



2009版

龚冬保教授数学考研

数学 考研

考点精讲 方法精练

数学三和数学四

主编 龚冬保



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

西安交通大学出版社考研图书网站 <http://kaoyan.xjtupress.com>

013

013/168=5

:2009(3)

2008

(2009 版)

数学考研 考点精讲方法精练

(数学三和数学四)

主编 龚冬保

编著 (高等教学) 龚冬保 王寿生 褚维盘
(线性代数) 崔荣泉
(概率统计) 周家良

西安交通大学出版社

· 西安 ·

内容提要

本书是专门针对考研复习编写的教材,内容严格按教育部制订的“数学考试大纲”编写。为了适应考生“复习”的特点,本书建立了与普通教材不同的体系;针对考研的特点,突出基本功和综合运用、应试能力的训练,对于数学知识,着重于分析问题和解决问题的能力,全面而有重点地覆盖了所有考点和解题方法。本书既可作“考研辅导班”的教材,也可用于考生自学,同时也可供就读本科的各专业的的大学生参考。

作者在网上为本书读者免费答疑,具体方法请登录 kaoyan.xjtupress.com

图书在版编目(CIP)数据

数学考研考点精讲方法精练. 数学. 3~4/龚冬保主编;王寿生等编.

—西安:西安交通大学出版社,2008.3

ISBN 978-7-5605-2171-8

I. 数… II. ①龚… ②王… III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 021809 号

书 名 数学考研考点精讲方法精练(数学三和数学四)
主 编 龚冬保
责任编辑 叶涛

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)

网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行部)
(029)82668315 82669096(总编办)

传 真 (029)82668280
印 刷 陕西元盛印务有限公司

开 本 787mm×1 092mm 1/16 印张 23.375 字数 720 千字
版次印次 2008 年 3 月第 3 版 2008 年 3 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-2171-8/O·233
定 价 37.80 元

读者购书、书店添货,如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82664954

读者信箱:jdjgy31@126.com

版权所有 侵权必究

2009 版前言

每年我们都要将本书与当年的考研试卷对比,无论是考点,还是解题方法,极其类似的题都不少.尤其我们书上介绍的一些特殊的方法,在解考研题时,效果更为显著,如用泰勒公式求极限的方法,解 2008 试卷中两道极限题,就非常简便.

例 1 (数学一、二). 求 $I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

解 由泰勒公式: $\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + o(\sin^3 x)$, 和等价无穷小 $x \sim \sin x (x \rightarrow 0)$, 可得

$$I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} \sin^3 x - o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

例 2 (数学三、四). 求 $I_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$.

解 $x \rightarrow 0$ 时 $\ln \frac{\sin x}{x} \sim \frac{\sin x - x}{x}$.

及由泰勒公式: $\sin x = x - \frac{1}{6} x^3 + o(x^3)$

$$\text{故 } I_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{6} x^3 + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

又如 2008 四份考卷共用的线性代数题,用我们书中介绍的方法解,也很简单.

例 3 (数学一、二、三、四) 设 n 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{bmatrix}$$

(1) 求证 $|A| = (n+1)a^n$;

(2) 方程组 $AX=B$ 有唯一解时,求解 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 其中 $B=(1, 0, \dots, 0)^T$;

(3) 何时方程组有无穷多解? 并求通解.

解 (1) 记 $|A| = D_n$. 按第一行展开得 $D_n = 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2}$.

$$\text{而 } n=2 \text{ 时 } D_2 = \begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2. \quad n=3 \text{ 时 } D_3 = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 \\ 0 & a^2 & 2a \end{vmatrix} = 4a^3.$$

由数学归纳法及上面递推公式即可证得 $D_n = |A| = (n+1)a^n$.

