高联考研

2007年

李永乐·李正元考研数学③

【经济类】

数学复习全书

主编 北京大学 范培华
清华大学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

赠送《全书习题全解》

国家行政学院出版社

2007年李永乐·李正元考研数学③

数学复习全书

【经济类】

主编　北京大学　范培华
清华大学　李永乐
中国人民大学　袁荫棠

编者　（按姓氏笔画）
北京大学　李正元
清华大学　李永乐
北京大学　刘西垣
中国人民大学　严颖
北京大学　范培华
中国人民大学　袁荫棠
空军雷达学院　徐宝庆
东北财经大学　龚兆仁
天津财经学院　鹿立江

国家行政学院出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

考研必备数学复习全书:经济类/范培华等主编.
-北京:国家行政学院出版社,2000
ISBN 7-80140-113-1

Ⅰ.考… Ⅱ.范… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第16808号

考研必备(2007年版)
数学复习全书
【经济类】
范培华 李永乐 袁荫棠 主编
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路6号
邮政编码:100089
发行部电话:88517082
北京市朝阳印刷厂印刷 新华书店经销
*
787×1092 1/16开本 33印张 850千字
2006年2月第7版 2006年2月第1次印刷
ISBN 7-80140-113-1/O·8 定价:48.00元

再版前言

本书出版、修订六年多来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为本书在编写体例上有“特色”，在内容讲解、试题分析与解答上详尽、透彻、易懂，较“适合考生的需要”。我们从反馈的信息中获悉，除报考硕士研究生的考生将本书用作应试复习参考书外，文科类在读大学生也将本书作为数学的学习辅导资料，而教师则作为主要的教学参考用书之一。这既是对我们工作的肯定和鼓励，也是一种鞭策，促使我们对本书进行一次全面修订，以便及时反映当前研究生最新考试信息，更好地适应和满足广大考生和读者考试复习的需要。2007 年《数学复习全书》（修订第七版）将以更高的质量和新的面貌呈现在广大学生的面前。

本书 2007 年版是在 2006 年版的基础上进行修订的，更加完善，更具有针对性和适用性。

微积分部分： 按考试大纲的要求及绝大多数考生系统复习的需要，本书进行了大幅度调整，宗旨是重点内容重点讲解，如：求极限的方法，求积分（一元、多元函数）的方法，牛顿-莱布尼兹公式及其应用，二重积分的计算与应用，数学建模，求幂级数的收敛域或收敛区间，幂级数的求和，求函数的幂级数展开式等单独分离出来进行举例讲解，同时调换并增加了若干典型例题，并修改了部分例题的解法，使之更简捷，更易掌握。

线性代数部分： 主要是针对一些重点概念和公式的运用，调换并增加了若干例题进行讲解，使考生对这些重点概念和公式能彻底理解、吃透，对一些常考题型，如：抽象行列式的计算，有关伴随矩阵的命题，n 阶矩阵的特征值和特征向量以及线性相关与无关的证明、基础解系的证明等题型的解题方法和技巧进一步作了较详尽的归纳总结，并给典型例题进行讲解，消除考生对这些重要概念和公式的运用和常考题型解题方法的疑惑，以便考生在考试中应对自如，提高应试水平。

概率统计部分： 与微积分部分一样也进行了大幅度调整，调整后更适合考生进行系统复习，同时对重点概念、公式和常考题型从多角度命制典型例题进行讲解，以提高考生运用概念、公式综合分析能力，从而取得好成绩。

特别需要强调的是，本书题型训练均给出了详细解答。

本书的微积分部分由**北京大学范培华、刘西垣**修改完成，线性代数部分由**清华大学李永乐**修改完成，概率论与数理统计部分由**中国人民大学袁荫棠**修改完成。

编者

2006 年 2 月

前　　言

为了使考研同学能在较短时间内全面复习数学，达到硕士学习阶段应具备的数学能力，提高考研数学应试水平，以合格的数学成绩任国家挑选，作者根据教育部制订的《数学考试大纲》的要求和最新精神，深入研究了近年来考研命题的特点及动态，并结合作者多年来数学阅卷以及全国大部分城市“考研班”辅导的经验，编写了这本《考研数学复习全书》（经济类）及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典400题》。在编写时，作者特别注重与学生的实际相结合，注重与考研的要求相结合。

