江苏省高等学校评优精品教材

主编◎邓 光

数学应用技术

Mathematics

下册

河海大学出版社

江苏省高等学校评优精品教材

主　编◎邓　光
副主编◎刘桂香　刘长太　徐　静

数学应用技术

Mathematics

下册

河海大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学应用技术 / 邓光主编. 一南京：河海大学出版社，2007.9

ISBN 978-7-5630-2407-0

Ⅰ.数... Ⅱ.邓... Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 137164 号

书　　　名 / **数学应用技术(下)**
书　　　号 / ISBN 978-7-5630-2407-0/O·140
著作责任人 / 邓　光
策　　　划 / 吴志雄
责 任 编 辑 / 铁　路
责 任 校 对 / 张　强
封 面 设 计 / 杭永鸿
出 版 发 行 / 河海大学出版社
地　　　址 / 南京市西康路1号(邮编:210098)
电　　　话 / (025)83787600(编辑部)　(025)83737852(传真)
经　　　销 / 江苏省新华书店
印　　　刷 / 丹阳市兴华印刷厂
开　　　本 / 787毫米×960毫米　1/16
印　　　张 / 14.5
字　　　数 / 276千字
版　　　次 / 2007年9月第1版
印　　　次 / 2007年9月第1次印刷
定　　　价 / 34.00元(上下两册)

目　　录

下册　应用篇

哪里有数，哪里就有美.

——**普洛克拉斯**

第五章　向量代数与空间解析几何

第一节　空间直角坐标系

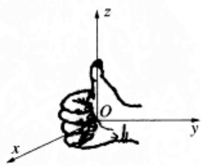
- 空间直角坐标系
- 空间点的坐标
- 空间两点间的距离

概述　我们在系统地学习向量代数与空间解析几何之前，先学习空间直角坐标系的有关概念，为后面的学习做好充分准备.

5.1.1　空间直角坐标系

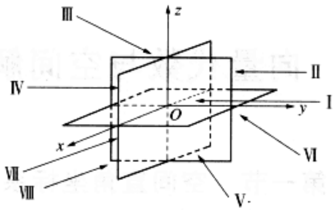
要将空间图形与数结合起来研究，我们就必须建立空间直角坐标系. 建立一个空间直角坐标系的具体方法是：

在空间任选一点 O，同时过点 O 作三条两两垂直的数轴，且三个数轴都以点 O 作为原点，单位长度也一致. 我们把这三个数轴依次设为 x 轴，y 轴和 z 轴，称它们为空间直角坐标系的**坐标轴**. 在确定三个坐标轴的正方向时，三个正方向还必须满足**右手法则**. 所谓右手法则，就是把 x 轴与 y 轴放置在水平面上，这样一来，z 轴就是竖直线. 在选择 z 轴的正方向时，我们以右手紧紧握住 z 轴，同时让右手的四指从 x 轴的正方向以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向 y 轴正方向. 这时候，大拇指所指的方向就为 z 轴正方向.



进一步讨论空间直角坐标系的相关的概念. 我们把空间直角坐标系的三个数轴的原点 O 称为坐标系的**原点**；x 轴，y 轴和 z 轴三个数轴称为坐标系的三个**坐标轴**；x 轴和 y 轴所确定的平面称为 xOy 面；y 轴和 z 轴所确定的平面称为 yOz 面；x 轴和 z 轴所确定的平面称为 xOz 面；xOy 面，yOz 面和 xOz 面称为坐标系的三个**坐标面**；三个坐标面分整个空间为八个部分，我们把每一部分叫做一个**卦限**；含有 x 轴，y 轴和 z 轴的正半轴所在的卦限称为第Ⅰ卦限，从第Ⅰ卦限开始按逆时针方向，先后出现的卦

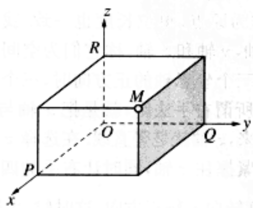
限依次称为第Ⅱ、第Ⅲ、第Ⅳ卦限；在第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限正下方的空间分别称为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限. 见下图.



