普通高等教育“十一五”国家级规划教材

组合学讲义

第二版

李乔

组合学是近年来发展最为惊人的数学领域之一。这种发展的推动力大部分来自计算机的日趋重要和计算机科学的必需；以及离散模型起主导作用的数学应用的要求。不过更经典的数学分支也已认识到，组合结构是很多数学理论的本质成分……

高等教育出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

组合学讲义

第二版

李　乔

高等教育出版社

内容简介

本书是1993年版《组合数学基础》的更名、修订并扩容新版，旨在介绍组合学(Combinatorics)的基本风貌。新版除了修订原有的组合计数方法、(0,1)-矩阵、集系的极值问题和Ramsey理论外，新增一章“例说图论”，又编译了当今组合学名家对组合学的内容、方法和精神的论述作为附录。

本书可作为高校数学类专业师生的教学参考书，也适合于广大数学爱好者浏览、选读或参考。

图书在版编目（CIP）数据

组合学讲义/李乔. — 2版. —北京：高等教育出版社，2008.1

ISBN 978-7-04-022578-5

Ⅰ. 组…　Ⅱ. 李…　Ⅲ. 组合数学　Ⅳ. O157

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第163562号

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　　次	1993年11月第1版
开　　本	850×1168　1/32		2008年1月第2版
印　　张	11.25	**印　　次**	2008年1月第1次印刷
字　　数	280 000	**定　　价**	17.00元

物料号　22578-00

“对有学问的人和对普通人一样,要回答‘什么是数学’这个问题,只能通过在数学中的切身体验,而不靠什么大道理。”

——摘译自 R·柯朗和 H·罗宾著

《What is Mathematics? (数学是什么?)》

第二版前言

本书是1993年版《组合数学基础》的更名、修订并扩容新版。十几年过去了,"组合数学(combinatorial mathematics)"一词已基本上从国际数学文献中淡出,正名为"组合学(combinatorics)"的是一个业已确立的数学分支,而且人们普遍认为它前程似锦。这里只举一个事例:匈牙利组合学家罗伐子(L. Lovász,1948—)因在图论、组合优化、理论计算机科学等领域的众多重大贡献而于1999年荣获用以表彰在世数学家终身成就的最高奖Wolf数学奖,他又从2007年起担任国际数学联盟(International Mathematical Union,IMU)的主席,IMU的秘书长则是德国组合学家葛鲁策(M. Grötschel). 这在十几年前是难以想象的。所以新版首先做的就是"更名"。

一个普通人在十几年前编写的一本平常小书想换个书名就重新出版,既无意义也没必要和可能,何况编者已处戒得之年,更不想图这种颇招人物议的"名声"。要出新版至少得有点新意,但要让老年人写出真有新意、又并非怀旧的科学新内容,又谈何容易!幸好编者算是个多年戍守组合学领域的小卒,一直关心着组合学的风起云涌,也时而为国内的《数学译林》提供一些高水平人士论说组合学的文章译稿,现在正好利用一些再添加一些编成"组合学名家论组合学的内容、方法和精神"作为新版的附录。此外,当然是对1993年版原有内容的全面修订,主要是纠错和删除一些过于陈旧的文献,再适当扩容,后者主要在第三章§3.4"计数问题回顾"这一节中,增写了一大段颇具可读性的"再论Catalan数列";又在原有八章后新写了可以单独成篇的第九章"例说图论"。

如此这般更名、修订并扩容之后，差强人意地编成现在这个有点新内容和时代气息的新版本。希望读者可以从中各取所需，多多少少知道一些以前不大了解的组合学内容，也算是编者为在我国传播并进而发扬光大组合学出了一点绵力。

编者衷心感谢高等教育出版社赏识、策划并出版本书新版，也诚挚感谢本书所引用素材的原作者们，特别是 N. Alon，T. Gowers，L. Lovász 和 R. Stanley 四位组合学名家，编者能够借他们的智慧之花献给我国读者而深感荣幸。

最后，编者愿借此新版悼念盛年早逝的骆新华副教授(1946—1998)。新华是编者在中科大数学系的同事，20 世纪 90 年代初赴英国牛津大学工作访学一年，回校后和编者谈起想为《组合数学基础》增写一章“Lovász 引理”。不幸谈后不久就检查出罹患鼻咽癌，但他在治疗期间仍继续准备撰写。后来，在 1995 年编者离开中科大前，新华说他已力不从心了，但他仍以一贯的细致认真交给编者一份抄写整齐的《组合数学基础》一书的详细勘误表。这次准备新版时，新华提供的这份勘误完全用上了。可惜编者无力补写出，从而读者也看不到新华想写的那一章“Lovász 引理”了，念及不胜感伤，谨此追记。