本书每章均由以下四个部分构成：

一、内容概要与重难点提示——编写该部分的目的主要使考生能明确本章的重点、难点及常考点，让考生弄清各知识点之间的相互联系，以便对本章内容有一个全局性的认识和把握。

二、考核知识要点讲解——本部分对大纲所要求的知识点进行了全面地阐述，并对考试重点、难点以及常考点进行了剖析，指出了历届考生在运用基本概念、公式、定理等知识解题时普遍存在的问题及常犯的错误，同时给出了相应的注意事项，以加深考生对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

三、常考题型及其解题方法与技巧——本部分对历年统考中常见题型进行了归纳分类，归纳总结了各种题型的解题方法，注重一题多解，以期开阔考生的解题思路，使所学知识融会贯通，并能综合、灵活地解决问题。

四、题型训练及参考答案——本部分精选了适量的题型训练，并附有参考答案和解题提示。只有适量的练习才能巩固所学知识，复习数学必须做题。为了让考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，作者特优化设计了与真题相仿的实战训练题编写在《考研数学全真模拟经典400题》一书中，以供考生选用。

特别需要强调的是，在’98北大百年校庆之际，我们北大数学系63届校友聚会于北大燕园，畅谈中得知我们当中许多同学都在从事本科及研究生数学教学与数学研究工作，并有多年考研辅导的经验以及参加研究生入学考试阅卷的经历，对各类院校的考生有广泛的接触与了解，深知考生在考研数学备考中所面临的困惑。为了帮助考生全面系统并有针对性地复习，在大家的一致建议下，由我们执笔编写了这本《考研数学复习全书》（经济类）及其姊妹篇《考研数学全真模拟经典400题》，期望对广大考生备考能有所裨益。

本书是考研应试者的良师益友，也是各类院校的学生自学数学、提高数学水平和教师进行教学辅导的一本极有价值的参考书。

由于时间仓促，书中疏漏之处在所难免，诚请专家和读者指正。

编　者

2000年3月于北大燕园

目　录

第一篇　微积分

第四章 线性方程组

第五章 矩阵的特征值与特征向量

第六章 二次型

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率

第二章 随机变量的分布及其概率

第三章 多维随机变量及其分布

第一篇　微积分

第一章　函数、极限、连续

内容概要与重难点提示

1. **微积分中研究的对象是函数**　函数概念的实质是变量之间确定的对应关系.变量之间是否有函数关系,就看是否存在一种对应规则,使得按照这个对应规则,当其中一个变量或几个变量的取值确定后,余下的另一个变量的取值也就被唯一确定,前者是一元函数,后者是多元函数.

函数这部分的重点是:复合函数、反函数和分段函数及函数记号的运算.(这部分内容贯穿全书,不另行复习.)

2. **极限是微积分的理论基础**　微积分中的重要概念,如连续、导数、定积分等都是用不同类型的极限来定义的,由此可见极限的重要性.本章的重点内容是极限.既要准确理解极限的概念、性质和极限存在的条件,又要能准确地求出各种极限.求极限的方法很多,综合起来主要有:

① 利用极限的四则运算与幂指数运算法则；　② 利用洛必达法则；
③ 利用函数的连续性；　④ 利用变量替换与两个重要极限；
⑤ 数列极限转化为函数极限；　⑥ 利用夹逼定理；
⑦ 利用导数的定义求极限.

3. **无穷小就是极限为零的变量**　极限问题可归结为无穷小问题.要理解无穷小的概念,掌握无穷小的比较方法,会确定无穷小的阶数,并会用重要的等价无穷小替换求极限.

4. **我们研究的对象是连续函数或除若干点外是连续的函数**　由于函数的连续性是通过极限定义的,所以判断函数是否连续及函数间断点的类型等问题本质上仍是求极限.要掌握判断函数连续性(特别是分段函数在连接点处的连续性)以及求间断点的方法,会判别函数间断点的类型.

