配上海二期课改新教材

XINJIAOCAI SHUXUE TONGBU FENCENG DAOXUE

主编 齐 敏

# 新教材数学同步分层导学

## 八年级第一学期用

上海科学技术出版社

# 新教材数学

# 同步分层导学

八年级第一学期用

主编 齐 敏

上海科学技术出版社

## 内容提要

数学同步分层导学是与新教材内容紧密配合的学生同步辅导读物，旨在同步地对课堂内容进行补充，并为学生提供训练机会.本书是其中一册.

本书将每章内容按单元进行划分，每一单元由[综合导学]、[随堂应用]、[分层达标]等栏目组成，每章末还有[阅读与欣赏]、[研究性学习]栏目.整本书中附有[阶段测试]、[期末测试]及[提示与参考答案]等.

图书在版编目(CIP)数据

新教材数学同步分层导学/齐敏主编.—上海：上海科学技术出版社，2007.6(2008.6重印)
八年级第一学期用
ISBN 978-7-5323-8896-7

Ⅰ.新...　Ⅱ.齐...　Ⅲ.数学课—初中—教学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第041583号

责任编辑　周玉刚　朱先锋

上海世纪出版股份有限公司
上海科学技术出版社 出版、发行
(上海钦州南路71号　邮政编码:200235)
新华书店上海发行所经销　常熟市华顺印刷有限公司印刷
开本 787×1092　1/16　印张 9　字数 210 000
2007年6月第1版　2008年6月第2次印刷
印数：5 301－9 600
ISBN 978-7-5323-8896-7
定价：12.70元

# 出版说明

这套同步分层导学丛书是以上海市二期课改新教材为依据的学生同步辅导读物，内容紧密配合教材.本丛书按每学期一册编写，旨在同步地对课堂内容进行辅导，为学生提供训练机会，并成为课堂教学的有益的参考辅导读物.

本丛书将每章内容按单元进行划分，每一单元由[综合导学]、[随堂应用]、[分层达标]栏目组成，每章末还有[阅读与欣赏]、[研究性学习]栏目.整本书中附有[阶段测试]、[期末测试]及[提示与参考答案]等.

[综合导学]是对这一单元的知识要点、例题剖析、思维误区、方法指导、请你思考.

[随堂应用]是按课时需要，将每一单元内容分成多个[随堂应用]，即针对每一节课安排3～5题与课堂教学内容密切相关的练习题，让学生课后复习巩固之用.在每一单元中，如果分为4节课，就有4个[随堂应用]，其内容的深浅、顺序与课堂内容完全一致.也就是说，课堂上学什么内容，就安排相应的练习内容；如果课堂是复习，内容也就是有关前面的复习内容.

[分层达标]是对本单元的有关知识以试卷形式让学生进行训练，分为基础型、提高型两组题目.

[阅读与欣赏]是根据二期课改的新理念，旨在开拓学生的眼界，提高学生的学习兴趣.

[研究性学习]是根据二期课改的新理念，旨在让学生在探究的过程中，培养其创新能力.

[阶段测试]是在每学期某个阶段后安排两份阶段测试.

[期末测试]是在每学期期末时安排两份期末测试.

[提示与参考答案]给出了[随堂应用]、[分层达标]、[阶段测试]、[期末测试]的答案，对有难度的题目，进行详细解答.

本书主编为齐敏，参加本书编写的有：朱伟东、方志伟、孙永香、万兆云、江田等.本书由齐敏统稿.

**上海科学技术出版社**

**2007年6月**

# 目录



# 目录



# 第十五章　二 次 根 式

## 第一单元　二 次 根 式

### 综 合 导 学

### 知识要点

1. 理解二次根式的概念，领会字母“代”数思想.
2. 能根据二次根式中被开方数应满足的条件，确定所含字母的取值范围.
3. 掌握二次根式性质的基本运用.

### 例题剖析

**例 1**　下列各式中，哪些是二次根式？哪些不是二次根式？

$\sqrt[3]{8}$、$\sqrt{2}$、$\sqrt{2a^2}$、$\sqrt{-9}$、$\sqrt{x^2+4x+4}$、$\sqrt{-(x-4)^2}$、

$\sqrt{2a-1}\left(a<\dfrac{1}{2}\right)$、$\sqrt{x^2+2}$、$\sqrt{-5x}\,(x\leqslant0)$、$\sqrt{\dfrac{1}{(x+3)^2}}$、$\sqrt[5]{a^2}$.