(2) $a \neq 0$ 有唯一解. 用克莱姆法则得

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{D_{n-1}}{D_n} = \frac{n}{(n+1)a}, \quad x_2 = -a^2 \frac{D_{n-2}}{D_n} = -\frac{n-1}{n+1}.$$

当 $k \geq 3$ 时, 方程是 $a^2 x_{k-2} + 2ax_{k-1} + x_k = 0$ 故

$$x_k = -a(2x_{k-1} + ax_{k-2}). \text{ 由归纳法得 } x_k = \frac{n-k+1}{n+1}(-1)^{k-1}a^{k-2}, \text{ 所求解是}$$

$$X = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{a}, -n-1, (n-2)a, \dots, (-1)^{n-1}a^{n-2} \right)^T.$$

$$(3) \text{ 当 } a=0 \text{ 时, 方程组化为: } \begin{cases} x_2=1 \\ x_3=x_4=\dots=x_n=0 \end{cases}$$

故所求通解为 $X = (0, 1, 0, \dots, 0)^T + k(1, 0, 0, \dots, 0)^T$.

细心的读者可以发现, 几乎每道试题的解题方法在我们书上都有.

由于本书紧扣考试大纲, 并注意分析了历年考试真题, 因此在考点上, 覆盖面全, 其中 2008 年所考到的微积分基本定理及周期函数的积分性质的题, 在我们书上均有详细的证明. 所以, 本书是针对性很强的辅导考研的自学课本.

自 2005 年起, 我们在网上义务答疑, 为考研学子释疑解难, 受到了读者的欢迎. 今年我们一如既往, 继续在网上为同学们解答在使用我们所编辅导时遇到的问题.

本书自出版以来, 受到广大读者关爱, 使编者在每年考研之后, 能与不少读者分享成功的喜悦, 感到莫大的欣慰, 在此表示由衷地感谢!

编 者

2008 之春于西安交大

第 1 版前言

目前考研的数学辅导书很多,却没有一本专门指导考研复习使用的教材,广大考生很希望有这样的教材。为此,我们尝试编写了本教材,以帮助考生能按教育部制订的研究生入学考试的《数学考试大纲》,全面系统地、有重点地、高效率地复习数学知识,取得好成绩。

复习是重复学习,不是重新学习。考研教材应与普通教材不同。首先,普通教材必须严格地按内容的逻辑顺序来编写,而考研教材不必受此拘束,可以从读者最熟悉的内容入手。比如高等数学部分,本书采取从微分法开始,以微分带积分,以积分促微分,使微积分紧密结合,深入浅出地讲完一元微积分的全部内容。其次,普通教材着重一个一个地讲解知识单元,而考研教材则侧重于内容间的联系。如本书线性代数部分将矩阵与行列式、向量代数与线性方程组、特征值特征向量与二次型紧密结合。第三,创立了一种新的体系,在逻辑顺序上更加符合考生的认识层次,更加适合于高效的复习。如概率论部分,先讲离散型随机变量的有关概率问题,再讲连续型随机变量的问题,再讲它们间的联系。第四,本书针对考研主要是考核解题能力的特点,安排了大量的例题,采用一题多解,一题多变的方式,侧重讲解题的思路、方法和技巧,培养读者灵活的分析能力和解决数学问题的能力。第五,根据编者多年辅导考研数学的经验,本书严格按《数学考试大纲》,从内容上既照顾了全面覆盖所有的考点,又突出了重点,从方法上既介绍了数学处理问题的基本方法,又突出了主要方法,特别考虑到考研试题中 70% 左右的是基本题,本教材在基本内容、基本方法上讲述的篇幅最大,对一些难题讲述,则侧重讲一道难题的思路,以及它与基本内容的联系,如何作到熟能生巧等等。第六,作为一本复习教材,本书还考虑要便于考生自学,因此,在许多题后附了不少注释,还介绍了不少自编练习题的方法。希望读者在阅读本书时,要一边看书一边自己动手推导,在读完一节后,最好将这一节书中的例题当作习题,自己独立做一遍,然后再作本章练习题,这样效果会更好。

