练；激活思维，拓展视野；加强研究，提升能力……纵览教育园地，二期课改已进入攻坚阶段，一切与此相关的尝试正期待着更好的结果。潮平两岸阔，风正一帆悬。催促着我校《高中精学巧练丛书》继往开来，再出新版。本丛书的各分册编写者各展所长，各显其能，既有共性的渗透，又有个性的发挥。从编写思路到实例举证，文理各科基本上都自有特色。这些特色源自于在新的教学形势高考形势下致力于提高学生知识、能力、素质水平的我校第一线教师的智慧结晶，因而参考价值和操作导向随处可见其长。

本丛书杀青之际，正值学校最为繁忙之时，难免有斟酌不及、考量不周之处，还请广大读者提出批评建议，帮助我们做好今后的修订工作。谢谢！

上海市松江二中《高中精学巧练丛书》编委会

2007 年 7 月

编 写 说 明

2006年秋季开始，上海市高一年级推广使用的数学教材已在原二期课改教材（试验本）的基础上进行了一些重要修订。为了与修订后的新教材配套，我们对原《高一数学（试验本）精要点拨与能力激活》一书内容也作了相应的调整、修改、补充，并分成第一学期、第二学期两个分册出版。

古人云："授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则可使人一生受用无穷。"在本书的编写过程中，我们努力追求的目标是：要使本书体现能力立意的宗旨，培养学生的自主创新精神和实践能力；使学生在用本书进行自学和自测后，能更透彻地明白重点、难点，能掌握基本的解题思路和方法，能举一反三、触类旁通。

本书有以下几方面的特色：

【学习导引】阐述各节中应掌握的知识点，进行适当的学法指导，明确知识的结构体系，并拓展知识的广度和深度。

【范例解析】精选的题目针对性强，与所学的知识密切相关，既注重基础，又注意拓展提高，还有一定量的"能力型问题"。本次修订删去了一些较难、较偏的例题，增加了一些新题。通过思路分析、点拨解题的方式，更好地体现学科思想与基本的解题方法，提高学生分析解决问题的能力。

【巩固练习】精选少量试题，力求题型多样，知识覆盖面广，既注意基础知识的训练，又注重综合运用能力的提高，做到知识立意与能力立意兼顾。本次修订删去了一些较难、较偏的习题，增加了一些新题。

希望本书的修订出版能对学生学习方式的改变、学习能力和学习效率的提高起到积极的作用。

本书主编孙金明。参加本书编写和修订的教师还有傅元培、阮晓明、黄继红、金翠妹。

由于时间比较仓促，书中难免有疏漏之处，敬请读者批评指正。

上海市松江二中数学教研组

2007年7月

目　录

第 4 章 幂函数、指数函数和对数函数(下)

4.3 对　　数

4.3.1 对数概念及其运算(1)

【学习导引】

1. 对数的概念

若 $a^b = N$ ($a > 0$, $a \neq 1$),则 $\log_a N = b$.

(1) 底数 $a > 0$, $a \neq 1$ 的理由与指数函数中理由相同;

(2) 由于 $a^b > 0$ 恒成立,故 $N > 0$;

(3) 对数式、指数式、根式是同一种数量关系的三种不同表达形式.

2. 对数式与指数式的互化

当 $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$ 时,$a^b = N \Leftrightarrow \log_a N = b$.

3. 几个对数恒等式

(1) $\log_a 1 = 0$

(2) $\log_a a = 1$

(3) $a^{\log_a N} = N$

4. 几种常见对数

(1) 常用对数:以 10 为底的对数　$\log_{10} N = \lg N$

(2) 自然对数:以 e ($e \approx 2.718\cdots$) 为底的对数　$\log_e N = \ln N$

【范例解析】

例 1. 下列说法中正确的是　(　　)

(A) 若 $a^x = b$,则 $x = \sqrt[a]{b}$.　(B) 若 $a^x = b$,则 $x = \sqrt[b]{a}$.

(C) 若 $a^x = b$,则 $x = \log_a b$.　(D) 若 $a^x = b$,则 $x = \log_b a$.

解:由对数的定义知(C)正确.

评注:由此可见,在 $a^b = N$ 中

开方运算和对数运算都是乘方运算的逆运算.

求幂 N:是乘方运算,即 $a^b = N$.

求底数 a:是开方运算,即 $a = \sqrt[b]{N}$.

