中等
数学解题方法

1
2 2
3 3 3
4 4 4 4
5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6

〔苏〕齐普金　平斯基 编著
〔中〕潘德松　李万年 译

中国青年出版社

中等数学解题方法

潘德松　李万年　译

中国青年出版社

封面设计：崔友利
插　　图：沈　沫
责任编辑：张　华

中等数学解题方法

潘德松　李万年　译

中国青年出版社出版发行
文字603印刷厂印刷　新华书店经销

787×1092　1/32　22.75印张　350千字
1991年3月北京第1版　1991年3月湖北第1次印刷
印数1—4,000册　定价8.80元

译者的话

这本书的原著是1984年苏联科学出版社出版的。我们把它翻译成中文，供我国的中学生、中学教师以及有志于学习数学的青年学习与参考。

本书介绍的是中等数学的解题方法，并按照解题方法作出比较详细的分类。目的是帮助读者系统整理中等数学的全部解题知识。

本书各节起始，简要叙述本节解题所必需的理论知识（定义、基本定理、公式）。然后对各种题型给出解法，并具体举例说明用法。最后是独立练习题，并提出解题条件。

要学好基础知识和掌握基本技能，首先要正确理解数学概念。在正确理解数学概念的基础上进行判断、推理，从而理解数学的原理和方法。解题练习是学习数学的重要组成部分，它可以培养学习者的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，使学习者逐步学会分析、综合、归纳、演绎、概括、抽象、类比等重要的思想方法。对于学习者掌握基础知识和基本技能、培养能力是必不可少的。

为了对学习数学的读者进行解题指导，这本书把解题方法作了比较详细的分类，对大量的各种不同的题目进行分析，

并选编了足够数量的题目，供读者自己练习解答。独立练习题的编排以难易程度为序，同时也考虑到每个读者有可能根据自己的知识水平和特长改变题目的先后顺序。书后附有本书所有练习题的答案和部分较难练习题的提示。

本书原著除署名的两位作者外，还有H.B.列维鲁克和K.K.安得列耶夫参加了部分编写和审阅工作。B.И.布拉戈达茨基赫对全书的编写工作给予了指导和帮助。译稿经中央教育科学研究所副研究员刘远图同志和北京矿业学院副教授盛世雄同志审校。在此，向刘远图、盛世雄两位表示深切的感谢。

潘德松　李万年

1986年于上海

目　　录

第一章　代数方程和方程组

恒等式是对式中所含字母所有的允许值都能成立的等式(允许值是指对等式中的字母所进行的一切运算都能成立的那些数值)。

方程式是仅当其所含字母取某些值时才能成立的等式。根据题设条件，方程中所含字母的作用并不完全相同。有一些字母可以取其所有的允许值，称它们为方程的系数(有时称为参数)；另一些需要求出其值的字母称为未知数(通常用英文字母表中最后几个字母 x、y、z 表示，或者用带下标的同一字母：x_1、x_2、…、x_n 或 y_1、y_2、…y_k 表示)①。

含 n 个未知数 x_1、x_2、…、x_n 的方程的一般形式可以写成

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \tag{1}$$

其中 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是给定变量的函数。根据方程中所含未知数的个数不同，把方程称为一元方程、二元方程、等等。

使方程变成恒等式的未知数的值称为方程的解，或者称为方程的根。

函数 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的定义域称为方程(1)中所含未知

---

① 如果不作特别说明，那么就认为未知数取实数值。

数的允许值范围(集合)。

如果方程 $F=0$ 的所有的根都是方程 $G=0$ 的根，那么就说方程 $G=0$ 是方程 $F=0$ 的结果，记作

$$F=0\Longrightarrow G=0。$$

如果 $F=0$ 和 $G=0$ 这两个方程中的每一个方程都是另一个方程的结果，那么就称这两个方程为*同解方程*，记作

$$F=0\Longleftrightarrow G=0。$$

因此，如果两个方程的根集合相同，那么就认为这两个方程是同解方程。

如果方程 $F=0$ 的根集合和方程 $F_1=0$、$F_2=0$ 的根集合的并集相同，那么就认为方程 $F=0$ 与 $F_1=0$ 和 $F_2=0$ 两个(或几个)方程同解。