本书既然是一本考研的复习教材,因此,书中对一些估计考生很熟悉的内容,一些定理的证明、公式的推导等略去不讲,如果想要知道相关的内容,可以在任何一本普通的教材中找到。

感谢西安交通大学出版社为本书的编辑和出版所作的努力。希望本书能受到读者的欢迎,更希望广大读者多提意见和建议,以使本书能改得更好,成为准备参加考研读者的良师益友。

编者

2006.3 修改于西安

目 录

2009 版前言

第 1 版前言

第 1 章 一元函数微积分(一)

1.1 微积分的基本方法	(1)
1.2 导数、微分及其实际意义	(18)
1.3 复合求导法的应用与高阶导数	(22)
练习题 1	(25)
答案与提示	(27)

第 2 章 一元函数微积分(二)

2.1 微分中值定理及简单应用	(30)
2.2 与微积分理论有关的证明题	(40)
2.3 导数的应用	(58)
2.4 定积分的应用	(64)
练习题 2	(68)
答案与提示	(70)

第 3 章 函数、极限和连续性

3.1 初等函数	(72)
3.2 函数的极限	(76)
3.3 求函数极限的基本方法	(82)
3.4 函数连续性及连续函数的性质	(87)
3.5 杂例	(91)
练习题 3	(98)
答案与提示	(101)

第 4 章 多元函数微积分学

4.1 多元函数的概念与极限	(102)
4.2 多元函数连续、偏导数存在、可微的讨论	(104)
4.3 多元函数的微分法	(106)
4.4 多元函数的极值与最值	(114)
4.5 二重积分	(120)
练习题 4	(132)
答案与提示	(136)

第 5 章 数列极限与无穷级数

5.1 数列极限	(137)
5.2 数项级数	(142)

5.3 幂级数.....	(148)
练习题 5	(159)
答案与提示	(160)
第 6 章 微分方程	
6.1 一阶微分方程.....	(162)
6.2 二阶线性微分方程.....	(170)
6.3 微分方程的应用.....	(174)
6.4 差分方程.....	(179)
练习题 6	(182)
答案与提示	(183)
第 7 章 矩阵和行列式	
7.1 矩阵的概念与基本运算.....	(185)
7.2 矩阵的初等变换、矩阵的等价、矩阵的秩及初等矩阵.....	(190)
7.3 行列式的概念与性质.....	(192)
7.4 矩阵 A 的伴随矩阵及其性质	(195)
7.5 杂例.....	(197)
练习题 7	(204)
答案与提示	(209)
第 8 章 向量组和线性方程组	
8.1 向量的线性相关与线性无关.....	(212)
8.2 向量的内积.....	(217)
8.3 线性方程组.....	(218)
8.4 杂例.....	(222)
练习题 8	(235)
答案与提示	(239)
第 9 章 矩阵的特征值和特征向量、二次型	
9.1 矩阵的特征值和特征向量.....	(242)
9.2 相似矩阵.....	(243)
9.3 实对称矩阵.....	(245)
9.4 二次型.....	(247)
9.5 杂例.....	(250)
练习题 9	(257)
答案与提示	(259)
第 10 章 离散型随机变量	
10.1 一维离散型随机变量及其分布	(263)
10.2 随机事件的关系和运算	(268)
10.3 概率的基本性质及基本公式	(272)
10.4 二维离散型随机变量及其概率分布	(281)
10.5 离散型随机变量的数字特征	(286)
练习题 10	(295)
答案与提示	(298)

第 11 章 连续型随机变量	
11.1 连续型随机变量及其分布	(302)
11.2 连续型随机变量的独立性	(305)
11.3 正态随机变量(重点)	(310)
11.4 连续型随机变量的概率计算(重点)	(313)
11.5 连续型随机变量函数的概率分布	(315)
11.6 连续型随机变量的数字特征的计算	(322)
练习题 11	(328)
答案与提示	(330)
第 12 章 大数定律和中心极限定理	
12.1 大数定律	(335)
12.2 极限定理	(336)
练习题 12	(338)
答案与提示	(339)
第 13 章 数理统计	
13.1 数理统计的基本概念	(341)
13.2 参数的点估计	(347)
13.3 参数的区间估计	(354)
13.4 假设检验	(355)
练习题 13	(357)
答案与提示	(359)