**分析**　判断一个式子是不是二次根式，主要看它是否符合以下两点：
一是形式，根指数必须是2，否则就不是二次根式；
二是被开方数必须为非负数，否则也不是二次根式.

**解**　∵ $\sqrt[3]{8}$、$\sqrt[5]{a^2}$的根指数都不是2，所以它们不是二次根式.

∵　$\sqrt{-9}$、$\sqrt{2a-1}\left(a<\dfrac{1}{2}\right)$的被开方数是负数，它们无意义，

所以它们不是二次根式.

$\sqrt{\dfrac{1}{(x+3)^2}}$中，只有在$x+3\neq0$即$x\neq-3$时，才是二次根式.

$\sqrt{-(x-4)^2}$中，只有在$x=4$时，才是二次根式.

$\sqrt{2}$、$\sqrt{2a^2}$、$\sqrt{x^2+4x+4}$、$\sqrt{x^2+2}$、$\sqrt{-5x}\,(x\leqslant0)$它们在形式上，符合二次根式的条件，并且它们的被开方数都是非负数，因此它们都是二次根式.

**说明**　二次根式满足条件：(1)含有二次根号；(2)被开方数的值大于等于零.

**例 2**　当$x$取何值时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{-2x}$；　(2) $\sqrt{3-2x}$；　(3) $\sqrt{(x-1)^2}$；

(4) $\sqrt{\dfrac{1}{3x-6}}$；　(5) $\dfrac{\sqrt{x+4}}{x-3}$.

**分析** 本例应从两方面去考虑：一是二次根式中，被开方数必须为非负数；二是若式子中含有分式，必须使分母不等于零.

**解** (1) 由 $-2x\geqslant 0$，得 $x\leqslant 0$，

$\therefore$ 当 $x\leqslant 0$ 时，$\sqrt{-2x}$ 在实数范围内有意义；

(2) 由 $3-2x\geqslant 0$，得 $x\leqslant\dfrac{3}{2}$，

$\therefore$ 当 $x\leqslant\dfrac{3}{2}$ 时，$\sqrt{3-2x}$ 在实数范围内有意义；

(3) 由 $(x-1)^2\geqslant 0$，

$\therefore$ $x$ 为任何实数时，$\sqrt{(x-1)^2}$ 在实数范围内有意义；

(4) 由 $\dfrac{1}{3x-6}\geqslant 0$ 且 $3x-6\neq 0$，即 $3x-6>0$，得 $x>2$，

$\therefore$ 当 $x>2$ 时，$\sqrt{\dfrac{1}{3x-6}}$ 在实数范围内有意义；

(5) 由 $x+4\geqslant 0$ 且 $x-3\neq 0$，得 $x\geqslant -4$ 且 $x\neq 3$，

$\therefore$ 当 $x\geqslant -4$ 且 $x\neq 3$ 时，$\dfrac{\sqrt{x+4}}{x-3}$ 在实数范围内有意义.

**说明** 解此类题目主要考虑二次根式中的被开方数为非负数、分式中的分母不为零，进行求解.

**例 3** 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{9a^2}\ (a>0)$；　　(2) $\sqrt{\dfrac{48}{m^2n^3}}\ (m<0)$；

(3) $\sqrt{4a^2-8a^3}\ (a<0)$.

**分析** 化简二次根式首先要把被开方数化为一个数的完全平方的形式，再用 $\sqrt{a^2}=|a|$ 化简. 如被开方数是分式或多项式，则采用因式分解或通过分式运算，将被开方数化为乘积的形式，再利用公式化简.

**解** (1) $\sqrt{9a^2}=\sqrt{(3a)^2}=3a\ (a>0)$；

(2) $\sqrt{\dfrac{48}{m^2n^3}}=\sqrt{\dfrac{48n}{m^2n^4}}=\sqrt{\left(\dfrac{16}{m^2n^4}\right)\cdot 3n}=\sqrt{\dfrac{16}{m^2n^4}}\cdot\sqrt{3n}=-\dfrac{4}{mn^2}\sqrt{3n}\ (m<0)$；

(3) $\sqrt{4a^2-8a^3}=\sqrt{4a^2(1-2a)}=|2a|\sqrt{1-2a}=-2a\sqrt{1-2a}\ (a<0)$.