空间直角坐标系

5.1.2 空间点的坐标

坐标系的最大特点就是坐标系中的每一点都有唯一的有序数组作为其坐标. 如何确定一点的坐标呢？假定 M 是空间的一点，过 M 点分别作出三个垂直于三个坐标轴的平面，这三个平面与三个坐标轴分别交于 P,Q 和 R 三点，这三个点在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标依次为 x，y 和 z，则 M 点就唯一地确定了一组有序数组 x，y 和 z. 反过来考虑，假定给定了一组有序数组 x，y 和 z，这样它们就分别与 x 轴，y 轴和 z 轴上的三点 P,Q 和 R 对应，然后我们过这三个点分别作出垂直于所在坐标轴的三个平面，则三个平面就交于唯一的点 M. 见下图.



通过这样的方法，我们就把空间的一点 M 与一组有序数组 x，y 和 z 之间建立了一一对应关系. 我们把有序数组 x，y 和 z 称为点 M 的坐标，记为 $M(x,y,z)$，同时我们分别称 x、y、z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

例 1 已知三点 $A(2,5,-3)$，$B(-4,-5,-2)$，$C(2,-5,-1)$，

(1) 确定这三点所在的卦限；

(2) 确定这三点与 yOz 面的对称点的坐标；

(3) 确定这三点与 z 轴的对称点的坐标；

(4) 确定这三点与原点的对称点的坐标.

解 (1) 点 $A(2,5,-3)$在第Ⅴ卦限;点 $B(-4,-5,-2)$在第Ⅶ卦限;点 $C(2,-5,-1)$在第Ⅷ卦限;

(2) 点 $A(2,5,-3)$与 yOz 面的对称点是 $A'(-2,5,3)$;

点 $B(-4,-5,-2)$与 yOz 面的对称点是 $B'(4,-5,-2)$;

点 $C(2,-5,-1)$与 yOz 面的对称点是 $C'(-2,-5,-1)$.

(3) 点 $A(2,5,-3)$与 z 轴的对称点是 $A''(-2,-5,-3)$;

点 $B(-4,-5,-2)$与 z 轴的对称点是 $B''(4,5,-2)$;

点 $C(2,-5,-1)$与 z 轴的对称点是 $C''(-2,5,-1)$.

(4) 点 $A(2,5,-3)$与原点的对称点是 $A'''(-2,-5,3)$;

点 $B(-4,-5,-2)$与原点的对称点是 $B'''(4,5,2)$;

点 $C(2,-5,-1)$与原点的对称点是 $C'''(-2,5,1)$.

5.1.2 空间两点间的距离

定理 1 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间直角坐标系中的两点,那么这两点之间的距离为:

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

显而易见,考虑 $M(x,y,z)$,$O(0,0,0)$两点间的距离,也就是说 O 是坐标系原点,那么它们两点间的距离为:

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

定理 2 设 $M_1(x,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间直角坐标系中的两点,线段 M_1M_2 的中点为 $M(x,y,z)$,那么:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}, \\ z=\dfrac{z_1+z_2}{2}. \end{cases}$$

例 2 已知三点 $E(-2,4,-8)$、$F(-4,0,-2)$和 $G(6,-2,2)$,

(1) 求三角形 EFG 的三条边的边长;

(2) A、B 两点分别是 EF、FG 的中点,求 AB 的长.

解

(1) $|EF|=\sqrt{(-4+2)^2+(0-4)^2+(-2+8)^2}=\sqrt{4+16+36}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}$;

$|FG|=\sqrt{(6+4)^2+(-2-0)^2+(2+2)^2}=\sqrt{100+4+16}=\sqrt{120}=2\sqrt{30}$;

$|GE|=\sqrt{(-2-6)^2+(4+2)^2+(-8-2)^2}=\sqrt{64+36+100}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}.$

(2) A、B 两点的坐标分别是 $A(-3,2,-5)$、$B(1,-1,0)$，则

$|AB|=\sqrt{(1+3)^2+(-1-2)^2+(0+5)^2}=\sqrt{16+9+25}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$

第二节 向 量

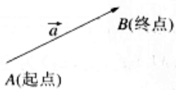
- 向量的概念
- 向量的坐标表示
- 向量的方向角与方向余弦
- 向量的加减运算

概述 在这一节中，我们学习向量的概念、向量的坐标表示、向量的方向角、方向余弦和向量的运算.