第1章 一元函数微积分(一)

1.1 微积分的基本方法

本书为何从微、积分法开始,而不从函数、极限开始?这正是本书的特点.我们认为,“复习”应当从你最熟悉、最容易提起回忆的内容入手,而不是从头再学一遍,这样效率会更高、效果会更好.

1.1.1 微积分的基本公式

定义 1.1 在某个区间 I 上,若 $F'(x) = f(x)$,便称函数 $f(x)$ 是 $F(x)$ 的导数,而称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $F(x) + C$ 是 $f(x)$ 的不定积分(C 是任意常数).

不定积分记为 $\int f(x) dx$.

从运算的角度讲,不定积分是微分的逆运算.因此,微积分运算的基础在于微分法.利用熟悉的微分,来做不太熟悉的积分,是复习微积分运算基本功的好方法.

例 1.1 求 $\int \sin 3x dx$.

解 这样想: $\cos 3x$ 求导能得到 $\sin 3x$,于是求导: $(\cos 3x)' = -3\sin 3x$,从而得 $\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

这就是我们说的用微分做积分题的方法,非但快,还不会出错,因为我们已经用求导验证了所得到的结果.下一个例题更能看出将微积分联系起来的好处.

例 1.2 验证表 1.1 中的基本公式(13)',即

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$$

解 做此题有一个巧妙方法

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \stackrel{\textcircled{2}}{=} \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) dx \\ &\stackrel{\textcircled{3}}{=} \int \frac{d(x + \sqrt{x^2 + a^2})}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \stackrel{\textcircled{4}}{=} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \end{aligned}$$

这个方法是怎样得到的呢?原来它来自于求导的逆运算

$$\begin{aligned} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) &\stackrel{\textcircled{4}'}{=} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} (x + \sqrt{x^2 + a^2})' \stackrel{\textcircled{3}'}{=} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) \\ &\stackrel{\textcircled{2}'}{=} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \stackrel{\textcircled{1}'}{=} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{aligned}$$

上面求导的倒数第1步即等式①'与积分的第1步即等式①倒过来看是一样的;同样②'与②、③'与③、④'与④是对应的.即,将求导的流程倒过来做,便得出这个积分的方法.

通过微分方法做积分题,可以让我们取得复习微积分的主动权,可以自己编题,先做微分,再反过来从微分的结果做积分.

例 1.3 我们目的是练习分部积分法,因此,编出一个题: $x^2 e^{-x}$,求导得 $(x^2 e^{-x})' = (2x - x^2)e^{-x}$;再求积分:

$$\begin{aligned}\int (2x - x^2)e^{-x} dx &= -(2x - x^2)e^{-x} + 2 \int (1 - x)e^{-x} dx = x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2(1 - x)e^{-x} - 2 \int e^{-x} dx \\ &= x^2 e^{-x} + C.\end{aligned}$$

因为是自己编的题,先求导,再积分,既练了微分,又练了积分,不用课本也不用老师、自编、自导、自演练,何乐而不为呢!我们提倡这样的复习方法:抓住内容间的联系,把书读薄,这样能够提高复习效率,增强复习效果。