5. **有界闭区间上连续函数的基本性质**　函数的许多重要性质都与连续性有关.因此,我们要了解有界闭区间上连续函数的重要性质,包括:有界性定理,最大值、最小值定理和介值(中间值)定理,并掌握这些定理的简单应用.

☆
$y=f(x)$ 与 $y=-f(-x)$，$y=f(-x)$ 与 $y=-f(x)$ 关于原点对称
$y=f(x)$ 与 $y=f(-x)$，$y=-f(-x)$ 与 $y=-f(x)$ 关于 y 轴对称
$y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$　$y=-f(-x)$ 与 $y=f(-x)$ 关于 x 轴对称

考核知识要点讲解

一、极限的概念与性质

(一) 极限的定义

【定义 1.1】　$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N,当 $n > N$ 时,有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

若 x_n 存在极限(有限数),又称 $\{x_n\}$ 收敛,否则称 $\{x_n\}$ 发散.

【定义 1.2】　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ 正数 X,当 $|x| > X$ 时,有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

类似可定义:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$,　$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.

【定义 1.3】 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

类似可定义：$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$，　$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

【注】 要正确理解极限定义中的“ε,N”、“ε,δ”、“ε,X”语言的含义.

以数列极限定义为例，定义里任给 $\varepsilon>0$，可以理解为无论多么小，只要 $n>N$，即只要 n 充分大时，x_n 与 A 的接近程度比所给定的 ε 还要小. 可见 A 为 x_n 的极限关键在于 $n>N$ 后的 x_n 变化趋势，而 $n<N$ 的 x_n 与 A 相差可能甚远.

【例 1.1】 “对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的

(A) 充分条件，但非必要条件.　　(B) 必要条件，但非充分条件.

(C) 充分必要条件.　　(D) 既非充分条件，又非必要条件.

【分析】 将题设的条件与上述数列极限定义比较知，对任意的 $\varepsilon\in(0,1)$ 与对任给 $\varepsilon>0$ 是相当的，而 $n\geqslant N$ 比定义中多了一个等号，显然由于定义中的 N 并不惟一，多一个等号也是可以的. 事实上，若取 $N_0=N-1$，则 $n>N_0$ 即为 $n\geqslant N$. 至于 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$，这里既多了一个等号，还乘以 2. 但由于 $\varepsilon>0$ 是任给的，满足 $\varepsilon=\varepsilon_0/3$ 的 $\varepsilon_0>0$ 仍然是任给的，这时就有

$$|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon=(2/3)\varepsilon_0<\varepsilon_0.$$

这与定义中 $|x_n-a|<\varepsilon$ 相当.

综上所述所给条件是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充要条件. 故(C)入选.

（二）极限的基本性质与两个重要极限

▶1. 数列极限的基本性质

【定理 1.1】（极限的不等式性质） 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$，　$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n=b$.

若 $a>b$，则 $\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $x_n>y_n$；　若 $n>N$ 时，$x_n\geqslant y_n$，则 $a\geqslant b$.

【定理 1.2】（极限的唯一性） 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=a$，　$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=b$，则 $a=b$.

【定理 1.3】（收敛数列的有界性） 设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 有界（即 $\exists$ 常数 $M>0$，使 $|x_n|\leqslant M$，$n=1,2,\cdots$）.

▶2. 函数极限的基本性质

【定理 1.4】（极限的不等式性质） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，　$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$.

若 $A>B$，则 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>g(x)$；

若 $\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)\geqslant g(x)$，则 $A\geqslant B$.

【推论】（极限的保号性） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. 若 $A>0\Rightarrow\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>0$.

若 $\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)\geqslant 0$，则 $A\geqslant 0$.

【定理 1.5】（极限的唯一性） 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=B$，则 $A=B$.

【定理 1.6】（存在极限的函数局部有界性） 设存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $f(x)$ 在 x_0 的空心邻域 $U_0(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$ 内有界，即 $\exists\delta>0,M>0$，使得 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|f(x)|\leqslant M.$$

【注】 其他的极限过程如 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$ 等等也有类似的结论.

▶**3. 两个重要极限**

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e} \quad \left(\text{或}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\right) \tag{1.1}$$

应会灵活运用下列由两个重要极限得出的已知极限：

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$； $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$； $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$； $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$； $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$； $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$； $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}}{e}=1$.