下面列出一些同解方程：

(1) 方程 $F+G=G$ 和在原方程的允许值集合上所讨论的方程 $F=0$ 同解。

(2) 方程 $\frac{F}{G}=0$ 和在原方程允许值集合上所讨论的方程 $F=0$ 同解。

(3) 方程 $F\cdot G=0$ 与 $F=0$ 和 $G=0$ 两个方程同解，其中每一个方程都在原方程允许值集合上进行讨论。

(4) 方程 $F^n=0$ 和方程 $F=0$ 同解。

(5) 当 n 是奇数时，方程 $F^n=G^n$ 和方程 $F=G$ 同解；当 n 是偶数时，方程 $F^n=G^n$ 与 $F=G$ 和 $F=-G$ 两个方程同解。

可以化成

$$P_n=0$$

这种形式的方程，称为代数方程，其中 P_n 是一元或多元 n 次多项式。n 称为方程的次数。

§1. 一元有理方程

对于

$$ax+b=0 \tag{2}$$

这种形式的方程称为线性方程。线性方程有唯一根 $x=-\dfrac{b}{a}$。

$$ax^2+bx+c=0 \tag{3}$$

这种形式的方程称为二次方程。表示式 $b^2-4ac=D$ 称为二次方程的判别式。如果 $D>0$，那么方程(3)有两个实根：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

如果 $D=0$，那么方程(3)有一个二重实根：$x=-\dfrac{b}{2a}$。如果 $D<0$，那么方程(3)没有实根。

许多有理方程的解法在于利用某种方法把它们化成 (2) 或(3)这种形式的方程。方法之一就是引进辅助未知数。

例 1.1. 解方程

$$\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}.$$

解 引进辅助未知数 $z=x^2+2x$ 后，我们把原方程写成

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{12}. \qquad (*)$$

通过简单的变换，把方程(*)化成方程

$$\frac{z^2+z-12}{12z(z+1)}=0. \qquad (**)$$

这个方程和方程 $z^2+z-12=0$ 同解．这两个方程的同解性在于后一方程的根 $z=-4, z=3$ 属于方程(* *)允许值的集合．因此，原方程与 $x^2+2x-3=0$ 和 $x^2+2x+4=0$ 这两个二次方程同解．第一个方程的根是 $x_1=1, x_2=-3$．第二个方程没有实根．

答：$x=1, x=-3$.

【练习题】

解下列方程：

1.1. $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$.

1.2. $\frac{4}{x^2+4}+\frac{5}{x^2+5}=2$.

1.3. $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$.

1.4. $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$.

1.5. $7\left(x+\frac{1}{2}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$.

1.6. $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$.

1.7. $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$。

1.8. $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$。

1.9. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=0$。

1.10.* $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=0$。

1.11.* $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=19$。

1.12.* $(2x^2+3x-2)(5-6x-4x^2)=-5(2x^2+$
$+3x+2)$。

1.13. $x^4-13x^2+36=0$。

1.14. $2x^8+x^4-15=0$。

1.15. $(2x-1)^6+3(2x-1)^3=10$。

1.16.* $(1+x)^8+(1+x^2)^4=2x^4$。

1.17. $(x-2)^6-19(x-2)^3=216$。

高于二次的方程的解法之一是把方程左边的多项式分解因式，从而有可能把解原方程的问题归结为解几个次数较低的方程．这种方法的根据是 n 次多项式的根的下述性质．如果 c 是多项式