为了练习微积分基本功,先要熟悉基本公式和运算法则,而且还是将微分和积分相对照更好。(见表 1.1 和表 1.2)。

表 1.1 微积分基本公式对照表

基本导数公式	对应的不定积分公式
① $(x^a)' = ax^{a-1}$	①' $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (a \neq -1)$
② $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	②' $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
③ $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1)$	③' $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$
④ $(\sin x)' = \cos x$	④' $\int \cos x dx = \sin x + C$
⑤ $(\cos x)' = -\sin x$	⑤' $\int \sin x dx = -\cos x + C$
⑥ $(\tan x)' = \sec^2 x$	⑥' $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
⑦ $(\cot x)' = -\csc^2 x$	⑦' $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
⑧ $(\arcsin \frac{x}{a})' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$	⑧' $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$
⑨ $(\arctan \frac{x}{a})' = \frac{a}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$	⑨' $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$
⑩ $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	⑩' $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$
⑪ $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	⑪' $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
⑫ $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	⑫' $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
⑬ $(\ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2})' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \quad (a > 0)$	⑬' $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C \quad (a > 0)$
⑭ $(\ln \frac{a+x}{a-x})' = \frac{2a}{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$	⑭' $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C \quad (a > 0)$

对此表中 14 对公式,务必记牢;以导数公式为基础,做到倒背如流。

由于紧扣微积分的联系,考虑到读者对微分熟悉,对积分较生疏,因此,我们以下主要先讲四种基本积分方法,读者应养成用微分检验积分结果的习惯。

表 1.2 微积分基本运算法则对照表

微分法(设 $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$)	积分法
① 和的微分 $d[F(x) + G(x)] = f(x)dx + g(x)dx$	①' 分项积分法 $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
② 复合微分法 $dF(u(x)) = f(u)du = f(u(x))u'(x)dx$	②' 第一类换元积分法 $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$
③ 复合微分法 $dF(x(t)) = f(x)dx = f(x)\dot{x}(t)dt$	③' 第二类换元积分法 $\int f(x)dx = \int f(x(t))\dot{x}(t)dt$
④ 乘积微分法 $d(uv) = u dv + v du$	④' 分部积分法 $\int u dv = uv - \int v du$

1.1.2 分项积分法

例 1.4 $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$

例 1.5 $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = x - \arctan x + C.$

例 1.6 $\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C.$

分项积分法是最基本却又是容易被忽视的积分法,在复习中值得留意.

1.1.3 第一类换元积分法(凑微分的积分法)

例 1.7 计算 $\int \sin 2x dx.$

解 1 原式 $= \frac{1}{2} \int \sin 2x d(2x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$

注 这里,实际上是令 $2x = u$,但当对这样简单的复合求导逆运算熟悉时,不必写出新的积分元 u ,大多数的第一类换元积分法都可以不写出 u ,而是将被积表达式凑成微分形式,即如 $\sin 2x dx = d(-\frac{1}{2} \cos 2x)$,故也称凑微分法.

解 2 原式 $= 2 \int \sin x \cos x dx = 2 \int \sin x d(\sin x) = \int d \sin^2 x = \sin^2 x + C.$

解 3 原式 $= 2 \int \cos x \sin x dx = -2 \int \cos x d(\cos x) = -\cos^2 x + C.$

复合求导是最重要的微分法则,因此,凑微分法是积分的最重要的方法.

例 1.8 求 $\int \frac{dx}{\cos x}.$

解 1 $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\sec x (\tan x + \sec x)}{\tan x + \sec x} dx = \int \frac{d(\tan x + \sec x)}{\tan x + \sec x} = \ln |\tan x + \sec x| + C$

解 2 $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d \sin x}{1 - \sin^2 x} = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + C$

解 3 $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = 2 \int \frac{d \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \ln \left| \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \right| + C$

$$\begin{aligned}\text{解 4 } \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{dx}{\sin(\frac{\pi}{2} + x)} = \int \frac{d(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})} = \int \frac{\sec^2(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})}{\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})} d(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) \\ &= \boxed{\ln \left| \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) \right| + C}\end{aligned}$$

以上 4 个方框的结果都是计算 $\int \frac{dx}{\cos x}$ 的公式,读者可用微分还原.

