普通高等教育“十一五”国家级规划教材

■数学类专业数学基础教程

# 高等代数

■ 张志让 刘启宽

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学类专业数学基础教程

# 高 等 代 数

张志让　刘启宽

高等教育出版社

## 内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材“数学类专业数学基础教程”的分册之一。作者根据新世纪数学类专业的要求，针对当前高等院校（特别是一般本科院校）的教学实际，选择合理的教学内容与体系结构，教学定位恰当。内容安排由浅入深，理论体系简捷、直观；强调矩阵初等变换的突出作用；注意化解理论难点，便于学生理解掌握；易教易学，有利于学生数学素质的培养。

全书包括矩阵、线性方程组与矩阵初等变换、行列式、向量组的线性相关性、多项式、线性空间、线性变换、λ-矩阵、向量的正交性、二次型共十章，各章配有适量的习题，书末附有习题答案。

本书可作为高等学校数学类专业教材，也可供其他理工科教师和学生使用。

**图书在版编目（CIP）数据**

高等代数/张志让，刘启宽．—北京：高等教育出版社，2008.1

ISBN 978-7-04-022590-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①张…②刘… Ⅲ. 高等代数-高等学校-教材 Ⅳ. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 190407 号

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 购书热线 | 010-58581118 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | 免费咨询 | 800-810-0598 |
| 邮政编码 | 100011 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 总　　机 | 010-58581000 | | http://www.hep.com.cn |
| | | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 经　　销 | 蓝色畅想图书发行有限公司 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　　刷 | 廊坊市科通印业有限公司 | 畅想教育 | http://www.widedu.com |
| 开　　本 | 787×960　1/16 | 版　　次 | 2008 年 1 月第 1 版 |
| 印　　张 | 20.75 | 印　　次 | 2008 年 1 月第 1 次印刷 |
| 字　　数 | 380 000 | 定　　价 | 26.00 元 |



**物料号　22590-00**

# 数学类专业数学基础教程编委会

# 前　言

《高等代数》是普通高等教育“十一五”国家级规划教材“数学类专业数学基础教程”的分册之一，介绍高等代数的基本知识，内容包括：矩阵，线性方程组及矩阵初等变换，行列式，向量组的线性相关性，多项式，线性空间，线性变换，$\lambda$－矩阵，向量的正交性，二次型等十章，各章配有适量的习题，并在书末附有习题答案。本书教学时数约为150学时。

本书根据新世纪数学类专业对学生数学素质的要求，针对当前高等院校（特别是一般本科院校）数学类专业的教学实际，选择合理的教学内容与结构体系。编者在总结多年教学改革与实践经验的同时，还吸收了国内外优秀教材（例北京大学数学系几何与代数教研室代数小组编的《高等代数》）的长处，对传统高等代数的内容与体系作了较大幅度的调整。本书主要特色体现在：

## 一、紧扣课程本质，选择合理的教材内容与结构体系

在保证教材科学性的前提下，内容安排由浅入深，采用简捷、直观的理论体系。首先，合理安排教材的内容次序。教材中将矩阵、线性方程组两章内容放在行列式一章前面。对线性方程组的内容作分段处理，第二章中仅介绍高斯消元法，至于线性方程组解的结构则放在后面的向量组的线性相关性一章中，作为向量组线性相关性理论的一个应用，这样安排是为了让学生不要过早地接触一些抽象的理论。其次，恰当选择教材的理论体系，使理论的叙述和推导过程简化。从齐次线性方程组解的两种不同情况出发，直接建立向量组线性相关性的概念以及几个与线性方程组相关的关于向量间线性关系的命题，从而就可以用矩阵初等变换来解决这类问题。这样就大大地降低了向量组线性相关性研究的抽象性与复杂性。

## 二、强调矩阵初等变换的突出作用

本书尽可能地使用矩阵初等变换去解决教材牵涉的离散量的计算问题。例如，矩阵运算、向量间线性关系的确定、线性方程组的求解、行列式的计算等，把矩阵初等变换作为贯穿全书的计算工具。为实现此目的，我们较早地引入矩阵的初等变换的概念，介绍它们的一般消元程序，研究它们的一些

重要性质，并且强调在不同计算格式中使用的不同初等变换的共性及差异。这样就可以大大地简化计算过程，同时用同一种计算手段来解决不同的计算问题，有利于计算过程及格式的程序化。不仅如此，我们还把矩阵初等变换作为理论推导的重要手段。利用矩阵初等变换建立一些中心定理，使它们的后继内容易于展开；不少定理的证明中尽可能使用矩阵初等变换，使这些证明比较直观，易于理解，且使命题证明过程与相关的计算过程紧密结合。

