高职高专数学系列教材

实用经济数学

——微积分

张唯春　刘汝臣　主编

东北大学出版社
·沈　阳·

前　　言

近几年，随着高职高专教学改革的不断深入，对经济数学的基本要求有了较大变化。为了符合专业培养目标，与“工学结合”培养模式相适应，满足经济类各专业对数学教学的具体要求，结合教学改革实际，我们编写了这本高职高专数学教材。

在编写过程中，充分考虑了经济类各专业的实用性特点和对数学知识的基本要求。用数学应用案例，引导学生学习新的数学方法，对经济管理中的问题进行分析，从而提高学生的数学思维能力和解决实际问题的能力。本教材力求做到内容精练，通俗易懂，易教易学，理论与实际相结合。

本教材供经管、物流以及相关各专业学生使用。本教材由张唯春、刘汝臣任主编，其中第一章至第三章由张唯春编写，第四章至第六章由刘汝臣编写。

编　者

2008 年 2 月

目　　录

第一章　函数与极限

函数是微积分研究的主要对象，而微积分中许多重要概念和运算都是以极限为基础建立起来的，因此，极限是学习微积分的理论基础. 本章将在复习函数有关知识的基础上，讨论函数的极限与函数的连续性.

第一节　函　数

一、函数的概念

在许多现象中，我们常常观察到一个变量依赖于另外一个或几个变量. 例如，某商品共有 1000 件，以单价 30 元销售，那么销售总收入、销售量都是变量，并且，总收入依赖于销售量，当销售量确定时，其总收入被确定；又如，公民交纳个人所得税的数额取决于他一个月的收入. 这种依赖关系，通常称为函数关系.

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，若当变量 x 在实数的某一范围 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照某个对应法则 f，有唯一确定的值与之对应，则称 y 为 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，$x\in D$. x 称为自变量，自变量的取值范围 D 称为函数的**定义域**，当 x 取遍 D 中的一切实数值时，与它对应的函数值的集合 M 称为函数的**值域**.

例 1.1　在上述的销售问题中，设 x 为销售量，R 为对应的总收入. 当 x 在$\{0, 1, 2, \cdots, 1000\}$中任取一个值时，按照单价 30 元的规定，总收入 $R(=30x)$总有一个确定的值和它对应，因此，R 是 x 的函数，即

$$R=f(x)=30x.$$

这里 f 表示对应法则，即 30 乘以 x. 此函数的定义域为

$$D=\{0, 1, 2, \cdots, 1000\}.$$

若对于 $x_0\in D$，y 有确定的值与之对应，则称函数 $f(x)$在 x_0 处有定义，$f(x)$在 x_0 处的函数值记为

$$y|_{x=x_0},\ f(x)|_{x=x_0}\text{或 } f(x_0).$$

对于同一个问题中的不同函数，应该采取不同的记号，如 $f(x)$，$\varphi(x)$，$F(x)$，$\Phi(x)$，等等.

例 1.2 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{|x+5|}$ 的定义域.

解 对于 $f(x)$，要求分子中的被开方式子非负，分母不为 0，即

$$\begin{cases}x^2-9\geqslant 0,\\ |x+5|\neq 0.\end{cases}$$

解此不等式组，得

$$\begin{cases}x\leqslant -3 \text{ 或 } x\geqslant 3,\\ x\neq -5.\end{cases}$$

所以函数的定义域为

$$D=(-\infty,\ -5)\cup(-5,\ -3]\cup[3,\ +\infty).$$

例 1.3 已知 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$，求定义域 D，函数值 $f(0)$，$f(-2)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(x+1)$.