5.2.1 向量的概念

在许多应用性学科中，经常要讨论一种量，它既有大小，又有方向，我们把这样的量叫做**向量**.

在几何上，一般用一条有向线段表示向量. 以 A 为起点和 B 为终点的向量，记为 $\overrightarrow{AB}$. 见下图.



有时候我们表示向量会用一个粗体的字母表示，或者用一个上面加个小箭头的字母表示向量. 如 $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{e}$ 或 $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{e}$ 等等.

向量 $\overrightarrow{AB}$ 既有大小，又有方向，它的大小就叫做是向量的**模**，记为 $|\overrightarrow{AB}|$. 我们把模等于 1 的向量叫做**单位向量**，而模等于零的向量为**零向量**，零向量记为 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的方向可以看作任意的.

如果两个向量的模相等，同时方向也相同，则我们称这两个向量**相等**. 这样一来，向量就可以平行移动到任意位置，而且与原来的向量是相等的. 具有这样性质的向量我们称为**自由向量**.

5.2.2 向量的坐标表示

在空间直角坐标系中，我们可以用坐标表示向量，用来表示向量的坐标就叫做**向量的坐标**.

设向量的起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 表示成：

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

定理 1 设向量的起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的长度是：

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

例 1 已知三点 $A(-1,3,-2)$，$B(-5,2,-1)$，$C(0,3,-2)$，求

(1) $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的坐标；

(2) $|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{AB}|$.

解 (1) $\overrightarrow{AB}=\{-5+1,2-3,-1+2\}=\{-4,-1,1\}$；

$\overrightarrow{CB}=\{-5-0,2-3,-1+2\}=\{-5,-1,1\}$；

$\overrightarrow{AC}=\{0+1,3-3,-2+2\}=\{1,0,0\}$.

(2) $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$；$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2+1^2}=3\sqrt{2}$；

$|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{AB}|=1+3\sqrt{2}$.

用坐标表示向量，为数与形的结合提供了条件. 零向量的坐标是 $\{0,0,0\}$，而 x 轴、y 轴和 z 轴正向上的单位向量的坐标分别是 $\{1,0,0\}$，$\{0,1,0\}$ 和 $\{0,0,1\}$. 在这里，我们需要进一步说明的是：这三个单位向量是非常重要的，我们称为**基本单位向量**，用 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 或 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示.

5.2.3 向量的方向角与方向余弦

我们知道零向量的方向是任意的. 怎样确定非零向量的方向呢？我们用方向角来确定. 对于非零向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，它与 x 轴，y 轴和 z 轴的正方向间的夹角分别为 α、β、γ $(0\leqslant\alpha、\beta、\gamma\leqslant\pi)$，$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 就叫做向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的**方向角**. 为了确定方向角，我们称 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为方向余弦.

定理 2 设向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x,y,z\}$，则

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x}{|\overrightarrow{M_1M_2}|},\\[2ex]\cos\beta=\dfrac{y}{|\overrightarrow{M_1M_2}|},\\[2ex]\cos\gamma=\dfrac{z}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}.\end{cases}$$

例 2 已知两点 $A(4,4,0)$，$B(2,6,-2\sqrt{2})$，求

(1) $\overrightarrow{AB}$ 的长度；

(2) $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦和方向角.