## 三、注意化解理论难点，便于学生理解掌握

对于线性空间、线性变换等抽象概念，我们首先讨论学生熟知的实例，从中抽象出它们的共同特点，再得出这些概念的一般定义的框架。这样可以帮助学生理解并掌握数学概念的一般抽象过程以及它们的应用背景。根据一般本科院校教学的实际需要，我们大大地细化了理论部分的叙述过程（特别是一些重要定理的证明过程），并且结合各章节内容增设相当数量的例题，使学生更好地理解知识内容。

## 四、选择适当的教学定位

为了适应高等教育从精英教育到大众化教育过渡的需要，针对一般本科院校的教学实际，我们选择合理的教学定位。考虑到一般本科院校数学类专业主要培养应用型人才，我们在本书编写过程中通过合理选取理论体系适当降低教材的理论难度，并且在保证教材内容科学性与完整性的前提下删除传统教材中的某些内容。例如，本教材不包括行列式的拉普拉斯定理、二元高次方程组、酉空间、双线性函数与辛空间等内容，对多元多项式及其中的对称多项式等内容进行简化处理。在习题选取方面也采取少而精的原则，尽量避免偏题难题。当然，根据应用型人才的知识需求，我们通过强调矩阵初等变换的作用，适当加强学生计算能力的培养。

总之，本书教学定位适当，内容选择合理；理论体系构思新颖，科学性强；文字通俗易懂，可读性与可施教性强。

本书的第一、二、三、四、五、六、八章以及第七章§1、§3、§5由张志让执笔，第七章§2、§4以及第九、十章由刘启宽执笔，全书由张志让统稿。“数学类专业数学基础教程”编委会的全体成员对本书进行了初审，提出了不少修改意见。本书由首都师范大学石生明教授及北京航空航天大学李尚志教授主审，他们提出了重要的修改意见，谨向他们表示衷心的感谢。在编写过程中，我们得到高等教育出版社的关心和帮助，也得到成都信息工程学院计算科学系的同事和研究生的不少帮助，在此一并致谢。

虽然我们的目的是要使本书成为一本既具有新意又便于施教的教材，但是由于经验和水平有限，书中不足之处恳请各位专家及读者提出宝贵意见。

编　者

2007年3月

# 目　录

# 第一章

# 矩　　阵

矩阵是高等代数的主要研究对象之一，它在数学、物理学、工程技术以及社会科学等领域都有广泛的应用. 本章主要介绍矩阵的概念、矩阵的运算及分块矩阵.

## §1　数域

在对高等代数的重要研究对象的讨论中，我们总是以一个预先给定的数域作为基础. 在本节中我们介绍数域的一般概念.

在中学我们熟悉的数的集合有：全体整数组成的集合 $\mathbf{Z}$，全体有理数组成的集合 $\mathbf{Q}$，全体实数组成的集合 $\mathbf{R}$，全体复数组成的集合 $\mathbf{C}$. 对于任意给定的数集，我们常常考虑该数集中的任意两个数关于某种运算的运算结果是否仍然在这个数集中. 如果数的非空集合 $P$ 中的任意两个数作某种运算的结果都仍在 $P$ 中，我们称 $P$ 对这种运算是封闭的.

显然数集 $\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 都包含 0，1，并且分别对于数的加法、减法、乘法与除法（除数不为零）都是封闭的. 而数集 $\mathbf{Z}$ 对于除法并不封闭，这是因为对于任意 $a$，$b\in\mathbf{Z}$，$\dfrac{a}{b}$不一定在 $\mathbf{Z}$ 中. 把数集 $\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 的这些共同性质抽象出来，就可以得到数域的定义.

**定义 1.1**　设 $P$ 是复数域 $\mathbf{C}$ 的一个子集，如果 $P$ 包括 0 与 1，并且 $P$ 对于数的加法、减法、乘法与除法（除数不为零）分别都是封闭的，那么称 $P$ 为一个数域.

按照这个定义知道数集 $\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 都是数域，而数集 $\mathbf{Z}$ 不是数域.

数域有一个重要的性质，即所有的数域都包含有理数域作为它的一部分.