例 1.9 求 $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

$$\text{解 1 } \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{(1+e^x-e^x)dx}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x) + C$$

$$\text{解 2 } \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^x dx}{e^x(1+e^x)} = \int (\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}) e^x dx = x - \ln(1+e^x) + C$$

$$\text{解 3 } \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x} dx}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x}) + C$$

1.1.4 第二类换元积分法

这一类是地道的换元法,第一类换元是凑微分,可以不作“换元”,第二类是假设被积函数 $f(x)$ 的原函数不易看出,而令 $x = x(t)$. 这样

$\int f(x)dx = \int f(x(t))\dot{x}(t)dt$, 使 $F(t) = f(x(t))\dot{x}(t)$ 比较简单. 通常,这类换元一个最重要思路是有理化被积表达式.

例 1.10 求 $\int x \sqrt{1-2x} dx$.

解 令 $1-2x = t^2$. 则 $x = \frac{1}{2}(1-t^2)$, $dx = -tdt$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{1}{2} \int (t^2-1)t^2 dt = \frac{1}{10}t^5 - \frac{1}{6}t^3 + C \\ &= \frac{1}{30}[3(1-2x)^{5/2} - 5(1-2x)^{3/2}] + C\end{aligned}$$

例 1.11 求 $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$.

解 1 令 $x = a \sin t$, 则 $dx = a \cos t dt$.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + C (\text{可以当成基本公式}).\end{aligned}$$

解 2 (分部积分法).

$$\begin{aligned}I &= \int \sqrt{a^2-x^2} dx = x \sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ &= x \sqrt{a^2-x^2} - I + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (\text{移项,解出 } I) \\ I &= \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.\end{aligned}$$

解 3 (主要也是分部积分法).

$$I = \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2-x^2} - I \quad (\text{移项})$$

故

$$I = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

例 1.12 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

解 1 (第一类换元).

$$\text{原式} = 2 \int \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = 2 \arcsin \sqrt{x} + C.$$

解 2 原式 $= -2 \int \frac{d\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}} = -2 \arcsin \sqrt{1-x} + C = 2 \arccos \sqrt{1-x} + C.$

注 遇到函数,首先要想到定义域. 本题被积函数的定义域是 $(0,1)$, 故我们只是在 $(0,1)$ 内求它的原函数.

解 3 (直接用公式).

$$\text{原式} = \int \frac{d(x - \frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} = \arcsin(2x-1) + C.$$

解 4 (换元积分法) 令 $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin t$

$$\text{原式} = \int dt = t + C = \arcsin(2x-1) + C.$$

解 5 由 $0 < x < 1$ 知, 可令 $x = \sin^2 t, 1-x = \cos^2 t, dx = 2 \sin t \cos t dt$.

$$\text{原式} = 2 \int dt = 2t + C = 2 \arcsin \sqrt{x} + C.$$

解 6 (有理化变换) 考虑被积函数.

$$\text{由} \quad \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x}{1-x}},$$

$$\text{令} \frac{x}{1-x} = t^2, \quad \text{则} \quad x = \frac{t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt$$

$$\text{原式} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \arctan t + C = 2 \arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}} + C.$$

1.1.5 分部积分法

$$\int u dv = uv - \int v du$$

将被积函数是 $u(x)v'(x)$ 的积分, 化为 $v(x)u'(x)$ 的积分. 要求表达式 $v(x)u'(x)$ 不比 $u(x)v'(x)$ 更复杂.

例 1.13 求 $\int \ln x dx$.

$$\text{解} \quad \text{原式} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

例 1.14 求 $\int x^2 \arcsin x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{原式} &= \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{6} \int \frac{x^2 dx^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{x^3}{3} \arcsin x + \frac{1}{6} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) - \frac{1}{6} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-x^2) \\ &= \frac{x^3}{3} \arcsin x - \frac{1}{9} (1-x^2)^{3/2} + \frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C. \end{aligned}$$

例 1.15 求 $\int x^2 e^x dx$.

解 1 原式 $= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$.

解 2 (待定系数法). 设 $(x^2 + bx + c)e^x$ 是要求的一个原函数.