解 (1) $\overrightarrow{AB}=\{2-4,6-4,-2\sqrt{2}-0\}=\{-2,2,-2\sqrt{2}\}$；

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(2\sqrt{2})^2}=4.$$

(2) $\cos\alpha=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$，$\cos\gamma=\dfrac{-2\sqrt{2}}{4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{3}{4}\pi.$$

5.2.4 向量的加减运算

向量的运算与数的运算是大相径庭的，我们给出下面的定义：

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{x_1,y_1,z_1\}$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则向量 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$，$\gamma\boldsymbol{\alpha}$ 分别由下面的式子确定：

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\{x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\};$$
$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\{x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2\};$$
$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\{\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1\}(\lambda\text{ 为常数}).$$

例 3 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{1,-2,5\}$，向量 $\boldsymbol{\beta}=\{6,-7,2\}$，计算 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}$.

解 $2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\{8,-11,12\}$，

$\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}=\{-11,12,1\}$.

根据向量的加减运算的规则，我们有：

定理 3 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{x,y,z\}$，则 $\boldsymbol{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

第三节 向量的数量积与向量积

- 向量的数量积
- 向量的向量积
- 向量的夹角
- 向量的平行与垂直

概述 在这一节中，我们进一步学习向量的运算——向量的数量积与向量积. 在此基础上，我们将讨论向量的夹角和向量的平行与垂直关系.

5.3.1 向量的数量积

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{x_1,y_1,z_1\}$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则这两个向量的**数量积**我们记为 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$，它是一个数：

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

例 1 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{1,-2,5\}$，向量 $\boldsymbol{\beta}=\{6,-7,2\}$，求 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$.

解 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=1\times6+(-2)\times(-7)+5\times2=30.$

5.3.2 向量的向量积

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{x_1,y_1,z_1\}$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}=\{x_2,y_2,z_2\}$，则这两个向量的**向量积**我们记为 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$，它是一个向量：

$$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\{y_1z_2-y_2z_1,z_1x_2-z_2x_1,x_1y_2-x_2y_1\}.$$

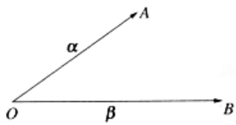
例 2 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{1,-2,5\}$，向量 $\boldsymbol{\beta}=\{6,-7,2\}$，求 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$.

解 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\{(-2)\times2-(-7)\times5,5\times6-2\times1,1\times(-7)-6\times(-2)\}.$

$=\{31,28,5\}.$

5.3.3 向量的夹角

由于我们讨论的向量是自由向量，所以我们讨论向量的夹角时，可以假定它们具有相同的起点. 见下图：



我们规定不超过 π 的角($\angle AOB$)表示向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角，记为$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$或$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$. 但是当向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 中有零向量时，我们规定它们夹角可以是 0 与 π 之间的任意值.

定理 1 设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，则

$$\cos(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}.$$

例 3 已知三点 $A(2,2,2)$，$B(3,3,2)$，$C(3,2,3)$，求$\angle BAC$.

解 因为$\overrightarrow{AB}=\{1,1,0\}$，$\overrightarrow{AC}=\{1,0,1\}$，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1,$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2},|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2},$$

所以

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2},$$

从而

$$\angle BAC=\frac{\pi}{3}.$$

5.3.4 向量的平行与垂直

如果非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\frac{\pi}{2}$，我们称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 垂直；向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角

$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$ 或 π，我们称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 平行. 关于向量的平行与垂直，我们有下面的定理：

定理 2 非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 垂直，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$.

定理 3 非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 平行，当且仅当 $|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=0$；非零向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{x_1,y_1,z_1\}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=\{x_2,y_2,z_2\}$ 平行，当且仅当 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

例 4 (1) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{1,1,-3\}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=\{2,2,k\}$ 平行，求常数 k；

(2) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{1,1,-3\}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=\{2,2,k\}$ 垂直，求常数 k.

解 (1) 因为 $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{-3}{k}$，所以 $k=-6$；

(2) 因为 $1\times2+1\times2-3k=0$，所以 $k=\frac{4}{3}$.

第四节 空间平面方程

- 空间平面的方程
- 空间平面的点法式方程
- 空间平面的一般方程
- 空间两平面的夹角

概述 在这一节中，我们学习空间平面方程. 在此基础上，我们讨论空间两平面的夹角以及空间两平面的平行与垂直关系.