李　乔

2007 年 7 月于上海交通大学

第一版序言

组合数学,也叫组合学,是一个古老而又年青的数学分支。由于它在自然科学的众多学科,管理科学的很多分支以及数学中涉及有限多个对象的每个专题中的作用,尤其是因为它在计算机的理论和应用上举足轻重的地位,人们越来越认识到这个数学分支的重要性。事实上它也已成为当今发展最为迅速的数学分支之一。不过在我国大多数大学数学系的课程表中至今还没有它的位置。作者所在的中国科技大学数学系的情形有所不同:我们通常每隔二三年都在高年级作为选修课或"离散应用数学"专门化课开设一学期"组合数学基础"课,本书就是作者多次讲授这门课的自然产物。

编写本书主要有两个目的:

一、为各类大学的数学系提供高年级用的课程教材;

二、为具有一定数学素养的广大读者提供一本关于组合数学的篇幅不大并有少量习题和进一步深入的文献指南的读物。据作者所知,这类读者在我国大有人在。

这里必须对本书的内容选取做一些说明。现今组合数学的内容非常丰富,以作者的浅见,其基础理论内容似呈"两块一片"状分布。所谓"两块",指的是"组合计数"和"组合设计";而"一片"则是"两块"之间的广大区域的形象说法。"组合计数"主要研究相当具体的有限集合的计数问题,"组合设计"的主要目标是希望构造出各种特殊的有限集合,这些集合的元素受制于相当紧凑的约束条件,通常称为组态或构形。而在"一片"广大区域上则是五光十色、气象万千,各种"专区(专题)"争奇斗艳的场面。各种"专

区”渊源不同,景象迥异,人们致力于探求它们各自的量和质的特性,当然也希望发现一些共同的外观和内涵。对这“一片”似乎颇难用寥寥数语来准确地概括。

作者几经踌躇,量力量时,并在征询几位专家的意见后做出下面两个抉择:

一、在“两块”中割舍掉“组合设计”这一大块;

二、在“一片”中凸显“集系”这一概念。

希望这样能使本书的篇幅使人可亲可近,同时在内容处理上也稍有新意。

本书共八章,前五章比较完全地讲述了组合计数理论的最基础内容,后三章是“一片”中三个相对独立的“专区”。而集系的线索贯通其间。每章都有少量难度不大的习题,还有简短的注释,主要为进一步深入提供一些线索。根据以往的经验,作为一学期、每周四学时的教材内容,可选用“前六章加七、八章的部分小节”或者“前五章加六、七、八章的部分小节”的模式。总之,全讲则过多,只讲前五章则太少,但如果每周三学时,或者是半学期(不到十周)的课,那么可以有多种方案。

作者特别感谢科大数学系冯克勤教授、李炯生教授和同济大学应用数学系邵嘉裕教授对编写本书的始终不渝的支持、鼓励和帮助;非常感谢我国组合数学专家徐利治、魏万迪、朱烈、蔡茂诚教授和香港大学数学系萧文强博士的指教;感谢周振黎、康泰和林翠琴教授惠赠他们的著作;还要感谢现在分布在天南海北的科大数学系几届同学在没有教材的情况下学习这门课程的合作态度和容忍精神。衷心希望各位师友和读者批评指教。

李　乔

1992 年元月于中国科技大学

目　　录

记号说明:不加任何记号的各节构成"基本内容";加"+"的各节是"基本内容"的补充阅读内容;加"*"的是比基本内容略深一些的内容。如此注明仅作为阅读或组织不同水准教学的建议意见。

第一章　几类基本计数问题

本章将对几类基本计数问题作初步讨论．这些问题可以作为几种基本模式，对于以各种方式提出的具体计数问题，首先可尝试能否将其划归为这些模式之一．本章只使用通行于所有数学分支的论证方法，特别是这样的论证：为求有限集 A 的元素个数 $|A|$，设法建立从 A 到某个集 B 的双射，而其中 $|B|$ 已求得，从而 $|A|=|B|$，这种证明称为组合性证明．随后几章将结合本章的问题分别阐述解计数问题的几种常用的特定方法．