【例 1.2】 判断下列结论是否正确，并证明你的判断.

（Ⅰ）若 $x_n<y_n(n>N)$，又存在极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$， $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=B$，则 $A<B$.

（Ⅱ）设 $f(x)$ 定义在 (a,b)，又 $c\in(a,b)$，并存在极限 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=A$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 有界.

（Ⅲ）若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，则 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $\frac{1}{f(x)}$ 有界.

【解】 （Ⅰ）不正确.在题设下只能保证 $A\leqslant B$，不能保证 $A<B$.例如，$x_n=\frac{1}{n}$，$y_n=\frac{2}{n}$，则

$$x_n<y_n,\ \lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}y_n=0.$$

评注 对不等式 $x_n<y_n(n>N)$ 两边取极限时（以极限存在为前提），除保持不等号外还要带上等号，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.

（Ⅱ）不正确.这时只能保证：$\exists c$ 的一个空心邻域 $U_0(c,\delta)=\{x\mid 0<|x-c|<\delta\}$，$f(x)$ 在 $U_0(c,\delta)$ 有界，不能保证 $f(x)$ 在 (a,b) 有界.例如：$f(x)=\frac{1}{x}$， $(a,b)=(0,1)$，取 $c\in(0,1)$，则 $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\frac{1}{c}$，但 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 无界.

（Ⅲ）正确.因为 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$，由存在极限的函数的局部有界性 $\Rightarrow\exists\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时 $\frac{1}{f(x)}$ 有界.

【例 1.3】 求下列极限：

（Ⅰ） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2\sin\frac{1}{x}+2\sin x}{x}$；（Ⅱ） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-a^a}{x-a}\ (a>0)$；（Ⅲ） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}\ (\alpha\neq\beta)$.

【解】 （Ⅰ） 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sin x}{x}=3+0=3$.

（Ⅱ） 原式 $=\lim\limits_{x\to a}a^a\dfrac{a^{x-a}-1}{x-a}\xlongequal{\text{令 }x-a=t}a^a\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{a^t-1}{t}=a^a\ln a$.

（Ⅲ） 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\dfrac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x}-\beta\dfrac{e^{\beta x}-1}{\beta x}}{\dfrac{\alpha\sin\alpha x}{\alpha x}-\dfrac{\beta\sin\beta x}{\beta x}}=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}=1$.

评注 要注意重要极限成立的条件，并应熟悉其等价表达式．如：

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1,\text{但}\quad \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0,\text{而不是}1.$$

二、极限存在性的判别

(一) 数列敛散性的判别

【定理 1.7】(夹逼定理) 若 $\exists N$，当 $n > N$ 时，$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

【定理 1.8】(单调有界数列必收敛定理) 若数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界，即 $x_{n+1} \geqslant x_n \quad (n = 1,2,\cdots)$，并存在一个数 M 使得对一切的 n 有 $x_n \leqslant M$，则 $\{x_n\}$ 收敛．即存在一个数 a，使得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\text{且有 } x_n \leqslant a\ (n = 1,2,\cdots).$$

若数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界，即 $x_{n+1} \leqslant x_n (n = 1,2,\cdots)$，并存在一个数 m 使得对一切的 n 有 $x_n \geqslant m$，则 $\{x_n\}$ 收敛．即存在一个数 a，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且有 $x_n \geqslant a\ (n = 1,2,\cdots)$．

此外，还可通过数列与级数的关系讨论敛散性：因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 的部分和数列是 $\{x_{n+1} - x_1\}$，故数列 $\{x_n\}$ 的敛散性与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 的敛散性相同．

【例 1.4】 (Ⅰ) 设 $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$，其中 $b > a > 0$， 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$；

(Ⅱ) 设 $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \cdots, x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n\text{重根号}}$， 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$．

【解】 (Ⅰ) $\{x_n\}$ 满足不等式 $b = \sqrt[n]{b^n} \leqslant \sqrt[n]{a^n + b^n} \leqslant \sqrt[n]{2b^n}$，

此不等式两端的极限存在且相等，即 $\lim\limits_{n\to\infty} b = b$， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2b^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}b = b$．