5.4.1 空间平面方程

如果某一平面 π 与某一方程 $F(x,y,z)=0$ 满足下面的关系，则我们把方程 $F(x,y,z)=0$ 叫做平面 π 的方程，而平面 π 叫做方程 $F(x,y,z)=0$ 的平面.

(1) 满足方程 $F(x,y,z)=0$ 的点在平面 π 上；

(2) 在平面 π 上点的坐标满足方程 $F(x,y,z)=0$.

例 1 已知平面 π 的方程是 $14x+9y-z=15$，判定下面的点是否在平面 π 上.

(1) $A(2,-1,4)$；(2) $B(-3,-1,2)$；(3) $C(-1,3,-2)$.

解 (1) 因为 $14\times2+9\times(-1)-4=15$， 所以点 $A(2,-1,4)$ 在平面 π 上；

(2) 因为 $14\times(-3)+9\times(-1)+2\neq15$，所以点 $B(-3,-1,2)$ 不在平面 π 上；

(3) 因为 $14\times(-1)+9\times3-(-2)=15$，所以点 $C(-1,3,-2)$ 在平面 π 上.

5.4.2 平面的点法式方程

如果向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 所在的直线与平面 π 垂直，我们称向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 是平面 π 的**法向量**.

定理 1 平面 π 经过点 $M(x_0,y_0,z_0)$，而且向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{A,B,C\}$ 是平面 π 的法

向量，则平面 π 的方程是：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

我们称 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 为平面 π 的点法式方程.

例 2 求过点(1,1,2)，法向量为$\{-3,4,8\}$的平面 π 的方程.

解 根据平面的点法式方程，得：

$$-3(x-1)+4(y-1)+8(z-2)=0,$$

即 $-3x+4y+8z-17=0.$

5.4.3 平面的一般方程

我们把平面 π 的点法式方程展开，可以化简得：

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

其中 A,B,C 不同时为零. 这时候我们称 $Ax+By+Cz+D=0$ 为平面 π 的一般方程.

例 3 求过点$(1,1,-3)$、$(2,-1,-6)$和点$(-1,3,-1)$的平面 π 的方程.

解 设方程为 $Ax+By+Cz+D=0$

由题意得 $\begin{cases} A+B-3C+D=0, \\ 2A-B-6C+D=0, \\ -A+3B-C+D=0, \end{cases}$

解方程，得 $A=1,B=2,C=-1,D=-6$，

所以，平面 π 的方程为 $x+2y-z-6=0$.

5.4.4 两个平面的夹角

我们把两平面的法向量的夹角称为平面的夹角.

定理 2 设平面 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和平面 π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则平面 π_1,π_2 的夹角 θ 由下式确定：

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

例 4 求平面 $2x+y+z=3$ 与平面 $x-y+2z=9$ 的夹角.

解 $\cos\theta=\frac{|2\times1+1\times(-1)+1\times2|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，

由此 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

定理 3 设平面 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和平面 π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，

则(1) $\pi_1\perp\pi_2$，当且仅当 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

(2) $\pi_1/\!/\pi_2$，当且仅当 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

例 5 已知平面过点 $P(1,1,1)$ 且与平面 $x+2z=3$ 和 $x+y+z=3$ 都垂直，求该平面的方程.

解 设所求平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，

因为 平面过点 $P(1,1,1)$，

所以 $A+B+C+D=0$.

因为 所求平面与平面 $x+2z=3$ 和 $x+y+z=3$ 都垂直

所以 $A+2C=0, A+B+C=0$，

进而 $\begin{cases} A+B+C+D=0, \\ A+B+C=0, \\ A+2C=0, \end{cases}$

得 $A=-2, B=1, C=1$，

所以 所求平面方程为 $-2x+y+z=0$，

即 $2x-y-z=0$.

第五节 空间直线方程

- 空间直线方程
- 空间直线点向式方程
- 空间直线参数方程
- 空间直线的夹角

概述 在这一节中，我们学习空间直线方程. 在此基础上，我们将讨论直线的夹角.