解 要使表达式 $\dfrac{x+1}{x-1}$ 有意义，必须 $x-1\neq 0$，即 $x\neq 1$，所以 $f(x)$ 的定义域 $D=(-\infty,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$. 并且，有如下结果:

$$f(0)=\frac{0+1}{0-1}=-1, \qquad f(-2)=\frac{-2+1}{-2-1}=\frac{1}{3},$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\frac{1}{a}+1}{\frac{1}{a}-1}=\frac{1+a}{1-a}, \qquad f(x+1)=\frac{x+1+1}{x+1-1}=\frac{x+2}{x}.$$

定义域与对应法则是构成函数的两个基本要素. 因此，两个函数只有当它们的定义域和对应法则完全相同时，才能称它们是相同的函数，与用什么字母和符号表示自变量和因变量无关.

例 1.4 判断下列各对函数是否相同:

(1) $y=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $y=1$;

(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$.

解 (1) 它们的定义域和对应法则都相同，所以它们是相同的函数.

(2) 它们的定义域不同，所以它们是不同的函数.

注 常量 $y=C$ 也符合函数的定义，因为当 $x\in\mathbf{R}$ 时，所对应的 y 值都是确定的常数 C，此时也称其为常数函数.

二、函数的表示法

表示函数通常用解析法、表格法和图像法. 有时，我们会遇到一个函数在自变量不同的取值范围内用不同的式子来表示.

例如：函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

是定义在区间$(-\infty, +\infty)$内的一个函数．当$x\geqslant 0$时，$f(x)=\sqrt{x}$；当$x<0$时，$f(x)=-x$．它的图像如图1-1所示．像这样，在不同的区间内用不同的式子来表示的函数称为**分段函数**．

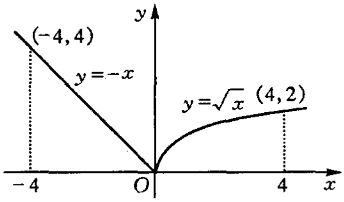

图 1-1

求分段函数的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表达式中进行计算．

例如，在上面的分段函数中，

$$f(4)=\sqrt{4}=2,\quad f(-4)=-(-4)=4.$$

例 1.5　乘坐火车由北京去上海，按铁路部门的规定，成年人每人携带的行李质量在20kg内免费，若超重部分在5kg之内，收行李费12元；若超重部分在5～50kg时，收行李费120元．以q(单位：kg)表示成年人一人携带的行李质量，R(单位：元) 表示所收行李费，则有

$$R=\begin{cases}0, & 0\leqslant q<20,\\ 12, & 20\leqslant q<25,\\ 120, & 25\leqslant q<70.\end{cases}$$

三、初等函数

1．反函数

定义 1.2　设函数$y=f(x)$，其定义域为D，值域为M，如果对于$\forall y\in M$，在D中都有唯一确定的x值$(x\in D)$与之对应，那么，由此所确定的以y为自变量的函数$x=\varphi(y)$(或$x=f^{-1}(y)$)称做函数$y=f(x)$的**反函数**，它的定义域为M，值域为D．

习惯上，我们总是以x表示函数的自变量，用y表示函数的自变量，所以通常把反函数表示为$y=f^{-1}(x)$．函数$y=f(x)$的图像与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图像关于直线$y=x$对称．

例 1.6　求$y=2x-1$的反函数．

解　由$y=2x-1$，得$x=\dfrac{y+1}{2}$，再将式中的x与y互换，得$y=\dfrac{x+1}{2}$，这就是$y=2x-1$的反函数．

并不是所有的函数都有反函数，但单调函数的反函数总是存在的．

2．基本初等函数

下列函数称为基本初等函数．

(1) 幂函数　　$y=x^{\alpha}$　$(\alpha\in\mathbf{R})$；

(2) 指数函数　$y=a^x$　($a>0$ 且 $a\neq1$);

(3) 对数函数　$y=\log_a x$　($a>0$ 且 $a\neq1$);

(4) 三角函数　$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$;

(5) 反三角函数　$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$.

这些基本初等函数在初等数学中已作过详细介绍，在此不再赘述.

3. 复合函数

在现实生活中，很多函数关系是比较复杂的，两个变量间的函数关系，往往要通过一个或几个中间变量联系起来.