**说明** 利用性质 $\sqrt{a^2}=|a|$ 进行化简二次根式时，考虑移出根号的代数值的符号，得出结果.

## 思维误区

**例 4** 化简：

(1) $\sqrt{10^2-8^2}$；　(2) $\sqrt{\dfrac{9}{16}+\dfrac{1}{4}}$.

**错解** (1) 原式 $=10-8=2$；

(2) 原式 $=\sqrt{\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}$.

**分析** 错解套用了不成立的式子：$\sqrt{a^2\pm b^2}=\sqrt{a^2}\pm\sqrt{b^2}$，当被开方数是多项式时，应先分解因式化成积的形式，然后把根号内可开出的因式移到根号外.

**正解** (1) 原式 $=\sqrt{(10+8)(10-8)}=\sqrt{18\times 2}=6$;

(2) 原式 $=\sqrt{\dfrac{9}{16}+\dfrac{4}{16}}=\sqrt{\dfrac{13}{16}}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

**例 5** 已知 $xy>0$,化简二次根式 $x\sqrt{-\dfrac{y}{x^2}}$,正确结果为(　　).

(A) $\sqrt{y}$　　(B) $\sqrt{-y}$　　(C) $-\sqrt{y}$　　(D) $-\sqrt{-y}$

**错解** $x\cdot\sqrt{-\dfrac{y}{x^2}}=x\cdot\dfrac{1}{x}\sqrt{-y}=\sqrt{-y}$,选 B.

**分析** 错解是审题不细致引起的错误. 由已知条件 $xy>0$,可知 $x$、$y$ 同号,又根号内 $-\dfrac{y}{x^2}>0$,而 $x^2>0$,故 $y<0$, $\therefore$ $x<0$.

**正解** $x\sqrt{-\dfrac{y}{x^2}}=x\cdot\dfrac{1}{|x|}\sqrt{-y}=x\cdot\dfrac{1}{-x}\sqrt{-y}=-\sqrt{-y}$,应选 D.

## 方法指导

1. 二次根式中如何确定字母的取值范围应注意两点:

(1) 被开方数大于等于零;

(2) 若含有分式,则必须考虑分母不等于零.

2. 在化简二次根式进行因式开方时应注意两点:

(1) 考虑移出根号的代数式值的符号,若有必要,则分类讨论;

(2) 根号内的分子或分母移到根号外仍为分子或分母,另外审题时应注意题中的隐含条件.

## 请你思考

**1.** 已知 $\sqrt{a(x-a)}+\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{x-a}-\sqrt{a-y}$ 在实数范围内成立,其中 $a$、$x$、$y$ 是互不相同的实数,求 $\dfrac{x+y}{x-y}$ 的值.

**2.** 若 $|1\,999-a|+\sqrt{a-2\,000}=a$,求 $a-1\,999^2$ 的值.

## 随 堂 应 用

**应用一**

**1.** 当 $x$ 取何值时,下列各式在实数范围内有意义:

(1) $\sqrt{-1-3x}$;　　(2) $\sqrt{-\dfrac{2}{2x-1}}$;

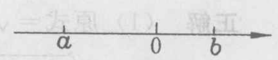
(3) $\sqrt{-a^2(a+1)}$;　　(4) $\sqrt{4x^2+4x+1}$.

**2.** 计算二次根式的值:

(1) $\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}$;　　(2) $\sqrt{(3-\pi)^2}$;

(3) $\sqrt{a^2-4a+4}\,(a<2)$;　　(4) $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}$,其中 $x=-2$.

3. 已知实数 $a$、$b$ 在数轴上对应点的位置如图所示.




（第 3 题）

化简：$\sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{(b-a)^2}$.

4. 已知：$y=\sqrt{2-x}+\sqrt{x-2}+5$，求$\dfrac{y}{x}$的值.

5. 写出一个含字母 $x$ 的二次根式，且仅当 $x>\dfrac{1}{2}$时，这个二次根式有意义.

**应用二**

1. 求下列各式成立时，$x$ 的取值范围：

(1) $\sqrt{(x-1)(x+2)}=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+2}$；

(2) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{3x+2}}=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{3x+2}}$.

2. 计算下列各题：

(1) $\dfrac{1}{5}\sqrt{75}$； (2) $\sqrt{(-36)\times(-48)}$；

(3) $\sqrt{1\dfrac{1}{5}\times 0.4}$； (4) $\sqrt{5^2+12^2}$.