则 $[(x^2 + bx + c)e^x]' = [x^2 + (b+2)x + (b+c)]e^x = x^2 e^x$.

故 $b = -2, c = -b = 2$. 即 $\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$.

以上分部积分法的第一个作用, 是依次化简被积函数直至求出原函数, 分部积分的第二个作用是产生递推公式.

例 1.16 求 $\int \sin^4 x dx$.

解 记 $\int \sin^n x dx = I_n$

$$\begin{aligned} I_4 &= -\sin^3 x \cos x + 3 \int \sin^2 x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^3 x \cos x + 3 \int \sin^2 x dx - 3 \int \sin^4 x dx \quad (\text{将 } 3I_4 \text{ 移到等号左边}). \end{aligned}$$

$$I_4 = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} I_2.$$

$$I_2 = \int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + \int dx - I_2 \quad (\text{将 } I_2 \text{ 移到等号左边}).$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} I_0 = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x + C$$

从而
$$I_4 = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{4} x + C.$$

读者可以推导一般的 $\int \sin^n x dx$ 和 $\int \cos^n x dx$ 的递推公式.

例 1.17 求 $I_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

解 我们采用倒推的方法. 由

$$I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2 \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2I_1 - 2I_2.$$

故
$$I_2 = \frac{1}{2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} I_1 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

分部积分的第三个主要作用是产生循环公式而得出积分结果.

例 1.18 求 $I = \int e^x \cos x dx$.

解 $I = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - I$ (将 I 移到等号左边)

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C.$$

例 1.19 求 $I = \int \sqrt{a^2 + x^2} dx \quad (a > 0)$.

解 1 $I = x \sqrt{a^2 + x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = x \sqrt{a^2 + x^2} - I + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ (移项)

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$$

解 2 $I = \int \frac{a^2 + x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = a^2 \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + x \sqrt{a^2 + x^2} - I$ (移项)

$$I = \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + C \text{ (此结果也可当公式用)}$$

读者还可换元积分做本题.

有理函数的积分主要是用分项积分. 其关键是化一个分式为部分分式, 而化一个分式为部分分式的关键是将分母分解因式. 三角有理函数从理论上讲用万能变换; 即设 $\tan \frac{x}{2} = t$, 可将三角有理函数化为有理函数的积分. 但一般做题用万能变换往往十分麻烦, 要利用三角函数间的关系灵活去做题, 也往往要综合运用以上四种基本的积分方法.

例 1.20 求 $\int \frac{x+5}{x^2-6x+13} dx$.

解 本题中 $\frac{x+5}{x^2-6x+13}$ 已是部分分式了, 请注意以下分部积分的技巧:

由 $(x^2-6x+13)' = 2x-6$, 化 $x+5 = \frac{1}{2}(2x-6) + 8$. 于是

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-6x+13)}{x^2-6x+13} + \int \frac{8}{(x-3)^2+4} d(x-3) = \frac{1}{2} \ln |x^2-6x+13| + 4 \arctan \frac{x-3}{2} + C.$$

例 1.21 (2000, 二) ① 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, 求 $\int f(x) dx$.

解 令 $x = e^t$, 得 $f(t) = \frac{\ln(1+e^t)}{e^t}$, 则 $f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$.

$$\text{原式} = -e^{-x} \ln(1+e^x) + \int e^{-x} \frac{e^x}{1+e^x} dx = -e^{-x} \ln(1+e^x) + x - \ln(1+e^x) + C.$$

例 1.22 (2000, 四) 求 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

解 1 原式 $= 2 \int \arcsin \sqrt{x} d\sqrt{x} = 2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$.

解 2 令 $x = \sin^2 t$, 则

$$\text{原式} = 2 \int t \cos t dt = 2t \sin t - 2 \int \sin t dt = 2t \sin t + 2 \cos t + C = 2\sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C.$$

例 1.23 (2001, 一) 求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}} dx$.