由夹逼定理可知极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n + b^n} = b$．

(Ⅱ) 先证明 $\{x_n\}$ 极限存在，然后再求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$．

首先证明 $\{x_n\}$ 单调增加：$x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1$，若 $x_n > x_{n-1}$，则有

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} > \sqrt{2 + x_{n-1}} = x_n.$$

由归纳法可知 $\{x_n\}$ 单调增加．

其次证明 $\{x_n\}$ 是有界变量：$x_1 = \sqrt{2} < 2$，若 $x_n < 2$，则有 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$．
由单调有界准则，知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在．不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} = a$，由等式 $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ 两端取极限得

$$a = \sqrt{2 + a},\quad \text{即}\quad a^2 - a - 2 = 0 \text{ 且 } a > \sqrt{2}.$$

解方程可知 $a = 2$．故有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$．

【例 1.5】 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$， 试证 $\{a_n\}$ 收敛．

【证明】 易见 $a_n < a_{n+1}(n = 1,2,\cdots,)$，只需证明 a_n 有上界． $\frac{1}{2^2} \leq \frac{1}{1\cdot 2}$

因为 $a_n \leqslant 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$

$$= 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

故由单调有界数列必收敛定理得知 $\{a_n\}$ 收敛．

（二）函数 $y = f(x)$ 的极限的存在性问题

【定理 1.9】（夹逼定理） 设 $\exists\delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，又 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

【注】 其他的极限过程也有类似的结论．

【定理 1.10】（单侧极限与双侧极限的关系） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$.

对于分段函数 $f(x) = \begin{cases} g(x), & x_0 - \delta < x < x_0, \\ h(x), & x_0 < x < x_0 + \delta, \end{cases}$ 因为 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+} h(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-} g(x)$，故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} g(x)$．

[redacted] 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \sin x}{x^3}, & x < 0, \\ (1 + ax)^{\frac{1}{x}} - \dfrac{\ln(1+x)}{e^{3x} - 1}, & x > 0, \end{cases}$ 问当 a 为何值时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在．

【解】 由左右极限相等，定出常数 a．

$$f(0+0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[(1+ax)^{\frac{1}{x}} - \frac{\ln(1+x)}{e^{3x}-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+}(1+ax)^{\frac{1}{x}} - \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{e^{3x}-1} = e^a - \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{3(1+x)e^{3x}} = e^a - \frac{1}{3},$$

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x - \sin x}{x^3} \xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}} \lim_{x\to 0^-}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

由 $f(0+0) = f(0-0)$，得 $e^a - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$，从而 $a = -\ln 2$．即当 $a = -\ln 2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{6}$．

[redacted] 判定下列函数极限的存在性：

（Ⅰ）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$； X　　（Ⅱ）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$；

（Ⅲ）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{a^{\frac{x}{2}}}$ $(a > 1)$； X　　（Ⅳ）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\text{arccot}x}$．

【解】（Ⅰ）因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x} = 1$， $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1} = -1$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ 不存在．

（Ⅱ）因 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|\sin x|}{x} = 1$， $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|\sin x|}{x} = -1$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin x|}{x}$ 不存在．

（Ⅲ）因 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{a^{\frac{x}{2}}} = +\infty$， $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{a^{\frac{x}{2}}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x)'\ \infty}{(\frac{1}{2}a^{\frac{x}{2}}\ln a)'\ \infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{a^{\frac{x}{2}}(\ln a)^2} = 0$， ∞

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{a^{\frac{x}{2}}}$ 不存在.

(Ⅳ) 当 $x\to+\infty$ 时,属 $\dfrac{0}{0}$ 型.先用当 $x\to\infty$ 时的等价无穷小替换 $\ln(1+\dfrac{1}{x})\sim\dfrac{1}{x}$,再用洛必达法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot}x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x^2}=1.$$

但是当 $x\to-\infty$ 时, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot}x}=0$. 故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot}x}$ 不存在.

【例 1.8】 设 $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$,当 $x\to0$ 时, $f(x)$ 的极限是

(A) 0. (B) $+\infty$.

(C) $-\infty$. (D) 不存在,但也不是 ∞.