3. 化简二次根式：

(1) $\sqrt{84ab^3}\,(a>0)$； (2) $\sqrt{\dfrac{1}{a^2bc^3}}\,(a>0,b>0,c>0)$；

(3) $\sqrt{m^2n^4+m^4n^2}\,(m\geqslant 0,n\geqslant 0)$.

4. 化简下列各式：

(1) $\sqrt{x^2-x+\dfrac{1}{4}}\left(x\leqslant\dfrac{1}{2}\right)$； (2) $(a-1)\sqrt{\dfrac{1}{1-a}}$.

5. 已知$\sqrt{a^3+3a^2}=-a\sqrt{a+3}$成立，求 $a$ 的取值范围.

## 分 层 达 标

### 基础型

**一、判断下列各式是不是二次根式 ***

1. $\sqrt{-2}$. ( )

2. $\sqrt{a^2+1}$. ( )

3. $\sqrt{(a-2)^2}$. ( )

4. $\sqrt[3]{a+5}$. ( )

**二、填空题**

5. $(\sqrt{3})^2=$______，$(-3\sqrt{2})^2=$______.

6. 计算：$\sqrt{(-2)^2}=$______，$\sqrt{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2}$ ______.

* 正确的在题后括号内打“√”，错误的打“×”，下同.

7. 如果$\sqrt{1-2a}$有意义，那么 $a$ 的取值范围是______.

8. 如果$\sqrt{4x^2+12x+9}$有意义，那么 $x$ 的取值范围是______.

9. 化简：当 $m\geqslant 0$ 时，$\sqrt{m^2}=$______，当 $m<0$ 时，$\sqrt{m^2}=$______.

10. 化简：$\sqrt{(\sqrt{2}-1.4)^2}=$______，$\sqrt{(\sqrt{7}-2\sqrt{2})^2}=$______.

11. 如果：$\sqrt{(2m-1)^2}=1-2m$，则 $m$ 的取值范围是______.

12. 如果$\sqrt{x-1}+(y-2)^2=0$，那么$\sqrt{(3-2x)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-y)^2}$的值为______.

## 三、选择题*

13. 下列各式一定是二次根式的是（　　）.

(A) $\sqrt{-5}$　　(B) $\sqrt[3]{3a^2}$　　(C) $\sqrt{2x^2+1}$　　(D) $\sqrt{x+5}$

14. 如果$\sqrt{4x-5}$是二次根式，那么 $x$ 应满足的条件是（　　）.

(A) $x=\frac{5}{4}$　　(B) $x<\frac{5}{4}$　　(C) $x\geqslant\frac{5}{4}$　　(D) $x\leqslant\frac{5}{4}$

15. 如果$(\sqrt{3a-2})^2=\sqrt{(2-3a)^2}$，那么 $a$ 应满足（　　）.

(A) $a=\frac{2}{3}$　　(B) $a\leqslant\frac{2}{3}$

(C) $a\geqslant\frac{2}{3}$　　(D) $a$ 可取一切实数

16. 下列各式中正确的是（　　）.

(A) $\sqrt{\frac{a}{2b^2}}=\frac{1}{2b}\sqrt{a}$　　(B) $\sqrt{\frac{7x}{12y^3}}=\frac{1}{6y^2}\sqrt{21xy}$

(C) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$　　(D) $5\sqrt{\frac{2a}{5}}=\sqrt{2a}$

## 四、解答题

17. 当 $x$ 取何值时，下列各式在实数范围内有意义：

(1) $\sqrt{-1-3a}$；　　(2) $\sqrt{-\frac{3}{x+2}}$.

18. 计算和化简：

(1) $\sqrt{4\times 21}$；　　(2) $\sqrt{16^2-12^2}$；

(3) $2\sqrt{\frac{3}{8}}$；　　(4) $\sqrt{18x^4y^3z^5}\,(y>0)$；

(5) $\sqrt{\frac{x^2-1}{xy-y}}\,(y<0)$.

19. 已知 $5\sqrt{2-x}+3\sqrt{x-2}=y+1$，求$\sqrt{x-6y}$的值.

* 本书中的选择题，每小题都给出了代号为 A、B、C、D 四个结论，其中只有一个结论是正确的，把你认为正确的结论的代号写在题后的括号内，下同.

## 提高型

一、填空题

1. 化简：$\sqrt{(3-x)^2}\,(x>3)=$______，$\sqrt{(6\sqrt{5}-5\sqrt{6})^2}=$______.