求指数 b:是对数运算,即 $b = \log_a N$.

例 2. 求下列各式中的 x.

(1) $\log_x 27=\frac{3}{4}$　　　(2) $\log_3 x=-\frac{2}{3}$

(3) $\log_x(3-2\sqrt{2})=-2$　　　(4) $\log_2(\log_5 x)=0$

解:(1) 由 $\log_x 27=\frac{3}{4}$ 得 $x^{\frac{3}{4}}=27$,即 $x^{\frac{3}{4}}=3^3$,故 $x=(3^3)^{\frac{4}{3}}=3^4=81$.

(2) 由 $\log_3 x=-\frac{2}{3}$,得 $x=3^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$.

(3) 由 $\log_x(3-2\sqrt{2})=-2$,得 $x^{-2}=3-2\sqrt{2}=(\sqrt{2}-1)^2$, $\therefore\ x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$.

(4) 由 $\log_2(\log_5 x)=0$,得 $\log_5 x=2^0=1$,故 $x=5^1=5$.

评注:由于大家对指数运算相对较为熟悉,根据对数定义,将对数式转化为指数式是解决此类问题的基本方法.

例 3. 求下列各式中 x 的取值范围.

(1) $\log_{x-1}(x+2)$;　　　(2) $\log_{1-2x}(3x+2)$.

解:(1) 由对数的定义知

$$\begin{cases}x-1>0\\x-1\neq 1\\x+2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\x\neq 2\\x>-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\x\neq 2\end{cases}.$$

故 x 的取值范围是 $\{x\mid x>1$ 且 $x\neq 2\}$.

(2) 由对数的定义知

$$\begin{cases}1-2x>0\\1-2x\neq 1\\3x+2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<\frac{1}{2}\\x\neq 0\\x>-\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{2}\\x\neq 0\end{cases}.$$

故 x 的取值范围是 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{2},\text{且 } x\neq 0\right\}$.

评注:必须全面、准确地理解对数的定义,尤其不可忽视底数的范围 $(a>0,\ a\neq 1)$.

例 4. 求值

(1) $2^{4+\log_2 3}$;　　　(2) $27^{\frac{2}{3}-\log_3 2}$;　　　(3) $(\sqrt{7})^{\frac{1}{2}\log_7 14-\frac{1}{2}}$.

解:(1) $2^{4+\log_2 3}=2^4\cdot 2^{\log_2 3}=16\cdot 3=48$.

(2) $27^{\frac{2}{3}-\log_3 2}=3^{3\left(\frac{2}{3}-\log_3 2\right)}=3^2\cdot(3^{\log_3 2})^{-3}=9\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{9}{8}$.

(3) $(\sqrt{7})^{\frac{1}{2}\log_7 14-\frac{1}{2}}=(\sqrt{7})^{\frac{1}{2}\log_7 14}\div(\sqrt{7})^{\frac{1}{2}}=7^{\frac{1}{4}\log_7 14}\div 7^{\frac{1}{4}}$

$=(7^{\log_7 14})^{\frac{1}{4}}\div 7^{\frac{1}{4}}=14^{\frac{1}{4}}\div 7^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2}$.

评注:恒等式 $a^{\log_a N}=N$ $(a>0$ 且 $a\neq 1,\ N>0)$ 是常用的重要恒等式.其证明如下:在指数式 $a^b=N$ 中,$\because\ b=\log_a N$. $\therefore\ a^{\log_a N}=N$.

例 5. (1) 使用计算器分别计算 lg 3.5, lg 35, lg 350, lg 3 500 的值(精确到 0.000 1).

(2) 根据上述结果,猜想一个正确的结论,并加以证明.

解:(1) 使用计算器计算得

$$\lg 3.5 = 0.544\,1,\ \lg 35 = 1.544\,1.$$

$$\lg 350 = 2.544\,1,\ \lg 3\,500 = 3.544\,1.$$

(2) 猜想的结论为:若 $\lg a = b$,则 $\lg(a \times 10^n) = n + b$.

证明:$\because \lg a = b \quad \therefore a = 10^b \quad \therefore a \times 10^n = 10^b \times 10^n = 10^{b+n}$.

$\therefore \lg(a \times 10^n) = n + b$.