【分析】 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$, 故应分左右极限来讨论.

$$\lim_{x\to0^+}xe^{\frac{1}{x}}\overset{\text{令}\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=}\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty,\quad \lim_{x\to0^-}xe^{\frac{1}{x}}\overset{\text{令}\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=}\lim_{t\to-\infty}\frac{e^t}{t}=0.$$

因此应选(D).

【例 1.9】 设 $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x^2}}$, 求:

(Ⅰ) $f(x)$ 的定义域; (Ⅱ) $\dfrac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2$; (Ⅲ) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$.

【解】 (Ⅰ) $f(x)=\sqrt{x+|x|}=\begin{cases}0, & x\leqslant0,\\ \sqrt{2x}, & x>0,\end{cases}$ 其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,且 $f(x)\geqslant0$.

(Ⅱ) 由于 $f[f(x)]=\sqrt{f(x)+\sqrt{f^2(x)}}=\sqrt{f(x)+|f(x)|}=\sqrt{2f(x)}$,故

$$\frac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2=f(x).$$

(Ⅲ) 因为 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{0}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{2x}}{x}=+\infty$. 故 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在.

评注 ①证明函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在的主要方法是考察左右极限.若 $f(x_0+0)$ 或 $f(x_0-0)$ 中至少有一个不存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在;若 $f(x_0+0)$ 与 $f(x_0-0)$ 都存在,但 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 也不存在.

②当 $x\to\infty$ 时,对含有 $a^x(a>0,a\neq1)$ 或 $\arctan x$ 或 $\operatorname{arccot}x$ 的函数极限,一定要对 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$ 分别进行讨论,若两者相等,则 $x\to\infty$ 时极限存在,否则不存在.

三、无穷小及其比较

（一）无穷小与无穷大的定义

【定义 1.4】 在某一极限过程中以零为极限的变量称为**无穷小（量）**.

（1）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，则称数列 $\{x_n\}$ 为**无穷小**，记为 $x_n = o(1)\ (n\to\infty)$；

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$，则称 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为**无穷小**，记为 $f(x) = o(1)\ (x\to x_0)$.

【定义 1.5】 （1）若 $\forall M>0$，$\exists$ 自然数 N，当 $n>N$ 时，$|x_n|>M$，则称数列 $\{x_n\}$ 为**无穷大（量）**，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

（2）若 $\forall M>0$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时，$|f(x)|>M$，则称当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 为**无穷大（量）**，记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

（3）若 $\forall M>0$，$\exists \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|>M$，则称当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 为**无穷大（量）**，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

类似可定义正无穷大（量）和负无穷大（量）.

【注】 要正确区别无穷大量与无界变量.

无穷大（量）是指在变量的某种趋向下，对应的函数值的变化趋势，其绝对值无限增大，要求适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 或 $|x|>X$ 的一切 x 都要满足 $|f(x)|>M$，其中 M 为任给的正数. 而无界函数定义中的不等式 $|f(x)|>M$，只要求在 $0<|x-x_0|<\delta$ 或 $|x|>X$ 中有一个 x 满足即可，并不要求所有的 x 都满足. 它们之间的联系是：如果 $f(x)$ 是无穷大，则 $f(x)$ 必定无界，反之 $f(x)$ 无界时，$f(x)$ 却不一定是无穷大.

为证数列 $\{x_n\}$ 无界，只需找出它的一个无穷大子列 $\{x_{n_k}\}$，即 $|x_{n_k}|\to\infty$.

为证函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界，只需找出一个数列 $\{x_n\}$，$x_n\in I$，使 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大数列.

为证数列的极限不是无穷大，只需找出一个收敛子列；为证函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不是无穷大，只需找出一个数列 $\{x_n\}$，其中 $x_n\to x_0\ (x_n\neq x_0)$，使数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

为证函数或数列无界但又不是无穷大，只需同时找出一个无穷大子列和一个收敛子列.

除用上述方法外，还常用下述命题证明数列或函数为无穷大量；证明数列或函数为无界变量.

【命题1】 （1）设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是正（或负）无穷大量，则 $\{x_n+y_n\}$ 也是正（或负）无穷大量. 但任意两个非同号的无穷大量之和可能不再是无穷大量.（例如 $\{n\}$ 和 $\{-n\}$ 之和）.