例如，商店销售商品的利润 y 是销售收入 u 的函数，而销售收入 u 又是销售量 x 的函数，从而，对每一个 x，通过 u 总有确定的 y 与之对应，我们称 y 是 x 的复合函数.

定义 1.3　设 $y=f(u)$，而 $u=\varphi(x)$，若 $\varphi(x)$的函数值全部或部分在 $f(u)$的定义域内，此时，y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们称此函数为由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**，记为

$$y=f(\varphi(x)),$$

u 称为**中间变量**.

例如，$y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成的复合函数，定义域 $D=(-\infty, +\infty)$，D 也是 $u=\varphi(x)=\sin x$ 的定义域.

又如，$y=\sqrt{1-x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$和 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数，它的定义域$[-1, 1]$是 $u=1-x^2$ 的定义域$(-\infty, +\infty)$的子集.

再如，$y=\arcsin u$ 的定义域$D=[-1, 1]$，$u=x^2+2$ 的值域为$[2, +\infty)$，从而对于 $u=x^2+2$ 定义域中的任意一个 x 值，按 $u=x^2+2$ 所得的 u 值，均不属于$[-1, 1]$ 范围内. 于是由 $y=\arcsin u$ 得不到 y 值，所以不能构成复合函数.

复合函数也可由多个函数进行有限次复合而成. 例如，$y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x$ 可构成复合函数 $y=\sin\sqrt{1-x}$，这里 u，v 都是中间变量.

例 1.7　下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=\sqrt{1-2x^2}$;　　(2) $y=\lg\sin x^2$;

(3) $y=3^{\lg 2x}$;　　(4) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$.

解　(1) $y=\sqrt{1-2x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-2x^2$ 复合而成;

(2) $y=\lg\sin x^2$ 是由 $y=\lg u$，$u=\sin v$，$v=x^2$ 复合而成;

(3) $y=3^{\lg 2x}$是由 $y=3^u$，$u=\lg v$，$v=2x$ 复合而成;

(4) $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$是由 $y=\arccos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=1-x^2$ 复合而成.

4. 初等函数

定义 1.4　由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算所构成，并能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

例如，$y=(3x^2+1)^3$，$y=\sin 2x+\dfrac{1}{x}$等都是初等函数.

根据定义可知，分段函数不是初等函数. 例如

$$y=\begin{cases}3^x, & x\geqslant 0,\\ x^2, & x<0,\end{cases}\quad y=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

等等，都不是初等函数.

习题 1-1

1. 已知 $f(x)=ax+b$，且 $f(0)=-2$，$f(3)=5$，求 a 和 b.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{3x+4}$；　(2) $y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$；　(3) $y=\sqrt{1-|x|}$；

(4) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；　(5) $y=\sqrt{2+x}+\dfrac{1}{\lg(1+x)}$；

(6) $y=\arccos\sqrt{2x}$；　(7) $y=\dfrac{x}{\tan x}$.

3. 设 $f(x)=\arcsin x$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$f(1)$.

4. 设 $G(x)=\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{x}{2}$，求 $G(0)$，$G(1)$，$G(\sqrt{2})$，$G(-\sqrt{3})$，$G(-2)$.

5. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(x^3)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$\dfrac{1}{f(x)}$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 2x, & 0\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ 2(1-x), & \dfrac{1}{2}\leqslant x<1,\\ 0, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 作出它的图像，并求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$f\left(\dfrac{3}{4}\right)$，$f(2)$的值.

7. 求下列函数的反函数，并写出反函数的定义域.

(1) $y=x^2-2x\quad(x>1)$；　(2) $y=10^{x+1}$；

(3) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；　(4) $y=\sin x\left(\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}\pi\right)$；

(5) $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$.

8. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$；　(2) $y=5^{\arctan x}$；
(3) $y=\cos(x^2-x)$；　(4) $y=\cos^2(3x+1)$；
(5) $y=\ln\sqrt{1+x}$；　(6) $y=\arcsin(1-x^2)$；
(7) $y=\lg(1+\sqrt{1-x^2})$.