§1.1　排列、组合和二项式系数

A. 排列　元素取自集 S 的一个有序 k 元组 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 称为 S 上的一个 **k 元可重复排列**．这里的"可重复"一词表示元 $x_1,\cdots,x_k\in S$ 可能有些彼此相同．下面是这一概念的两种常见的等价表述．

"字母取自集 S 的一个长为 k 的字 $x_1x_2\cdots x_k$，简称为 S 上的一个 k 元字．"

"从集 $\{1,2,\cdots,k\}$ 到集 S 的一个映射 φ，其中 $\varphi(i)=x_i(i=1,\cdots,k)$．或记为

$$\varphi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_k\end{pmatrix}."$$

现在用"字"的说法给出关于排列个数的几个众所周知的公式．

以下起,$\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{N}_0$ 分别表示所有正整数的集和所有非负整数的集.①对 $n \in \mathbf{N}$,记$[n]=\{1,2,\cdots,n\}$.

公式(0)(乘积公式) 设 $k,n_1,\cdots,n_k \in \mathbf{N}$. W 是集 S 上 k 元字的一个集,它具有这样的性质:W 中字的第 1 个字母共有 n_1 种不同取法;当取定其中任意一个后,第 2 个字母共有 n_2 种不同取法;一般的,任意取定前 i 个字母后,W 中字的第 $i+1$ 个字母共有 n_{i+1}种不同取法($i=1,\cdots,k-1$).则 $|W|=n_1n_2\cdots n_k$. □

公式(1) n 元集上的 k 元字的个数是 n^k. □

公式(2) n 元集上字母不重复的 k 元字的个数 $P(n,k)=n(n-1)\cdots(n-k+1)$. □

以下记$(n)_k=n(n-1)\cdots(n-k+1)$,读作"$n$ 的降 k 阶乘";记 $n!=(n)_n$,读作"n 阶乘".规定当 $n \in \mathbf{N}_0$ 时$(n)_0=1$.公式(2)中当 $k=n$ 时的每个(字母不重复的)n 元字称为这个 n 元集的一个**全排列**.

公式(3) 设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.如果 S 上的一个字中字母 a_i 共出现 m_i 次($m_i \in \mathbf{N}_0, i=1,\cdots,n$),则称该字是 $a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n}$ 型的.对给定的 $m_1,\cdots,m_n \in \mathbf{N}_0$, $m_1+\cdots+m_n=k$,S 上的 $a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n}$ 型字的个数是

$$k!/m_1!\cdots m_n!$$

证 把 m_i 个 a_i 改成 m_i 个新字母 $x_{i1},\cdots,x_{im_i}$($i=1,\cdots,n$),则总共 $m_1+\cdots+m_n=k$ 个不同字母共有 $k!$ 个全排列.再在每个这样的全排列中把 $x_{i1},\cdots,x_{im_i}$仍都改为 a_i($i=1,\cdots,n$),则在 $k!$ 个全排列中产生了 S 上的所有 $a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n}$ 型字,而且每个字都重复出现了 $m_1!\cdots m_n!$ 次,故得公式(3). □

例 1.1 集 S 上的一个 **k 元环状字(或圆排列)** $\odot x_1x_2\cdots x_k$ 就

---

① 中华人民共和国国家标准"量和单位"规定:$\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{N}_+$ 分别表示非负整数集和正整数集.

是把属于 S 的 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 按顺时针方向依次排列成圆周状所得，这里的 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 可能有重复，而且 $\odot x_1x_2\cdots x_k$，$\odot x_2x_3\cdots x_kx_1$，$\cdots$，$\odot x_kx_1\cdots x_{k-1}$ 都表示同一环状字. 不难证明 n 元集上字母不重复的 k 元环状字的个数是 $(n)_k/k$.

证 由定义可知，每个 k 元不重复环状字可以表示成 k 种不同的普通字（或线状字），再由公式(2)即得结论. □

字母允许重复的环状字计数比较复杂，以后再讨论. 此外，S 上的 k 元环状字 $\odot x_1x_2\cdots x_k$ 有时也等价地表示为单向无限的周期序列 $x_1,x_2,\cdots,x_k,x_1,x_2,\cdots$.

B. 组合 元素取自集 S 的一个无序 k 元组 $\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 称为 S 上的一个 ***k* 元可重复组合**，也称为 S 上的一个 ***k* 元重集**. k 元重集中一个元出现的次数称为该元在这个重集中的**重数**.

关于组合个数有以下两个最基本的公式，其中第一个是熟知的.