5.5.1 空间直线方程

在空间中，如果直线 L 是两个平面 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 与 π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的交线，那么我们就称方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

是直线 L 的**一般方程**.

由于通过直线 L 的平面有无数个，这样我们在确定直线 L 的方程时，只要任选两个就可以表示直线 L 的方程.

5.5.2 直线的点向式方程和参数方程

如果直线 L 与某一非零向量平行，我们把该向量称为直线 L 的一个**方向向量**.

定理 1 设直线 L 过定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，直线的方向向量为 $\vec{s}=\{m,n,p\}$，则直线 L 的方程是：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

我们把定理 1 得到的直线方程叫做直线的**点向式方程**.

如果我们引入参数 t，即令：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

那么

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0+nt,\\z=z_0+pt.\end{cases}$$

这样我们就得到了直线 L 又一种形式的方程，我们称为直线的**参数方程**，其中 t 为参数.

例 1 化直线 L 的方程 $\begin{cases}x+2y+z+1=0,\\2x-2y+3z+4=0\end{cases}$ 为点向式、参数式.

解 求直线上一个点时，可在三个变量中适当地给定其中一个值，从而求出另外两个值.

例如，令 $z=0$，得 $\begin{cases}x+2y+1=0,\\2x-2y+4=0,\end{cases}$

解得：$x=-\frac{5}{3}$，$y=\frac{1}{3}$，所以得到直线 L 上的一个点 $A\left(-\frac{5}{3},\frac{1}{3},0\right)$.

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}$，又两平面的法线向量分别为 $\vec{n_1}=\{1,2,1\}$，$\vec{n_2}=\{2,-2,3\}$，因为 $\vec{s}\perp\vec{n_1}$，$\vec{s}\perp\vec{n_2}$ 所以 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$.

即 $\vec{s}=\{2\times3-1\times(-2),1\times2-1\times3,1\times(-2)-2\times2\}=\{8,-1,-6\}$.

所以直线 L 的点向式方程为 $\dfrac{x+\frac{5}{3}}{8}=\dfrac{y-\frac{1}{3}}{-1}=\dfrac{z}{-6}$，

直线 L 的参数式方程为 $\begin{cases}x=-\dfrac{5}{3}+8t,\\y=\dfrac{1}{3}-t,\\z=-6t.\end{cases}$

5.5.3 直线间的夹角

我们把两条直线的方向向量之间的夹角称为**直线的夹角**.

定理 2 设直线 L_1 的方程为：

$$L_1: \frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1},$$

直线 L_2 的方程为：

$$L_2: \frac{x-x_0}{m_2}=\frac{y-y_0}{n_2}=\frac{z-z_0}{p_2},$$

则两条直线的方向向量之间的夹角 θ 满足：

$$\cos\theta=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

例 2 已知直线 L_1 和 L_2 的方程分别是 L_1：$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{1}$ 和 L_2：$\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$，求直线 L_1 和直线 L_2 的夹角.

解 因为 $\cos\theta=\frac{|1\times2+(-4)\times(-2)+1\times(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{9}{9\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

定理 3 设直线 L_1 的方程为：

$$L_1: \frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1},$$

直线 L_2 的方程为：

$$L_2: \frac{x-x_0}{m_2}=\frac{y-y_0}{n_2}=\frac{z-z_0}{p_2},$$

则 (1) 两直线 L_1 和 L_2 垂直的充要条件是 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

(2) 两直线 L_1 和 L_2 平行的充要条件是 $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

例 3 求过点 $M(1,2,-5)$ 且与直线 $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4}$ 平行的直线方程.

解 所求直线方程为：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+5}{4}$.

例 4 求过点 $M(1,2,-5)$ 且与直线 L_1：$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4}$ 和直线 L_2：$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{3}$ 都垂直的直线方程.

解 设所求直线方程为：$\frac{x-1}{m}=\frac{y-2}{n}=\frac{z+5}{p}$,

因为所求直线与直线 L_1 和直线 L_2 都垂直，