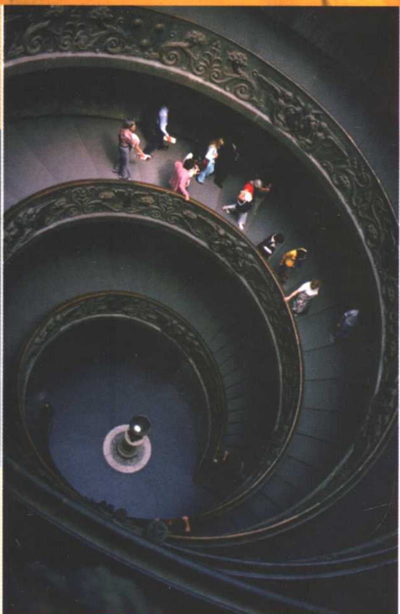
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等工科数学系列课程教材



# 工科数学分析教程

## 下册 第2版


孙振绮 总主编

孙振绮
(乌克兰) О.Ф.包依丘克 主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
高等工科数学系列课程教材

# 工科数学分析教程

## 下 册

**第 2 版**

总主编　孙振绮

主　编　孙振绮　（乌克兰）O. Φ. 包依丘克

副主编　丁效华　金承日　伊晓东

机 械 工 业 出 版 社

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是以教育部（原国家教委）1995年颁布的高等工科院校本科高等数学课程教学基本要求为纲，广泛吸取国内外知名大学的教学经验而编写的工科数学分析课程教材．本书在第1版的基础上加强了分析与代数、几何的相互渗透，适当增加了现代数学的观点与方法，提高理论知识平台，并调整了部分内容的顺序．

《工科数学分析教程》上册共9章：实数，数列的极限，函数的极限与连续性，导数及其应用，多元函数微分学，不定积分，定积分，广义积分，定积分的应用．下册共8章：数项级数，函数项级数，常微分方程，重积分，曲线积分与曲面积分、场论，多元函数的泰勒公式，傅里叶级数，含参变量的积分．每章都配有大量的例题与典型计算题，便于自学．作为现代数学知识的窗口，本教材以附录形式介绍了“在数学分析教程中的微分流形”内容．

本书可作为工科大学本科生的数学课教材，也可供准备报考工科硕士研究生的人员与工程技术人员参考．

**图书在版编目（CIP）数据**

工科数学分析教程．下册/孙振绮，（乌克兰）О. Ф. 包依丘克主编．—2版．—北京：机械工业出版社，2008.3

普通高等教育“十一五”国家级规划教材．高等工科数学系列课程教材

ISBN 978-7-111-12230-2

Ⅰ．工…　Ⅱ．①孙…②О…　Ⅲ．数学分析－高等学校－教材

Ⅳ．O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第025605号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

责任编辑：郑　玫　韩效杰　责任校对：陈延翔

封面设计：鞠　杨　责任印制：杨　曦

北京机工印刷厂印刷（兴文装订厂装订）

2008年4月第2版第1次印刷

169mm×239mm·16印张·621千字

标准书号：ISBN 978-7-111-12230-2

定价：38.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

销售服务热线电话：（010）68326294

购书热线电话（010）88379639　88379641　88379643

编辑热线电话：（010）88379722

# 序

高等数学课程的教学要求、内容选取和体系编排等方面，前苏联教材与北美教材有很大的差异. 面对当今科学技术的发展和社会需求，从我国实际情况出发，吸收不同国家、不同学派的优点，更好地为我国培养高质量人才是广大数学教师的责任与愿望.

我国大多数工科数学教材的内容和体系是在50年前苏联相应教材的基础上演变发展而来的. 当今不少教材在进行改革的同时，正在吸收北美等发达国家的先进理念和经验，而对原苏联教材近年来的变化注意不够. 孙振绮教授对原苏联的高等数学教学进行了长期深入的研究，发表了相关论文与研究报告十余篇. 这对吸收不同学派所长，推动我国工科数学教学改革、建设具有中国特色的系列教材具有重要的参考价值.