9. 将 y 表示为 x 的函数.

(1) $y=\sqrt{u}$, $u=2+v^2$, $v=\sin x$；

(2) $y=u^2$, $u=\dfrac{1}{v^2}$, $v=\dfrac{1}{x}$.

第二节　函数的极限

一、函数的极限

对于给定的函数 $y=f(x)$，因变量 y 随着自变量 x 的变化而变化．若当自变量 x 无限接近于某个“目标”(一个数 x_0，或 $+\infty$，或 $-\infty$)时，因变量 y 无限接近于一个确定的常数 A，则称函数 $f(x)$ 以 A 为极限.

设 x 为自变量，如果 $x>0$，且 x 所取的值无限增大，x 的这种变化过程记为 $x\to+\infty$，读作“x 趋向正无穷大”；如果 $x<0$，且 x 所取的值使 $|x|$ 无限增大，x 的这种变化过程记为 $x\to-\infty$，读作“x 趋向负无穷大”；如果 x 所取的值使 $|x|$ 无限增大，x 的这种变化过程记为 $x\to\infty$，读作“x 趋向无穷大”．显然，$x\to\infty$ 包含 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 这两种变化过程.

如果 x 的变化过程是趋向某一常数 x_0，则记为 $x\to x_0$；如果 x 是从 x_0 的左侧(从小于 x_0 的方向)趋向 x_0，则记为 $x\to x_0^-$；如果 x 是从 x_0 的右侧(从大于 x_0 的方向)趋向 x_0，则记为 $x\to x_0^+$．当 $x\to x_0$ 时，它包含了 $x\to x_0^-$ 及 $x\to x_0^+$ 这两种变化过程.

1. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

例 1.8　函数 $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 的定义域为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$(见图 1-2)．考察当 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时这个函数的变化趋势.

从图 1-2 中可以看出，当 x 无限接近于 $\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限接近于 2．这时称 2 为 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时函数 $f(x)=\dfrac{4x^2-1}{2x-1}$ 的极限.

例 1.9　函数 $g(x)=-x^2+1$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$(见图 1-3)．考察当 $x\to\dfrac{1}{2}$ 时函数 $g(x)$ 的变化趋势.

从图 1-3 中可以看出，当 x 无限接近于$\frac{1}{2}$时，函数 $g(x)$的值无限接近于$\frac{3}{4}$. 这时称$\frac{3}{4}$为 $x\to\frac{1}{2}$时函数 $g(x)=-x^2+1$ 的极限.

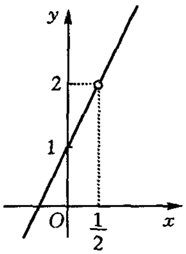

图 1-2

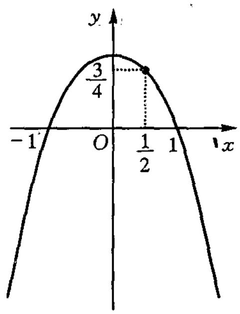

图 1-3

上面两例都考察了 $x\to\frac{1}{2}$时函数的变化情况. 例 1.8 中函数 $f(x)$在$x=\frac{1}{2}$时没有定义，例 1.9 中函数 $g(x)$在$x=\frac{1}{2}$处有定义. 由此可见，函数 $f(x)$在 $x=x_0$ 处极限存在与否，与函数在 $x=x_0$ 处是否有定义无关.

为了叙述方便，我们将开区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$称为以 x_0 为中心，$(\delta>0)$为半径的**邻域**，记为 $U(x_0,\ \delta)$；将开区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$且 $x\neq x_0$ 称为以 x_0 为中心，$(\delta>0)$为半径的**去心邻域**，记为 $U(\hat{x}_0,\ \delta)$.

定义 1.5　设函数 $f(x)$在 x_0 的某一个去心邻域内有定义，当 $x\to x_0$ 时，如果函数 $f(x)$的值无限接近于某一个确定的常数 A，则称 A 为$x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的**极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

例 1.10　在单位圆上观察$\lim\limits_{x\to 0}\sin x$ 和$\lim\limits_{x\to 0}\cos x$ 的值.