（2）$\{x_n\}$ 是无穷大量，$\{y_n\}$ 是有界变量，则 $\{x_n+y_n\}$ 是无穷大量.

（3）设 $\lim g(x)=\infty$，$\lim h(x)=\infty$，则 $\lim g(x)h(x)=\infty$.

（4）设 $\lim g(x)=A\ (A\neq 0$，可为 $\infty)$，$\lim h(x)=\infty$，则 $\lim g(x)h(x)=\infty$.

上面省写了的自变量 x 的趋限过程可以是 $x\to x_0$ 或 $x\to x_0+0$，$x\to x_0-0$，或 $x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$，但要求 $g(x)$，$h(x)$ 及 $g(x)h(x)$ 趋限过程相同. 有界函数与无穷小之积一定是无穷小.

命题1中当 $A=0$ 时，其结论不一定成立，而得到有界函数与无穷大之积不一定为无穷大.

【命题2】 有界变量与无界变量之和为无界变量.

【例 1.10】 设 $f(x) = x\tan x e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是 $f(0)=f(x)=0$

(A) 偶函数． (B) 无界函数． (C) 周期函数． (D) 单调函数．

【分析一】 由 $e^{\sin x}$ 有正下界：$e^{\sin x}\geq e^{-1}$ 及 x 和 $\tan x$ 无界，并利用 $f(x)$ 无界 $\Leftrightarrow$ 在 $f(x)$ 的定义域

中存在数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$，即可证$f(x)$无界.

设$x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{4}\ (n=1,2,\cdots)$，于是$f(x_n)=\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\to\infty\ (n\to\infty)$，即$f(x)$无界. 因此选(B).

【分析二】（排除法） 由于当$\sin x\neq 0$时$f(-x)=(-x)\tan(-x)e^{\sin(-x)}=x\tan x e^{-\sin x}\neq f(x)$，故$f(x)$不是偶函数. 由$f(0)=f(\pi)=0$，知$f(x)$不是单调函数. 又$f(x)$也不是周期函数，因此选(B).

[illegible] 设数列的通项为$x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & 若\ n\ 为奇数,\\ \dfrac{1}{n}, & 若\ n\ 为偶数,\end{cases}$ 则当$n\to\infty$时，x_n是

(A) 无穷大量. (B) 无穷小量. (C) 有界变量. (D) 无界变量.

【分析】 因为当n取奇数且趋于无穷大时，$x_n=\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}\to\infty$，当$n$取偶数且趋于无穷大时，$x_n=\dfrac{1}{n}\to 0$. 所以选(D).

（二）无穷小与极限，无穷小与无穷大的关系

▶1. **无穷小与极限的关系** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

▶2. **无穷小与无穷大的关系** 在同一极限过程中，

若$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

若$f(x)$为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小.

（三）无穷小阶的概念

【定义 1.6】 设在同一极限过程中，$\alpha(x)$，$\beta(x)$为无穷小，且存在极限$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=l$.

(1) 若$l\neq 0$，则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$在该极限过程中为**同阶无穷小**.

(2) 若$l=1$，则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$在该极限过程中为**等价无穷小**，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

(3) 若$l=0$，则称在此极限过程中$\alpha(x)$是比$\beta(x)$**高阶的无穷小**.

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$不存在（且不为$\infty$），则称$\alpha(x)$，$\beta(x)$不可比较.

【定义 1.7】 设在同一个极限过程中，$\alpha(x)$、$\beta(x)$为无穷小，以$\alpha(x)$为基本无穷小，若$\lim\dfrac{\beta(x)}{\alpha^k(x)}=l\neq 0$，即$\beta(x)$与$\alpha^k(x)$为同阶无穷小，则称$\beta(x)$是$\alpha(x)$的**$k$阶无穷小**.

（四）常见的等价无穷小

$x\to 0$时

$\sin x\sim x$， $\tan x\sim x$， $\arcsin x\sim x$， $\arctan x\sim x$，

$\ln(1+x)\sim x$， $e^x-1\sim x$， $a^x-1\sim x\ln a$， (1.2)

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$， $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.