2. 如果 $\sqrt{(x+2)^2}=-x-2$，那么 $x$ 的取值范围______.

3. 若 $\sqrt{\dfrac{3-y}{3+y}}=\dfrac{\sqrt{3-y}}{\sqrt{3+y}}$ 成立的条件是______.

4. 计算：$\sqrt{\dfrac{8b^3}{81a^2}}\,(a>0)=$______，$\sqrt{15^2+20^2}=$______.

5. 当 $a<0$ 时，化简：$b^2\sqrt{\dfrac{a}{b}}=$______.

6. 已知 $2<x<3$，化简 $\sqrt{(x-2)^2}+|x-4|=$______.

7. 当式子 $\sqrt{\dfrac{x-2}{4}}$ 表示绝对值最小的实数时，$x$ 的值为______.

8. 已知 $\sqrt{3a+2}+\sqrt{2b+3}=0$，则 $a^{2001}b^{2000}=$______.

二、选择题

9. 下列各式中，$x$ 可以取一切实数的是（　　）.

(A) $\sqrt{x}$　　(B) $(\sqrt{-x})^2$　　(C) $\sqrt{x^2}$　　(D) $\dfrac{-x}{|x|}$

10. 当 $\dfrac{\sqrt{3x+6}}{\sqrt{3-x}}$ 有意义时，$x$ 的取值范围是（　　）.

(A) $x\leqslant3$　　(B) $x\geqslant-2$　　(C) $-2\leqslant x\leqslant3$　　(D) $-2\leqslant x<3$

11. 若 $\sqrt{a^3-a^2-a+1}=(1-a)\sqrt{a+1}$，则满足的条件是（　　）.

(A) $a\geqslant1$　　(B) $-1\leqslant a\leqslant1$　　(C) $a>-1$　　(D) $a\leqslant1$

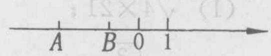
12. 如图所示，数轴上点 $A$ 与点 $B$ 分别对应实数 $a$、$b$，下列四个等式中正确的等式的个数是（　　）.

① $(\sqrt{a})^2=a$；　　② $\sqrt{a^2}=-a$；

③ $\sqrt{(a+b)^2}=a+b$；　　④ $\sqrt{(b-a)^2}=b-a$.

(A) 1　　(B) 2

(C) 3　　(D) 4




（第 12 题）

三、解答题

13. $x$ 取何值时，下列各式在实数范围内有意义：

(1) $\sqrt{1+x}+\sqrt{-1-2x}$；　　(2) $\dfrac{\sqrt{3-x}}{|x|-1}$.

14. 计算和化简：

(1) $\sqrt{189\times96\times56}$；

(2) $\dfrac{a^2b}{2c}\sqrt{\dfrac{8c^3}{a^3b}}\,(a>0,b>0)$；

(3) $\dfrac{m}{m-n}\sqrt{m^3-2m^2n+mn^2}\,(m<n)$;

(4) 化简：$a^2\sqrt{-\dfrac{4b^2}{a}}\,(b>0)$.

**15.** 已知 $x,y$ 是实数，且 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-16}+\sqrt{16-x^2}+2}{x-4}$，求 $\sqrt{xy}$.

# 第二单元　最简二次根式和同类二次根式

## 综合导学

### 知识要点

1. 理解最简二次根式、同类二次根式的意义.
2. 会将二次根式化为最简二次根式，会判别同类二次根式、合并同类二次根式.

### 例题剖析

**例 1**　把下列根式化为最简二次根式：

(1) $\sqrt{294x^5y^7z}\,(y>0)$；　　(2) $-\sqrt{\dfrac{27b^4c}{8a}}\,(a>0)$；

(3) $\sqrt{\dfrac{25a^3+50a^2}{a^2-4}}\,(a>2)$；　　(4) $\sqrt{-\dfrac{z^3}{36x^2y^4}}\,(x>0,y>0,z<0)$.

**分析**　要将二次根式化简成最简二次根式，也就是要使被开方数的因数、因式的指数为 1，被开方数不含分母. 因此如果被开方数为整式，先把因数(式)分解，把开得尽方的因数(式)开出来. 如果被开方数是分数(式)，就用分式的基本性质、二次根式性质化简.