评注:由具体的几个数猜想一个结论的常用方法是把数用字母代入后,结论也作相应变化后是否仍成立;应注意的是猜想的真命题可能是不唯一的.

【巩固练习】

一、填空题

1. 若 $\log_m 4 = \dfrac{1}{3}$,则 $m =$ ________.

2. 若 $\log_{25} x = \dfrac{1}{4}$,则 $x =$ ________.

3. 若 $x^3 = 5$,则 $x =$ ________.

4. 若 $\ln(\lg x) = 0$,则 $x =$ ________.

5. $(\sqrt{e})^{\ln 25} =$ ________.

6. 若 $10^x = 7$,则 $x \approx$ ________(保留四位小数).

7. 若 $e^x = 0.25$,则 $x \approx$ ________(保留四位小数).

二、选择题

1. 下列结论中正确的是 ( )

(A) $\lg(\ln 1) = 0$. (B) 若 $e^x = 10$,则 $\ln 10 = x$.

(C) $e^{\ln e} = 1$. (D) 若 $\log_{25} x^2 = 1$,则 $x = 5$.

2. 已知 $\log_{a^2} b = c$,则 ( )

(A) $a^{2b} = c$. (B) $a^{2c} = b$. (C) $b^c = 2a$. (D) $c^{2a} = b$.

3. 已知 $\log_{11}[\log_3(\log_2 x)] = 0$,则 $x^{-\frac{1}{2}} =$ ( )

(A) $\dfrac{1}{3}$. (B) $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. (C) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. (D) $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$.

4. 若 $\log_{(x+1)}(x+1) = 1$. 则 x 的取值范围是 ( )

(A) $x > -1$. (B) $x > -1$ 且 $x \neq 0$.

(C) $x \in \mathbf{R}$. (D) $x > 0$.

5. $\log_{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) =$ ( )

(A) 1. (B) -1. (C) 2. (D) -2.

三、解答题

1. 计算 $25^{\frac{1}{3}\log_5 27 + \log_5 8}$.

2. 已知 x, y 都是实数,且 $y=\dfrac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x+1}$,求 $\lg(x+y)$.

3. 若 $\log_a 2=m$, $\log_a 3=n$,求 a^{2m+n} 的值.

4. 若 $\log_2[\log_3(\log_4 x)]=\log_3[\log_4(\log_2 y)]=\log_4[\log_2(\log_3 z)]=0$,求 $x+y+z$ 的值.

5. 设 $M=\{0,1\}$, $N=\{11-a,\lg a,2^a,a\}$,问是否存在实数 a,使 $M\cap N=\{1\}$?

4.3.2 对数概念及其运算(2)

【学习导引】

1. 对数的运算性质

若 $a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$,则有

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

(2) $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right)=\log_a M-\log_a N$

(3) $\log_a M^n=n\log_a M$

2. 几点说明

(1) 上述公式成立的条件是各部分都有意义;

(2) 真数运算到对数运算为降级过程,即真数乘、除运算转化为对数加、减运算;真数乘方运算转化为对数乘法运算.

3. 指数式化对数式时,可采用两边取对数的方法.

即若 $a=b>0$, $c>0$, $c\neq 1$,

则有 $a=b\Leftrightarrow\log_c a=\log_c b$

【范例解析】

例 1. 对于 $a>0$, $a\neq 1$,下列说法中正确的是　　(　　)

① 若 $M=N$，则 $\log_a M=\log_a N$；

② 若 $\log_a M=\log_a N$，则 $M=N$；

③ 若 $\log_a M^2=\log_a N^2$，则 $M=N$；

④ 若 $M=N$，则 $\log_a M^2=\log_a N^2$.

(A) ①与③.　　(B) ②与④.　　(C) ②.　　(D) ①②③④.

解：(1) 当 $M=N\leqslant 0$ 时，$\log_a M$ 与 $\log_a N$ 均无意义，因此 $\log_a M=\log_a N$ 不成立，故①不正确；

(2) 当 $\log_a M=\log_a N$ 时，必有 $M=N>0$，故②成立；

(3) 当 $\log_a M^2=\log_a N^2$ 时，$M=\pm N$，故③不成立；

(4) 当 $M=N=0$ 时，$\log_a M^2$ 与 $\log_a N^2$ 均无意义，故④不成立.

综上所述可知，仅有②成立，故选(C).

评注：对数运算性质成立的前提是各对数式都有意义.