长期以来，孙振绮教授与其他教授合作，以培养高素质创新型人才为目标，力图探讨一条提高本门课程教学质量的新途径. 他们结合我国的实际情况，吸收前苏联高等数学课程教学的先进理念和经验，对教学过程进行了整体的优化设计，编写了一套工科数学系列教材共9部. 该系列教材的取材考虑了现代科技发展的需要，提高了知识的起点，适当运用了现代数学的观点，增加了一些现代工程需要的应用数学方法，扩大了信息. 同时，整合优化了教学体系，体现了数学有关分支间的相互交叉和渗透，加强了数学思想方法的阐述和运用数学知识解决问题能力的培养.

与当今出版的众多工科数学教材相比，本系列教材特色鲜明，颇有新意. 其最突出的特点是：内容丰富，观点较高，体系优化，基础理论比较深厚，吸收了俄罗斯学派和教材的观点和特色，在国内独树一帜. 对数学要求较高的专业和读者，本书不失为一套颇有特色的教材或良好的参考书.

该系列教材曾在作者所在学校和有关院校使用，反应良好，并于2005年获机械工业出版社科技进步一等奖. 其中《工科数学分析教程》（上、下册）第2版被列为普通高等教育“十一五”国家级规划教材. 该校使用该教材的工科数学分析系列课程被评为2005年山东省精品课程，相关的改革成果和经验，多次获校与省教学成果奖，在国内同行中，有广泛良好的影响. 笔者相信，本系列教材的出版，不仅有益于我国高质量人才的培养，也将会使广大师生集思广益，有助于本门课程教学改革的深入发展.

**西安交通大学　马知恩**

**2007.4**

# 第2版前言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，这次修订在基本保持原教材（第1版）风貌的基础上补充了部分内容，并调整了某些内容的顺序.

编者认为，当今的时代是科学、技术、经济与管理数学化的时代，这就确定了数学在高等教育中的地位.现代科学工作者和工程师不仅应当知道数学原理，而且应当掌握最新的数学研究方法，并把它们应用到自己的实践中去，特别是电子计算机技术的飞速发展，使得某些被认为是最纯粹的数学理论在工程实际中也得到了应用.数学的广泛应用是科技进步与发展的条件，所以编者编写了这本在传统的数学分析的内容框架下增加了现代数学观点与内容的教材，提高了理论知识平台，以适应培养高素质、创新型人才的需要.

修订后的教材增加了下述内容：

1. 在第1章实数中加强了实数理论的内容，引入了确定实数概念的公理化定义.

2. 在第4章一元函数微分学中，增加了①高阶微分；②向量函数的拉格朗日中值定理与有限泰勒公式的证明；③空间曲线理论初步（含简单曲线、光滑曲线、曲线的切线、曲线的弧长、平面的曲线与曲线的主法线，曲线的曲率，均用向量函数表示）.

3. 在第5章多元函数微分学中，①增加了度量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的直线、射线与线段；②给出了对应 $m$ 个方程的隐函数存在定理.

4. 在第13章重积分中增加了 $\mathbf{R}^n$ 中的网格理论.

5. 在第14章曲线积分与曲面积分、场论中，增加了①曲面理论初步（包括简单曲面、曲面上的曲线坐标、曲面的切平面与法线、分片光滑曲面、可定向的曲面）；②把高斯公式、斯托克斯公式与场论内容综合编写.

6. 在第16章傅里叶级数中增加了①傅里叶级数的逐项微分法与逐项积分法；②傅里叶级数的一致收敛性；③傅里叶级数的求和法；④傅里叶级数在均方意义下的收敛性（包括酉空间、赋范空间、收敛性、完备空间、盖里别尔托夫空间、酉空间的完备化、傅里叶系数的极小性质、贝塞尔不等式.在酉空间元素组（基）$\{e_i\}$ 的完备性，三角函数系在 $\mathbf{L}_2(a, b)$ 上的完备性，在盖里别尔托夫空间中的正交系的完备性）.

7. 在第17章含参变量的积分中增加了①含参变量的普通积分；②含参变量

的广义积分及其一致收敛性；③欧拉积分；④傅里叶积分；⑤傅里叶变换.

8. 在最后附录 A 中，介绍了在数学分析教程中的微分流形理论：①代数流形；②积分流形；③微分流形的积分，空间 $\mathbf{R}^n$ 的定向；④斯托克斯公式与高斯公式的微分流形形式.

从内容体系上，除了内容顺序的变动并补充上述内容外，本次修订还突出以下几个特点：

1. 加强线性代数与解析几何、微积分学内容的相互渗透、相互交叉，并把这些内容与实用的工程数学方法看做一个整体，对其内容体系进行优化组合.