公式(4) 一个 n 元集的 k 元子集（即 n 元集的 k 元不重复组合）的个数记为 $\binom{n}{k}$，则

$$\binom{n}{k}=\frac{(n)_k}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}. \square$$

公式(5) 一个 n 元集上的 k 元重集（即 n 元集的 k 元可重复组合）的个数记为 $\left(\binom{n}{k}\right)$，则

$$\left(\binom{n}{k}\right)=\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k-1}{n-1}.$$

证一 不妨设 n 元集为 $[n]$（$=\{1,2,\cdots,n\}$）. 则 $[n]$ 上的每个 k 元重集可按唯一确定的方式表示为 $[n]$ 上的 k 项递增数列 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)_{\leqslant}$，即数列 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，其中 $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k\leqslant$

n. 而$[n]$上 k 项递增数列的集又可按如下方式与$[n+k-1]$上 k 项严格递增数列的集一一对应:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_k)_{\leqslant} \mapsto (a_1+0, a_2+1, \cdots, a_k+k-1)_{<}.$$

易知后一集合一一对应于$[n+k-1]$的 k 元子集的集,所以三个集的元素个数都等于$\binom{n+k-1}{k}$.

证二 设 n 元集 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$,$M$ 是 S 上的一个 k 元重集,其中 a_i 在 M 中的重数是 $m_i(i=1,2,\cdots,n)$. 则 M 唯一地确定了 n 元不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=k \tag{1}$$

的一个非负整数解$(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(m_1, m_2, \cdots, m_n)$;反之亦然. 所以问题转为求方程(1)的非负整数解的个数. 为此,令 $y_i=x_i+1$ $(i=1, \cdots, n)$,则方程(1)的非负整数解集与方程

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=k+n \tag{2}$$

的正整数解集之间有自然的一一对应. 现在我们形象地表示方程(2)的每个正整数解:把 $n+k$ 个记号 $*$ 排成一行,相邻两个 $*$ 间形成一个空隙,总共有 $n+k-1$ 个空隙. 任意指定其中 $n-1$ 个空隙并在每个空隙处加一竖线$|$,这 $n-1$ 条竖线把 $n+k$ 个 $*$ 隔成 n 段,若从左到右的各段中 $*$ 的个数依次为 $g_1, g_2, \cdots, g_n$,则 $g_i \in \mathbf{N}$, $\sum_{i=1}^{n} g_i=n+k$, 从而$(y_1, y_2, \cdots, y_n)=(g_1, g_2, \cdots, g_n)$是方程(2)的一个正整数解. 反过来不难说明方程(2)的每个正整数解都可以这样得到. 例如,方程

$$y_1+y_2+y_3+y_4=7$$

的一个正整数解(1,2,1,3)相应于构图

$$* \mid * * \mid * \mid * * *.$$

因易知加进 $n-1$ 条竖线的方法一共有

$$\binom{n+k-1}{n-1}=\binom{n+k-1}{k}$$

种,故得公式(5). □

上述两种证法的主要想法都是建立适当的一一对应(即双射). 详细地说,就是为求集 A 的元素个数 $|A|$,设法建立从 A 到某个集 B 的一个双射,因 $|A|=|B|$,问题转化为求 $|B|$. 如果问题的性质"合适"而又设计得巧妙的话,则可建立一连串的双射 $A\to B\to\cdots\to F$,最终使得 $|F|$ 可以求得,从而也得到了 $|A|=|F|$. 这种想法并不一定对每个计数问题都奏效,但不失为一种最基本的思想方法. 而且由于它能建立不同性质的计数问题的具体联系,又具有明确、直观的特点,往往被认为是最值得去寻求的一种证明.

把公式(5)写成下述等价形式有时更便于应用:

公式(5′) 方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$ 的非负整数解的个数是 $\binom{n+k-1}{k}$.

另外,如记 $(n)^k=n(n+1)\cdots(n+k-1)$,读作"$n$ 的升 k 阶乘",则有类同的记法

$$\left(\binom{n}{k}\right)=\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n)^k}{k!},\quad \binom{n}{k}=\frac{(n)_k}{k!}.$$

例 1.2 不等式 $x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant k$ 的非负整数解的个数是 $\binom{n+k}{k}$,从而有等式 $\sum_{j=0}^{k}\binom{n+j-1}{j}=\binom{n+k}{k}$.

证 如下定义的映射

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto(x_1+1,x_1+x_2+2,\cdots,x_1+\cdots+x_n+n)$$

是从 $x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant k$ 的非负整数解集到 $[n+k]$ 中的 n 项严格