例 2. 计算 $\lg 5(\lg 8+\lg 1\,000)+(\lg 2^{\sqrt{3}})^2+\lg\dfrac{1}{6}+\lg 0.06+9^{\log_3 2}$ 的值.

解：
$$\begin{aligned}原式&=\lg 5(3\lg 2+3)+3\lg^2 2-\lg 6+\lg 6-2+(3^{\log_3 2})^2\\&=3\lg 5\lg 2+3\lg 5+3\lg^2 2-2+4\\&=3\lg 2(\lg 5+\lg 2)+3\lg 5+2\\&=3\lg 2+3\lg 5+2\\&=3(\lg 2+\lg 5)+2=5\end{aligned}$$

评注：利用对数性质计算时，除要熟练地运用对数性质外，还应注意以下两点：

(1) 将真数分解成质因数的积的形式，如本例中，$8=2^3$；

(2) 凑底，如 $\lg 5+\lg 2=\lg(5\times 2)=\lg 10=1$.

另外应注意：$\lg^2 2=(\lg 2)^2\approx(0.477\,1)^2\approx 0.227\,6$.

$$\lg 2^2=2\times\lg 2\approx 2\times 0.477\,1\approx 0.954\,2.$$

故　$\lg^2 2\neq\lg 2^2$

例 3. 用 $\log_a x$，$\log_a y$ 表示 $\log_a\left[\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x}{\sqrt[4]{y}}}\right]$.

解：$\log_a\left[\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x}{\sqrt[4]{y}}}\right]=\log_a\left[a^{\frac{1}{4}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{12}}}\right]=\log_a a^{\frac{1}{4}}+\log_a x^{\frac{1}{3}}-\log_a y^{\frac{1}{12}}$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\log_a x-\dfrac{1}{12}\log_a y$

评注：本例涉及根式、指数、对数的运算法则. 理解根式与分数指数的关系，区分指数运算与对数运算法则的异同是正确解本题的基础.

例 4. 已知 $2^{6a}=3^{3b}=6^{2c}$.

求证：$\dfrac{1}{6a}+\dfrac{1}{3b}=\dfrac{1}{2c}$.

证明：设 $2^{6a}=3^{3b}=6^{2c}=k$

则由 $2^{6a}=k$ 得 $\log_k 2^{6a}=\log_k k$.

即 $6a\log_k 2=1$　$\therefore\ \log_k 2=\dfrac{1}{6a}$

同理　$\log_k 3=\dfrac{1}{3b}$　$\log_k 6=\dfrac{1}{2c}$

$\therefore \dfrac{1}{6a}+\dfrac{1}{3b}=\log_k 2+\log_k 3=\log_k 6=\dfrac{1}{2c}$

故有　$\dfrac{1}{6a}+\dfrac{1}{3b}=\dfrac{1}{2c}$.

评注:在一个等式两边取对数是一种常用的技巧,一般是当给出的等式是以指数形式出现时常用此法.在取对数时,要注意底数的合理选取.

例 5. 已知 a、b、c 均为大于 1 的实数.

且 $a^x\cdot b^y\cdot c^z=a^y\cdot b^z\cdot c^x=a^z\cdot b^x\cdot c^y=1$

求证: $x+y+z=0$.

证法一:由$a^x\cdot b^y\cdot c^z=1$

$a^y\cdot b^z\cdot c^x=1$

$a^z\cdot b^x\cdot c^y=1$

三式相乘得　$(abc)^{x+y+z}=1$

又$\because a>1,\ b>1,\ c>1,\ \therefore x+y+z=0$.

证法二:两边取对数,可得方程组

$$\begin{cases} x\lg a+y\lg b+z\lg c=0 \\ y\lg a+z\lg b+x\lg c=0 \\ z\lg a+x\lg b+y\lg c=0 \end{cases}$$

$\therefore (x+y+z)(\lg a+\lg b+\lg c)=0$

$\because a>1,\ b>1,\ c>1,$

$\therefore \lg a>0,\ \lg b>0,\ \lg c>0$,即$(\lg a+\lg b+\lg c)>0$

$\therefore x+y+z=0$

评注:本题的两种解法反映了指数与对数的内在联系.