**解**　(1) $\sqrt{294x^5y^7z}=\sqrt{7^2\cdot 6\cdot x^4\cdot x\cdot y^6\cdot y\cdot z}=7x^2y^3\sqrt{6xyz}$；

(2) $-\sqrt{\dfrac{27b^4c}{8a}}=-\sqrt{\dfrac{3^2\cdot 3b^4\cdot c\cdot 2a}{8a\cdot 2a}}=-\dfrac{3b^2}{4a}\sqrt{6ac}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{25a^3+50a^2}{a^2-4}}=\sqrt{\dfrac{25a^2(a+2)}{(a+2)(a-2)}}=5a\sqrt{\dfrac{1}{a-2}}$

$=5a\sqrt{\dfrac{a-2}{(a-2)(a-2)}}=\dfrac{5a}{a-2}\sqrt{a-2}$.

(4) $\sqrt{-\dfrac{z^3}{36x^2y^4}}=\sqrt{\dfrac{-z^2\cdot z}{(6xy^2)^2}}=\dfrac{|z|}{6xy^2}\sqrt{-z}=-\dfrac{z}{6xy^2}\sqrt{-z}$.

**说明**　化二次根式为最简二次根式要满足两个条件：(1)被开方数中的各因数或因式的指数都为 1，(2)被开方数中不含分母. 本例第(3)题被开方数的分子、分母是多项式时，应先分解因式后再化简. 第(4)题注意条件 $z<0$，根据 $\sqrt{a^2}=|a|$，所以 $\sqrt{-z^3}=-z\sqrt{-z}$.

**例 2**　从下列二次根式中指出哪些是同类二次根式：

(1) $5\sqrt{\dfrac{1}{5b}}$；　　(2) $\sqrt{\dfrac{16}{5}b}$；　　(3) $5\sqrt{0.2}$；

(4) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3a}}$；　(5) $\frac{9}{2}\sqrt{2\frac{2}{9}}$；　(6) $3\sqrt{\frac{32}{27}a}$.

**分析**　几个二次根式化成最简二次根式后，如果被开方数相同，那么这几个二次根式就叫做同类二次根式，因此实质上，我们就是要把题目给的几个二次根式化简，然后根据观察就能得出结论.

**解**　(1) $5\sqrt{\frac{1}{5b}}=\frac{\sqrt{5b}}{b}$；　(2) $\sqrt{\frac{16}{5}b}=\frac{4}{5}\sqrt{5b}$；

(3) $5\sqrt{0.2}=\sqrt{5}$；　(4) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3a}}=\frac{1}{2a}\sqrt{6a}$；

(5) $\frac{9}{2}\sqrt{2\frac{2}{9}}=\frac{9}{2}\sqrt{\frac{20}{9}}=3\sqrt{5}$；　(6) $3\sqrt{\frac{32}{27}a}=\frac{4}{3}\sqrt{6a}$.

所以，(1)与(2)是同类二次根式；(3)与(5)是同类二次根式；(4)与(6)是同类二次根式.

**说明**　判断几个根式是否是同类二次根式，应在化为最简二次根式之后再进行判断，不能看表面. 例如 $\sqrt{18}$ 与 $\sqrt{8}$，似乎不是，化简后可发现它们是同类二次根式.

**例 3**　若最简根式 $\sqrt[a+7b]{2a+5b-7}$ 和 $\sqrt{a+3b}$ 是同类二次根式，求 $a+b$ 的值的平方根.

**分析**　根据同类二次根式的定义可知根指数为 2，被开方数相同，这样就可以列出二元一次方程组，求 $a$、$b$ 的值，特别注意，$a+b$ 的平方根是 $\pm\sqrt{a+b}$.

**解**　由同类二次根式定义，得

$$\begin{cases}a+7b=2,\\2a+5b-7=a+3b.\end{cases}$$

解方程组，得 $\begin{cases}a=9,\\b=-1.\end{cases}$

所以，$a+b$ 的平方根是 $\pm\sqrt{a+b}=\pm\sqrt{9-1}=\pm2\sqrt{2}$.

**说明**　题目中的"最简"的条件是至关重要的. 例如：$\sqrt{8}$ 与 $\sqrt{2}$ 是同类二次根式，但它们被开方数却不相同，只有化为最简二次根式后被开方数才相同，因此同类二次根式必须有最简根式作为大前提.

## 思维误区

**例 4**　化简：$(a-1)\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$.

**错解**　原式 $=(a-1)\cdot\sqrt{-\frac{(a-1)}{(a-1)^2}}=(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}\sqrt{-(a-1)}=\sqrt{1-a}$.