2. 采用归纳法，由浅入深地叙述教材内容. 譬如，极限的概念是按下列顺序叙述的：数列极限，一元函数极限，在欧氏空间中关于集合的极限，积分和极限等；对于泰勒公式，首先研究区间上实函数，然后研究 $\mathbf{R}^n$ 空间中的映射的泰勒公式；对于柯西极限存在准则，首先研究了各类柯西极限准则，最后研究了在 $\mathbf{R}^n$ 空间中映射的极限存在的柯西准则；叙述傅里叶级数是从古典的三角函数开始，最后叙述在盖里别尔托夫空间中关于正交组的傅里叶级数等.

3. 证明的定理并不总是具有普遍意义，由于教学时数有限，同时考虑要更好阐明所研究问题的实质和证明的思路，只考虑足够光滑的函数.

除上述特点外，本次修订还保留了第 1 版注重教学法，知识由浅入深、循序渐进、便于自学，以及理论联系实际，加强数学建模训练等特点.

本书是编者在哈尔滨工业大学与乌克兰人民科技大学多年讲授工科数学分析课程与习题课经验的基础上吸收国内外知名大学的先进教学经验编写的，为了巩固所叙述的理论知识，举有足够数量的例题与典型计算题，帮助读者掌握教程的基本思想与深入研究、解决应用问题的方法，特别重视对那些学生学习较困难的概念的阐述，在教学中取得了较好的效果.

为了适应现代科技的飞速发展，编者大胆改革传统的数学分析教材，注意渗透、增加现代数学观点与方法，试图为大学生提供阅读与查阅现代科技文献、进行科研的有力的数学工具，编者认为这是一项十分困难的工作，希望这套教材的出版能为推动这项工作作出贡献.

这里，对哈尔滨工业大学多年来一直支持这项教学改革的领导、专家、教授深表谢意. 特别要感谢机械工业出版社的领导及同志们为该书的早日出版所作出的重大贡献.

本书由孙振绮、O. Ф. 包依丘克（乌克兰）任主编，丁效华、金承日、伊晓东任副主编并参加教材的修订工作. 参加本书习题部分修订的还有哈尔滨工业大学（威海）数学系邹巾英、孙建邵、李福梅、杨毅、范德军、王雪臣、王黎明、曲荣宁、史磊、宁静、李晓芳、于战华、吕敬亮等. 崔明根、刘铁夫、

王克、文松龙四位教授分别审阅了教材的各章内容，提出了许多宝贵意见.

由于编者水平有限，缺点、疏漏在所难免，恳请读者批评指正！

**编　者**

2006 年 9 月于中国威海

# 第1版前言

为适应科学技术进步的要求，培养高素质人才，必须改革工科数学课程体系与教学方法. 为此，我们进行了十多年的教学改革实践. 先后在哈尔滨工业大学、黑龙江省教委立项，长期从事“高等数学教学过程的优化设计”课题的研究. 该课题曾获哈尔滨工业大学优秀教学研究成果奖. 本套系列课程教材正是这一研究成果的最新总结，包括《工科数学分析教程（上、下册）》、《空间解析几何与线性代数》、《概率论与数理统计》、《复变函数论与运算微积》、《数学物理方程》、《最优化方法》、《计算技术与程序设计》等.

本套教材在编写上广泛吸取国内外知名大学的教学经验，特别是吸取了莫斯科理工学院、乌克兰人民科技大学（原基辅工业大学）等的教学改革经验，提高了知识的起点，适当地扩大了知识信息量，加强了基础，并突出了对学生的数学素质与学习能力的培养. 具体体现在①加强对传统内容的理论叙述；②适当运用了近代数学观点来叙述古典工科数学内容，加强了对重要的数学思想方法的阐述；③加强了系列课程内容之间的相互渗透与相互交叉，注重培养学生综合运用数学知识解决实际问题的能力；④把精选教材内容与编写典型计算题有机结合起来，从而加强了知识间的联系，形成课程的逻辑结构，扩展了知识的深广度，使内容具备较高的系统性和逻辑性；⑤强化对学生的科学工程计算能力的培养；⑥加强对学生数学建模能力的培养；⑦突出工科特点，增加了许多现代工程应用数学方法；⑧注意到课程内容与工科研究生数学的衔接与区别.