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的根,那么这个多项式可以写成

$$P(x)=(x-c)Q(x), \tag{4}$$

其中 $Q(x)$ 是 $n-1$ 次的多项式(也就是多项式 $P(x)$ 能被多项式 $x-c$ 整除)。

把多项式分解因式相当于求多项式的根．求多项式的

根，本身是比较困难的问题，在一般情况下，对于实系数 n 次多项式，不可能给出求根的普遍方法。但是，对于整系数 n 次多项式，可以应用定理求出它的有理根。

多项式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

的有理根可能只是$\frac{m}{p}$（m 是整数，p 是自然数），其中 a_0，a_1，$\cdots a_{n-1}$，a_n 是整数，$|m|$是$|a_n|$的约数，而 p 是$|a_0|$的约数。

例 1.2. 求方程

$$4x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 7x + 3 = 0$$

的根。

解 3 的约数是 1，3，而 4 的约数是 1，2，4。m 的值集是集合 $\{1, -1, 3, -3\}$，而 p 的值集是集合 $\{1, 2, 4\}$。$\frac{m}{p}$这种形式的各种不同的有理数集是集合$\left\{\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}\right\}$。把这些数代入方程中，得到的数 $x_1 = \frac{1}{2}$和$x_2 = -\frac{3}{2}$是方程的根。这就是说，根据(4)式，原多项式能被一次多项式$\left(x - \frac{1}{2}\right)$与$\left(x + \frac{3}{2}\right)$整除，因而原多项式能被它们的积：

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = x^2 + x - \frac{3}{4}$$

整除。利用“竖式除法”得到商的多项式 $4x^2 + 4x - 4$。解二

次方程

$$4x^2+4x-4=0,$$

得到两个实根：$x_3=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$x_4=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$。

于是，问题完全解决了，即求出原方程的所有四个根：

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{3}{2},\ x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

答：$\left\{\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$。

【练 习 题】

解方程：

1.18. $8x^4+6x^3-13x^2-x+3=0$。

1.19. $x^3+6x+4x^2+3=0$。

1.20. $2x^4-x^3-9x^2+13x-5=0$。

1.21.* $(x-1)^3+(2x+3)^3=27x^3+8$。

1.22. $x^3-(2a+1)x^2+(a^2+a)x-(a^2-a)=0$。

1.23. $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$。

某些特殊形式的方程 如果某四次方程的左边可以写成常数项不同的二次三项式的积的形式，而右边是某一个数，那么只要引进辅助未知数，使它等于两个因式的公共部分，就能把原方程化成二次方程。

例 1.3. 解方程

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=0.5625. \qquad (*)$$

解 把 $x(x+3)$ 与 $(x+1)(x+2)$ 各自相乘，得到

$$(x^2+3x)(x^2+3x+2)=0.5625.$$

引进辅助未知数，$y=x^2+3x$，通过明显的变换后，得到二次方程

$$y^2+2y-0.5625=0.$$

这个方程的根是 $y_1=0.25$ 和 $y_2=-2.25$. 返回到原来的未知数后，得出方程（*）和下列两个方程同解：

$$x^2+3x-0.25=0,\quad x^2+3x+2.25=0.$$

第一个方程有两个不同的根：$x=\dfrac{-3+\sqrt{10}}{2}$，$x=\dfrac{-3-\sqrt{10}}{2}$；第二个方程有一个二重根：$x=-\dfrac{3}{2}$.

答：$x=\dfrac{-3+\sqrt{10}}{2}$，$x=\dfrac{-3-\sqrt{10}}{2}$，$x=-\dfrac{3}{2}$.

【练 习 题】

求下列方程的根：

1.24. $(x+a)(x+2a)(x-3a)(x-4a)=b$.

1.25. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$.

1.26. $(6x+5)^2(3x+2)(x+1)=35$.

1.27. $x^4-2x^3+x-132=0$.

1.28. $(x-1)(x+1)(x+2)x=24$.

1.29. $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=19$.

1.30.* $(x^2+x+1)(2x^2+2x+3)=3(1-x-x^2)$.