解　作单位圆，并取$\angle AOB=x$(图 1-4)，则

$$\sin x=BA,\ \cos x=OB.$$

当 $x\to 0$ 时，$BA\to 0$，$OB\to 1$，所以

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0,\quad \lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

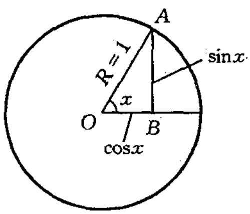

图 1-4

上面我们讨论了当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限，这里 x 是以任意方式趋向x_0 的. 但有时只能或只需考虑 x 仅从x_0 左侧趋向 $x_0(x\to x_0^-)$的情况，或 x 仅从x_0 的右侧趋向 $x_0(x\to x_0^+)$的情况.

定义 1.6 如果当 $x \to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**左极限**，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$；

如果当 $x \to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**右极限**，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

左极限、右极限统称为**单侧极限**.

对于极限和单侧极限的关系，有下面的定理.

定理 1.1 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 成立的充分必要条件是

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

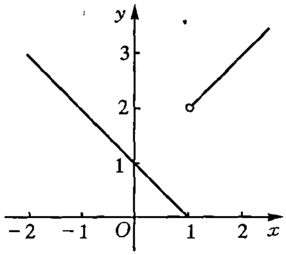

图 1-5

例 1.11 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leqslant 1, \\ 1 + x, & x > 1 \end{cases}$ 当 $x \to 1$ 时的极限.

解 如图 1-5 所示，函数在 $x = 1$ 处的左、右极限分别为

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (1 - x) = 0,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (1 + x) = 2.$$

即函数在 $x = 1$ 处的左，右极限都存在，但不相等，由定理 1.1 知 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 不存在.

2. 当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

下面先看一个具体的例子.

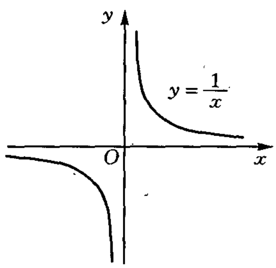

图 1-6

例 1.12 函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 的图形如图 1-6 所示，从图中可以看出：

当 $x \to \infty$ 时，曲线与 $y = 0$(x 轴)无限接近，也就是说，当 $x \to \infty$ 时，对应的函数值 $y = \dfrac{1}{x}$ 无限接近于 0.

这时我们称 0 为函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的极限.

定义 1.7 设函数 $y = f(x)$ 在 $|x| > \delta(\delta > 0)$ 时有定义，当 $x \to \infty$ 时，如果函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A \quad (x \to \infty).$$

例 1.13 考察函数 $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5}{x^2 + 1}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化情况.

解 因为 $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5}{x^2 + 1} = 2 + \dfrac{3}{x^2 + 1}$，所以当 $x \to \infty$ 时，对应的函数值

$f(x)=2+\dfrac{3}{x^2+1}$无限接近于常数 2，故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{x^2+1}=2.$$

有时对某些函数，我们仅考虑当 $x\to+\infty$或 $x\to-\infty$时函数 $f(x)$的极限.

定义 1.8　设函数 $y=f(x)$在$(\delta,+\infty)$内有定义，当 $x\to+\infty$时，如果对应的函数值 $f(x)$无限接近于某一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数$f(x)$当 $x\to+\infty$时的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A(\text{或 } x\to+\infty\text{时，} f(x)\to A).$$

类似地，若函数 $y=f(x)$在$(-\infty,\delta)$内有定义，当 $x\to-\infty$时，如果对应的函数值 $f(x)$无限接近于某一个确定的常数 A，则称常数 A 为函数$f(x)$当 $x\to-\infty$时的极限，记为

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A(\text{或 } x\to-\infty\text{时，} f(x)\to A).$$

例 1.14　求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

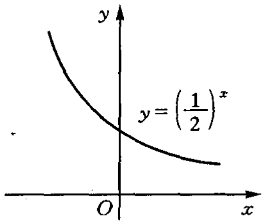

图 1-7

解　(1) 从图 1-7 可看出，当 $x\to+\infty$时，曲线与 $y=0$(x 轴)无限接近，即当 $x\to+\infty$时，对应的函数值无限接近于 0，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$.