此外，我们认为，必须把教师与学生、内容与方法、教学活动看作是教学过程中三个有机联系的整体，教学必须实现传授知识与培养学习能力、发挥教师主导作用与调动学习积极性的结合. 为此，教材的编写上注意运用启发式教学，有利于教师组织教学过程，充分调动学生学习的积极性，不断地引导学生进行深入思维.

本书可供工科大学自动化、计算机科学与技术、机械电子工程、工程物理、通信工程、电子科学与技术等对数学知识要求较高的专业的本科生使用. 按大纲讲授需198学时，全讲需230学时.

本书是根据哈尔滨工业大学与乌克兰人民科技大学的合作协议确定的合作项目而编写的，并得到了教育部哈尔滨工业大学工科数学教学基地的资助.

这里，对哈尔滨工业大学多年来一直支持这项教学改革的领导、专家、教授深表谢意.

本套教材由孙振绮任总主编. 本书由孙振绮、О. Ф. 包依丘克（乌克兰）

任主编，丁效华、金承日任副主编．参加本书编写的还有哈尔滨工业大学（威海）数学教研室邹巾英、孙建邵、李福梅、杨毅、伊晓东、林迎珍、李宝家、于淑兰等．崔明根、刘铁夫、文松龙三位教授分别审阅了教材的各个部分内容，提出了许多宝贵意见．

由于编者水平有限，缺点、疏漏在所难免，恳请读者批评指正！

**编　者**

# 记号与逻辑符号

| 符　号 | 表示的意义 |
|---|---|
| $\vee$ | 或 |
| $\wedge$ | 和 |
| $\exists$ | “存在”或“找到” |
| $\forall$ | “对任何”或“对每一个” |
| : | 使得 |
| $\Leftrightarrow$ | 等价，充分且必要，当且仅当 |
| $A \to B$ | 由 $A$ 得到 $B$ |
| $f: A \to B$ | $f$ 是从集合 $A$ 到集合 $B$ 的映射 |
| $\mathbf{N}$ | 自然数集合 |
| $\mathbf{Z}$ | 整数集合 |
| $\mathbf{Q}$ | 有理数集合 |
| $\mathbf{J}$ | 无理数集合 |
| $\mathbf{R}$ | 实数集合 |
| $\mathbf{C}$ | 复数集合 |
| $x \in A$ | $x$ 是集合 $A$ 的元素 |
| $A \subset B$ | 集合 $A$ 是集合 $B$ 的子集 |
| $\sup\limits_{x \in X} \{x\}$ | 集合 $X$ 的上确界 |
| $\inf\limits_{x \in X} \{x\}$ | 集合 $X$ 的下确界 |
| $C = A \cup B$ | 集合 $C$ 是集合 $A$ 与集合 $B$ 的并集 |
| $C = A \cap B$ | 集合 $C$ 是集合 $A$ 与集合 $B$ 的交集 |
| $x \in A \cup B$ | 或 $x \in A$ 或 $x \in B$ |
| $x \in A \cap B$ | $x \in A$ 且 $x \in B$ |
| $C = A \setminus B$ | $C$ 是集合 $A$ 与集合 $B$ 的差集 |
| $x \in A \setminus B$ | $x \in A$，但 $x \notin B$（$x$ 不属于 $B$） |
| $f \in C([a, b])$ | $f$ 属于在 $[a, b]$ 上连续的函数类 |
| $f \in C^1([a, b])$ | $f$ 属于在 $[a, b]$ 上具有连续导数的函数类 |
| $f \in R([a, b])$ | $f$ 属于在 $[a, b]$ 上黎曼可积的函数类 |

# 目　录

# 第 10 章

# 数项级数

## 10.1　收敛级数的定义与性质

### 10.1.1　收敛级数的定义

**定义 10-1**　对于数列$\{a_n\}$，称$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$为数项级数，记它的部分和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

如果存在有限的极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$是收敛的，$S$为级数的和，且记

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

如果$\{S_n\}$没有有限的极限，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散.

常见的收敛数项级数有：

1）当$|q|<1$时

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q} \tag{10-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2} \tag{10-2}$$

2）若对于数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，有

$$a_n = b_{n+1} - b_n, \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) = b - b_1 \tag{10-3}$$

【例 10-1】 利用定义证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$

是收敛的,并求它的和.