【巩固练习】

一、填空题

1. $\lg^2 5+\lg 2\lg 5+\lg 20=$ ________.
2. 若 $\log_3 x^2-\log_3 x^6=8$,则 $x=$ ________.
3. 若 $\lg 3=m$,则 $\lg(3+3^{-1})=$ ________.
4. 若 $3^a=2$,则 $\log_3 8-2\log_3 6=$ ________.
5. $2\log_3 2-\log_3\dfrac{32}{9}+\log_3 8-5^{2\log_5 3}=$ ________.

二、选择题

1. 已知 $a>0$,且 $a\neq 1$, M, $N>0$,下列运算正确的是　(　　)

(A) $\log_a M+\log_a N=\log_a(M+N)$.　(B) $(\log_a M)^N=N\log_a M$.

(C) $(\log_a M)\div(\log_a N)=\log_a(M-N)$.　(D) $\log_a\sqrt[N]{M}=\dfrac{1}{N}\log_a M$.

2. $\lg m=b-\lg n$,则 $m=$　(　　)

(A) $\frac{b}{n}$.　(B) 10^{bn}.　(C) $b-10^{n}$.　(D) $\frac{10^{b}}{n}$.

3. 已知 $x=\sqrt{2}+1$,则 $\log_4(x^3-x-6)=$ (　　)

(A) $\frac{3}{2}$.　(B) $\frac{5}{4}$.　(C) 0.　(D) $\frac{1}{2}$.

4. 如果点 $P(\lg a,\ \lg b)$关于 x 轴对称点的坐标为$(0,\ -1)$,则 a 和 b 的值为 (　　)

(A) $a=1,\ b=10$.　(B) $a=1,\ b=\frac{1}{10}$.

(C) $a=10,\ b=1$.　(D) $a=\frac{1}{10},\ b=1$.

5. 利用计算器可比较 $a=\log_{(n+1)}(n+2)$ 和 $b=\log_{(n+2)}(n+3)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 的大小,其规律为 (　　)

(A) $a>b$.　(B) $a<b$.　(C) $a\geqslant b$.　(D) $a\leqslant b$.

三、解答题

1. 计算下列各式的值.

(1) $\log_6(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})$

(2) $-2^2\div\left(-\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}-(0.7)^{\lg 1}+\log_3\frac{1}{4}+\log_3 12$

(3) $\dfrac{\lg\sqrt{27}+\lg 8+\lg\sqrt{1\,000}}{\lg 120}$

2. 已知 $2\lg\frac{x-y}{2}=\lg x+\lg y$,求$\frac{x}{y}$的值.

3. 如果方程 $\lg^2 x+(\lg 2+\lg 3)\lg x+\lg 2\cdot\lg 3=0$ 的两个根为 $x_1,\ x_2$,求 $x_1\cdot x_2$ 的值.

4. 设 $A>B>0$,且 $A^2+B^2=6AB$.

求证:$\log_a\frac{A-B}{2}=\frac{1}{2}(\log_a A+\log_a B)$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

5. 设 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

求证：$f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$.

4.3.3　换底公式

【学习导引】

1. 对数换底公式

若 $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $N>0$.

则　$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$

(1) 公式成立的条件是各部分都有意义；

(2) 公式的作用是可以“随意”地改变对数的底数.

2. 公式的几种变形

(1) $\log_a b\cdot\log_b N=\log_a N$

(2) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

(3) $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$

上述等式成立的条件仍为各部分都有意义.

【范例解析】

例 1. 下列各式中正确的个数是　　　　(　　)

① $\log_{a^m} b^m=\log_a b$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$, $b>0$)

② $\log_{a^n} b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$, $b>0$, $n\neq 0$)

③ $\log_{a^n} a^m=\dfrac{m}{n}$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$, $n\neq 0$)

④ $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (a, b 均为不等于 1 的正数)

(A) 1 个.　　(B) 2 个.　　(C) 3 个.　　(D) 4 个.

解：① 左边 $=\dfrac{\lg b^m}{\lg a^m}=\dfrac{m\lg b}{m\lg a}=\log_a b=$ 右边，故①成立；

② 左边 $=\dfrac{\lg b^m}{\lg a^n}=\dfrac{m\lg b}{n\lg a}=\dfrac{m}{n}\log_a b=$ 右边，故②成立；

③ 左边 $=\dfrac{\lg a^m}{\lg a^n}=\dfrac{m\lg a}{n\lg a}=\dfrac{m}{n}=$ 右边，故③成立；