**分析**　忽视了根式中的隐含条件，被开方数 $-\frac{1}{a-1}\geqslant0$，所以 $a-1<0$，因此 $\sqrt{-\frac{1}{a-1}}=\frac{1}{|a-1|}\sqrt{1-a}=-\frac{1}{a-1}\sqrt{1-a}$.

**正解**　原式 $=(a-1)\cdot\frac{1}{-(a-1)}\sqrt{-(a-1)}=-\sqrt{1-a}$.

**例 5**　化简：$\sqrt{m^2+\frac{1}{m^2}-2}$（其中 $m<1$）.

**错解**　原式 $=\sqrt{\left(m-\frac{1}{m}\right)^2}=m-\frac{1}{m}$.

**分析**　虽然题目中的字母 $m$ 给出了条件，但由于一个数和它的倒数之差的大小一时难以确定，必须对

它进行分类讨论方可定夺．而错解就忽视了对字母的讨论，出现了错误．

**正解**　原式$=\sqrt{\left(m-\dfrac{1}{m}\right)^2}=\left|m-\dfrac{1}{m}\right|$．

当$-1<m<0$时，原式$=m-\dfrac{1}{m}$；

当$m<-1$或$0<m<1$时，原式$=\dfrac{1}{m}-m$．

## 方法指导

我们总结一个二次根式化成最简二次根式的方法：

（1）把根号下的带分数或绝对值大于1的小数化成假分数，把绝对值小于1的小数化成分数；

（2）被开方数是多项式的要进行因式分解；

（3）使被开方数不含分母；

（4）将被开方数中能开方的因数或因式用它的正平方根代替后移到根号外；

（5）约分．

对于一道具体的题目来说，以上几个步骤不一定都用到，可根据题目特点做决定，以免舍简求繁．今后有关计算、化简，其结果都要化成最简二次根式．

## 请你思考

想想根号外面的数是怎么移到根号里面的？

$2\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{2\dfrac{2}{3}}$，

$3\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\sqrt{3\dfrac{3}{8}}$，

$4\sqrt{\dfrac{4}{15}}=\sqrt{4\dfrac{4}{15}}$，

$5\sqrt{\dfrac{5}{24}}=\sqrt{5\dfrac{5}{24}}$．

用含有$n$（$n$为正整数）的式子表示出这个规律来，并加以证明你得出的规律．

## 随 堂 应 用

**应用一**

**1.** 下列根式中，是最简二次根式是______．

$\sqrt{2}$，　$\sqrt{0.1}$，　$\sqrt{x^2+1}$，　$\dfrac{\sqrt{a}}{2}$，　$\sqrt{a^2+b^2}$，　$\sqrt{a^2b}$，$\sqrt{\dfrac{1}{3}}$．

**2.** 如果$\dfrac{m}{\sqrt{m^2}}=1$，那么$m$的取值范围是______．

**3.** 计算下列各题：

（1）$\sqrt{\dfrac{11}{50}}$；　　　　（2）$\sqrt{1.44\times1.21}$；

(3) $-\sqrt{13^2-5^2}$；

(4) $\sqrt{3\frac{1}{16}}\times\sqrt{2\frac{14}{25}}$.

4. 化简下列各题：

(1) $\sqrt{512ab^2}(b\geqslant0)$；

(2) $\sqrt{x^2+x^4}(x\geqslant0)$；

(3) $\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}(x<\frac{1}{2})$；

(4) $\frac{-2mn}{m-3n}\sqrt{\frac{(m-3n)^2}{2mn}}(0<m<3n)$.

5. 已知：$\sqrt{x^2+8x+16}+\sqrt{y-5}=0$，

求：$\sqrt{-\frac{x}{y}}$的值.

**应用二**

1. 在$\sqrt{\frac{1}{3}}$，$\sqrt{18}$，$\sqrt{75}$，$\sqrt{15}$，$\sqrt{12}$，$\sqrt{27}$，$\sqrt{\frac{1}{6}}$中，与$\sqrt{3}$是同类二次根式的是______.

2. 在$\sqrt{4a^3}$，$\sqrt{\frac{1}{a}}$，$\sqrt{a^2}$，$\sqrt{6a}$，$\sqrt{\frac{a}{5}}$中，与$\sqrt{a}$是同类二次根式的是______.