(2) 从图 1-8 可看出，当 $x\to+\infty$时，$y=\arctan x$ 无限接近于$\dfrac{\pi}{2}$；当 $x\to-\infty$时，$y=\arctan x$ 无限接近于 $-\dfrac{\pi}{2}$. 当 $x\to\infty$时，$y=\arctan x$ 不接近于某一个确定的常数，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

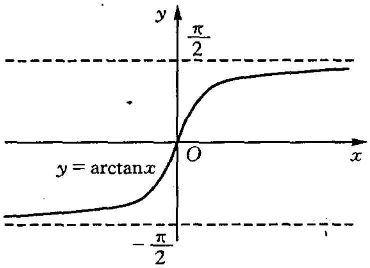

图 1-8

定理 1.2　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

二、数列的极限

定义 1.9　定义域为正整数集的函数 $y_n=f(n)$称为**整标函数**. 当自变量 n 按正整数 1，2，…，n，…依次增大顺序取值时，函数值按相应的顺序排成一串数

$$f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(n),\ \cdots,$$

称为**无穷数列**，记为$\{f(n)\}$．数列中的每一个数称为数列的项，第 n 项$f(n)$称为数列的通项..

例如：

$$0,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots,\ 1+(-1)^n\frac{1}{n},\ \cdots,$$

$$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ 1+\frac{1}{n},\ \cdots,$$

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n+1},\ \cdots,$$

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$$

都是数列，它们的通项依次为 $1+(-1)^n\frac{1}{n}$，$1+\frac{1}{n}$，$(-1)^{n+1}$，$\frac{1}{2^n}$.

由于数列是整标函数，取横轴表示整标 n，纵轴表示数列，即

$$y_n=f(n).$$

在直角坐标系中我们可用点列

$$(1,\ f(1)),\ (2,\ f(2)),\ (3,\ f(3)),\ \cdots,\ (n,\ f(n)),\ \cdots$$

来表示数列$\{f(n)\}$．由此，我们可将数列$\{f(n)\}$当 $n\to\infty$时的极限看成是函数当 $x\to\infty$时极限的特例.

一般地，有如下定义.

定义 1.10 设数列$\{f(n)\}$，如果当 $n\to\infty$时，对应的值 $f(n)$无限接近于某一个确定的常数 A，则称该常数 A 是数列$\{f(n)\}$的**极限**，或者称数列$\{f(n)\}$**收敛**于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=A\ （或\ n\to\infty 时，\ f(n)\to A）.$$

如果数列没有极限，就称该数列是**发散**的或极限不存在.

习题 1-2

1．写出下列数列的一般项.

(1) $\frac{1}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{7},\ \frac{7}{9},\ \cdots$;

(2) $0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \cdots$;

(3) $0,\ \frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{8},\ \cdots$.

2．观察下列数列是否有极限，若有极限，请指出其极限值.

(1) $f(n)=\frac{(-1)^n}{n}$;　　(2) $f(n)=2+\frac{1}{n^2}$;

(3) $f(n)=\frac{3^n+(-1)^n}{2^n}$;　　(4) $f(n)=(-1)^n n$.

3. 下列极限是否存在？若存在，求出其极限值；若不存在，说明理由.

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x+1)$　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$.

4. 求函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0, \\ x, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左、右极限，并说明 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 时极限是否存在.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & x\leqslant 0, \\ x^2+1, & 0<x\leqslant 1, \\ \dfrac{2}{x}, & x>1, \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

第三节　无穷小量与无穷大量

一、无穷小量的概念

1. 无穷小的定义

在 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）的变化过程中，$f(x)$ 有两种特殊的变化情况，一种是 $f(x)\to 0$，另一种是 $|f(x)|$ 无限增大. 下面讨论这两种情况.