事实上，设 $P$ 是一个数域，由定义，$P$ 包含 1. 根据 $P$ 对于加法封闭性，$1+1=2$，$2+1=3$，…，$n+1=n+1$，…全在 $P$ 中，再由 $P$ 对减法的封闭性，$0-n=-n$ 也在 $P$ 中，因为 $P$ 包含全体整数，任何一个有理数域都可以表示成两个整数的商，由 $P$ 对除法的封闭性，即得 $P$ 包含有理数域作为它的一部分.

**例 1.1** 证明：数集 $\mathbf{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}\mid a, b\in\mathbf{Q}\}$ 是一个数域.

**证** 显然，数集 $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ 包含 0 与 1，并且它对于加减法是封闭的. 现在证明它对乘法、除法也是封闭的. 我们知道

$$(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})=(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}.$$

因为 $a$，$b$，$c$，$d$ 都是有理数，所以 $ac+3bd$，$ad+bc$ 也是有理数. 这就说明 $(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})$ 还在 $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ 中，所以 $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ 对于乘法是封闭的.

设 $a+b\sqrt{3}\neq 0$，于是 $a-b\sqrt{3}$ 也不为零，而

$$\frac{c+d\sqrt{3}}{a+b\sqrt{3}}=\frac{(c+d\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})}{(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})}=\frac{ac-3bd}{a^2-3b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-3b^2}\sqrt{3},$$

因为 $a$，$b$，$c$，$d$ 是有理数，所以 $\dfrac{ac-3bd}{a^2-3b^2}$，$\dfrac{ad-bc}{a^2-3b^2}$ 也是有理数. 这就证明了 $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ 对于除法的封闭性.

所以，$\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ 是一个数域. 证毕.

## §2 矩阵的概念

### 一、引例

某计算机公司有三个销售门市部，销售四种计算机. 它在某月内的销售情况如表 1.1 所示.

**表 1.1** 单位：台

| 计算机品种 / 销售数 / 门市部 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 150 | 200 | 100 | 0 |
| 2 | 170 | 300 | 50 | 210 |
| 3 | 320 | 160 | 10 | 230 |

如果我们用 $a_{ij}$ $(i=1, 2, 3; j=1, 2, 3, 4)$ 表示第 $i$ 个门市部销售第 $j$ 种计算机的数量（如 $a_{14}=0$，$a_{23}=50$，$a_{32}=160$ 等），那么我们就可以把上述

的计算机销售情况表 1.1 简化成一个 3 行 4 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} 150 & 200 & 100 & 0 \\ 170 & 300 & 50 & 210 \\ 320 & 160 & 10 & 230 \end{pmatrix}.$$

一般地，如果问题所牵涉的数据是以表格形式出现的，那么这些数据常常用这种简化的数表来表示.

## 二、矩阵的定义

**定义 1.2** 由数域 $P$ 中 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 $m$ 行 $n$ 列的矩形数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

称为 $P$ 上的 $m$ 行 $n$ 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵. 这 $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，其中 $a_{ij}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列元素.

元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵. (1.1) 式可以简记为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\text{或}\ \boldsymbol{A}=(a_{ij}),$$

$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

例如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 是一个 $3\times 4$ 矩阵.

由 $m$ 个关于 $n$ 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一次方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.2}$$

称为线性方程组. 线性方程组 (1.2) 的未知量的系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 可以组成一个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为方程组（1.2）的系数矩阵. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 添加方程组（1.2）的常数列，就得到一个 $m\times(n+1)$ 矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

称为方程组（1.2）的增广矩阵. 反之，如果已知一个线性方程组的增广矩阵，那么我们就可以写出这个方程组.

**例 1.2**　写出下列线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及增广矩阵 $\boldsymbol{B}$

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \quad\quad\quad -3x_4=1 \\ 5x_1-3x_2+4x_3+7x_4=0. \\ x_1+6x_2 \quad\quad\quad +8x_4=3 \end{cases}$$

**解**　该方程组的系数矩阵及增广矩阵分别是

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -3 & 4 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

两个矩阵的行数相等，列数也相等，就称它们是同型矩阵. 如果 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

那么就称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

## 三、特殊矩阵

下面我们列举几种常见的特殊类型的矩阵.

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

称为行矩阵，又称为行向量；只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵，又称为列向量.

元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$ 或者 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$. 注意：不同型的零矩阵是不同的.

行数与列数相同的矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 称为 $n$ 阶矩阵（或称为 $n$ 阶方阵），简记为