3. 若最简二次根式$\sqrt{2a-1}$与$\sqrt{11-4a}$是同类二次根式，则$a=$______.

4. 当$a=$______时，$\sqrt{4a+2}$与$\sqrt{2}$是同类二次根式(只需写一个满足要求的数).

5. 合并下列各式中的同类二次根式：

(1) $3\sqrt{5}+(-2\sqrt{5})+\frac{1}{2}\sqrt{5}$；

(2) $2\sqrt{75}-(\sqrt{27}+\sqrt{12})$；

(3) $\frac{2}{3}\sqrt{9x}+2\sqrt{\frac{x}{4}}-3x\sqrt{\frac{1}{x}}$；

(4) $2a\sqrt{3ab^2}-\frac{b}{3}\sqrt{27a^3}+4ab\sqrt{\frac{3}{4}a}$.

## 分 层 达 标

### 基础型

**一、填空题**

1. 下列二次根式中：$\sqrt{45a}$，$\sqrt{30}$，$\sqrt{2\frac{1}{2}}$，$\sqrt{40b^2}$，$\sqrt{54}$，$\sqrt{17(a^2+b^2)}$是最简二次根式的有______.

2. 二次根式$\sqrt{12}$，$2\sqrt{6}$，$\sqrt{\frac{1}{27}}$，$\frac{1}{3}\sqrt{45}$，$3\sqrt{48}$中的同类二次根式是______.

3. 计算：$\sqrt{2}+\sqrt{8}=$______，$3\sqrt{a}-2\sqrt{a}=$______.

4. 当$x$______时，$\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}=-1$.

5. 若最简二次根式$3\sqrt{3x+1}$与$\frac{5}{4}\sqrt{8+2x}$是同类二次根式，则$x=$______.

6. 如果有理数$a$，$b$满足$\sqrt{16}+\sqrt{18}+\sqrt{\frac{1}{8}}=a+b\sqrt{2}$，则$a=$______，$b=$______.

7. 化简：$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(2\sqrt{3}-4)^2}=$______.

8. 如果 $\sqrt{x-1}+(y-2)^2=0$，那么 $\sqrt{(3-x)^2}+\sqrt{(y-\sqrt{5})^2}=$ ________.

## 二、选择题

9. 下列各式中计算正确的是(　　).

(A) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$　　(B) $\sqrt{\dfrac{27}{3}}=\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{\dfrac{b}{4a}}=\dfrac{1}{2a}\sqrt{b}$　　(D) $\sqrt{\dfrac{2}{9}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{2}$

10. 在二次根式 $\sqrt{9x}$，$\sqrt{45}$，$\sqrt{\dfrac{ab}{4}}$，$\sqrt{ab}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sqrt{14}$，$-\sqrt{a^2b}$ 中，最简二次根式的个数是(　　).

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

11. 下列二次根式经化简后与 $\sqrt{3}$ 是同类二次根式的是(　　).

(A) $\dfrac{1}{\sqrt{27}}$　　(B) $\sqrt{54}$　　(C) $\sqrt{8}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{18}}{2}$

12. 化简：$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$ 正确的是(　　).

(A) $1-\sqrt{3}$　　(B) $-1-\sqrt{3}$

(C) $\sqrt{3}-1$　　(D) 以上都不对

## 三、化简

13. $\sqrt{27}$.

14. $\sqrt{84ab^3}\,(b>0)$.

15. $2\sqrt{\dfrac{2}{27}}$.

16. $\sqrt{41^2-40^2}$.

17. $4\sqrt{\dfrac{y}{8x^3}}\,(x>0)$.

18. $\dfrac{x}{x^2-1}\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x^4}}\,(0<x<1)$.

## 四、合并同类二次根式

19. $3\sqrt{12}+4\sqrt{0.5}-\dfrac{2}{3}\sqrt{18}+3\sqrt{\dfrac{1}{3}}$.

20. $a\sqrt{\dfrac{1}{a}}+\sqrt{4a}-\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-b\sqrt{\dfrac{1}{b}}\right)$.

## 五、解答题

21. 化简：$\sqrt{\dfrac{1-a-2a^2}{2a^2-5a+2}}$，并求当 $a=-\dfrac{1}{4}$ 时的值.

22. 当 $x=-3$ 时，二次根式 $m\sqrt{2x^2+5x+7}$ 的值为 $\sqrt{5}$，求 $m$ 的值.