定义 1.11　如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，所以函数 $y=x-1$ 当 $x\to 1$ 时为无穷小.

又如，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小.

应当注意，无穷小量是一个以 0 为极限的变量，而不是一个绝对值很小的数，并且无穷小量还与变量 x 的变化过程有关.

2. 无穷小的性质

性质 1.1　有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量.

性质 1.2　有界函数与无穷小量的积仍为无穷小量.

性质 1.3　有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量.

例 1.15　求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解　因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界函数，又 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$，即 $y=x$ 在 $x\to 0$ 时为无穷小. 所以由性质 1.2 得 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时为无穷小，即

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.$$

例 1.16 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x$.

因为 $|\sin x|\leqslant 1$，所以，$y=\sin x$ 是有界函数，而 $x\to\infty$ 时，$y=\frac{1}{x}$ 是无穷小，所以，由性质 1.2 得 $y=\frac{1}{x}\sin x$ 在 $x\to\infty$ 时为无穷小，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

3. 函数、极限与无穷小的关系

定理 1.3 设函数 $y=f(x)$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷小.

例如，对于 $f(x)=\frac{2x^2+5}{x^2+1}$，可知 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5}{x^2+1}=2$.

由于 $\frac{2x^2+5}{x^2+1}=2+\frac{3}{x^2+1}$，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+1}=0$，于是 $y=\frac{3}{x^2+1}$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小，所以当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 是 2 与无穷小量 $\frac{3}{x^2+1}$ 之和.

二、无穷大量的概念

1. 无穷大的定义

定义 1.12 如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的值的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为**无穷大量**，简称**无穷大**. 记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty.$$

例如，函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}$，当 $x\to 1$ 时，$f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|=\frac{1}{|x-1|}$ 无限地增大，所以 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 当 $x\to 1$ 时为无穷大，即 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty$.

与无穷小量类似，无穷大量也是一个变量，而不是一个绝对值很大的数，且与自变量的变化过程有关. 符号 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$ 只是一种记号，可以认为极限为 ∞. 但事实上，$x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，$f(x)$ 的极限不存在.

如果在无穷大的定义中，将 $|f(x)|$ 换成 $f(x)$(或 $-f(x)$)，就记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=+\infty\left(\text{或}\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=-\infty\right).$$

例如，函数 $y=2^x$，当 $x\to+\infty$ 时，对应的函数值 2^x 无限地增大，则 $y=2^x$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷大，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=+\infty$. 再如，函数 $y=\lg x$，当 $x\to0^+$ 时，对应的函数值使 $-\lg x$ 无限地增大，则 $y=\lg x$ 当 $x\to0^+$ 时为无穷大量，即 $\lim\limits_{x\to0^+}\lg x=-\infty$.

2. 无穷小量与无穷大量的关系

定理 1.4　当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时，如果 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小量，且 $f(x)\neq0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

例 1.17　计算 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1-x^2}$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to1}(1-x^2)=0$，即函数 $y=1-x^2$ 在 $x\to1$ 时为无穷小，由定理 1.4 得

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{1-x^2}=\infty.$$

习题 1-3

1. 下列函数对于给定的 x 的趋向，哪些是无穷小量？哪些是无穷大量？

(1) $f(x)=x^2+0.9x$，当 $x\to0$ 时；

(2) $f(x)=\cot x$，当 $x\to0$ 时；

(3) $f(n)=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2^n}$，当 $n\to\infty$ 时；

(4) $f(x)=\dfrac{1+2x}{x-1}$，当 $x\to1$ 时.

2. 下列函数 $f(x)$ 在 x 趋向何值时是无穷小量？在趋向何值时是无穷大量？

(1) $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$；　(2) $f(x)=\tan x$；

(3) $f(x)=\dfrac{2x+2}{x^2}$；　(4) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$.

3. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\arctan x$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-1}$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$.