解 1 原式 $= -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \int \frac{e^x dx}{e^{2x}(1+e^{2x})} = -\frac{1}{2} e^{-2x} \arctan e^x + \frac{1}{2} \int e^{-x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{de^x}{1+e^{2x}}$
 $= -\frac{1}{2} (e^{-2x} \arctan e^x + e^{-x} + \arctan e^x) + C.$

解 2 令 $e^x = \tan t$, 则 $e^x dx = dt \tan t$.

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{t}{\tan^3 t} dt \tan t = -\frac{1}{2} \frac{t}{\tan^2 t} + \frac{1}{2} \int \cot^2 t dt = -\frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tan^2 t} - \int \csc^2 t dt + \int dt \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tan^2 t} + \cot t + t + C \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\arctan e^x}{e^{2x}} + e^{-x} + \arctan e^x + C \right). \end{aligned}$$

例 1.24 (2001, 二) 求 $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解 令 $x = \tan t$, 则 $dx = \sec^2 t dt$.

$$\text{原式} = \int \frac{\cos t dt}{1+\sin^2 t} = \arctan \sin t + C = \arctan \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

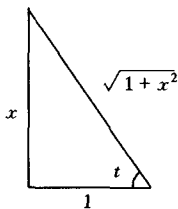


图 1.1

① (2000, 二) 表示 2000 年数学二的试题. 下同.

注 以上我们用到由 $x = \tan t$, 得 $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 可用画小直角三角形(见图 1.1) 方法求得, 这种方法

方便.

例 1.21 ~ 例 1.24 的 4 道例题对我们有如下启发: 不定积分题在考研试题中常常出现, 但没有很难的题.

例 1.25 计算 $I = \int \cos^m x \cos(m+2)x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \int \cos^m x [\cos(m+1)x \cos x - \sin(m+1)x \sin x] dx \\ &= \int \cos^{m+1} x \cos(m+1)x dx + \frac{1}{m+1} \cos^{m+1} x \sin(m+1)x - \int \cos^{m+1} x \cos(m+1)x dx \\ &= \frac{1}{m+1} \cos^{m+1} x \sin(m+1)x + C. \end{aligned}$$

注 本题关键是将 $\cos(m+2)x = \cos[(m+1)x + x]$ 展开, 再分部积分. 这个技巧来源于对函数 $f(x) = \cos^n x \sin nx$ 求导的逆运算, 并令 $n = m+1$ 的计算, 读者不妨一试.

1.1.6 定积分与微分的联系

1.1.6.1 定积分的概念与性质

定义 1.2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有定义, 经以下三步:

(1) 分割 对区间 $[a, b]$ 进行任意分割: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. 记 $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, 以 Δx_k 表示此区间长即 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ($k = 1, 2, \cdots, n$).

(2) 求和 在每个 Δ_k 上任意取一点 ξ_k , 作 $f(\xi_k) \Delta x_k$ ($k = 1, 2, \cdots, n$), 及取和

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

(3) 取极限 记 $\lambda = \max_{k=1, 2, \cdots, n} \Delta x_k$,

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

若这个和式极限存在, 且与分割、取点无关, 就称函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 极限值称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分. 记为

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

由定义可见, 定积分与不定积分截然不同, 定积分作为一种和式的极限是独立于导数和微分的; 而不定积分作为导数和微分的逆运算, 则完全要依赖导数和微分.

注意 定积分中的极限既不单纯是函数的极限, 更不是数列的极限, 加上定义中“任意分割”、“任意取点”两个任意性, 更使其显得“神秘”. 好在高等数学并不去深究这一概念, 只要正确理解它, 并掌握其一些基本的性质.

可积的必要条件. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界.

因此, 无界函数的广义积分, 不可能用“和式极限”来定义.

可积的充分条件. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 或分段连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

定积分的基本性质

1. 线性性

设 $f(x), g(x)$ 皆可积, 则其线性组合 $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ 可积, 且

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)] dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx$$

2. 对区间的可加性

首先, 定义 $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.