**证** 直接求级数的部分和

$$\begin{aligned}S_n &= (\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+\\&\quad(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}+\\&\quad\sqrt{n-2})+(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})+\\&\quad(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\\&=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\\&=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\end{aligned}$$

所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$$

【例 10-2】 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的和.

**解**

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{(n+2)-n}{2n(n+1)(n+2)}\\&=\frac{1}{2n(n+1)}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\\&=b_n-b_{n+1}\end{aligned}$$

其中 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n(n+1)}=0=b$,利用式(10-3)得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=b_1-b=\frac{1}{4}$$

**练习**

1. 试证:如果

(1) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ (2) $a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

(3) $a_n=\frac{1}{n(n+m)}, m\in\mathbf{N}$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,并求出它的和.

### 10.1.2 级数收敛的必要条件

若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{10-4}$$

收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

**证** 因级数(10-4)收敛，故 $\{S_n\}$ 存在有限极限 $S$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$，由此得 $S_n - S_{n-1} = a_n \to 0, n \to \infty$. 由此得出，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在，或存在但不等于零，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

**练习**

2. 试证：如果

(1) $a_n = (-1)^n \dfrac{n+1}{n+3}$  (2) $a_n = \left(\dfrac{2n^2-3}{2n^2+1}\right)^{n^2}$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

**【例 10-3】** 试证级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha, \alpha \neq m\pi, m \in \mathbf{Z}$$

发散.

**证** 假设级数收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} \sin n\alpha = 0 \quad 且 \quad \lim_{n\to\infty} \sin(n+1)\alpha = 0$$

即

$$\lim_{n\to\infty} (\sin n\alpha\cos\alpha + \cos n\alpha\sin\alpha) = 0$$

由此得 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n\alpha = 0$（因 $\sin\alpha \neq 0$），这样

$$\lim_{n\to\infty} \sin n\alpha = \lim_{n\to\infty} \cos n\alpha = 0$$

但这是不可能的，因

$$\sin^2 n\alpha + \cos^2 n\alpha = 1$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha$ 发散，若 $\alpha = m\pi, m \in \mathbf{Z}$，则级数收敛于零.

**【例 10-4】** 试证：对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}}$$

满足收敛的必要条件，但这个级数发散.

**证** 显然

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{(n+1)\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

但由

$$a_k = \frac{k+2}{(k+1)\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, k = 1,2,\cdots,n$$

得

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. 这表明级数是发散的.

### 10.1.3 收敛级数的性质

**性质 1** 如果级数(10-4)与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{10-5}$$

收敛,而它们的和分别为 $S$ 与 $\sigma$,则对于任何 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) \tag{10-6}$$

收敛,且它的和等于

$$\tau = \lambda S + \mu\sigma \tag{10-7}$$

**证** 设 $S_n,\sigma_n,\tau_n$ 分别是级数(10-4),(10-5),(10-6)的部分和,且由式(10-6)知

$$\tau_n = \lambda S_n + \mu\sigma_n$$

因 $S_n\to S,\sigma_n\to\sigma,n\to\infty$,故有 $\tau_n\to\lambda S+\mu\sigma,n\to\infty$. 从而有式(10-7)成立.

**性质 2** 若级数(10-4)收敛,则对每个 $m\in\mathbf{N}$,级数

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n \tag{10-8}$$

收敛. 反之,若对固定的 $m$,级数(10-8)收敛,则级数(10-4)也收敛.

**证** 设 $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ 且 $\sigma_k^{(m)} = a_{m+1} + \cdots + a_{m+k}$分别是级数(10-4)与级数(10-8)的前 $n$ 项部分和与前 $k$ 项部分和,则

$$S_n = S_m + \sigma_k^{(m)},\text{其中 } n = m + k \tag{10-9}$$

如果级数(10-4)收敛,则当 $n\to\infty$ 时,$\{S_n\}$存在有限极限. 从而由式(10-9)知 $\{\sigma_k^{(m)}\}$当 $m$ 固定,$k\to\infty$ 时,也存在有限极限,即级数(10-9)收敛. 反之,若 $m$ 固定且存在有限极限$\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k^{(m)}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 也存在,即级数(10-4)也收敛.

**说明 1** 根据性质 2 知,对级数去掉或添加有限项不影响它的收敛性.

**性质 3** 设 $b_j,j=1,2,\cdots$是按级数(10-4)的各项排列顺序,将其任意有限项结合得到的. 如果级数(10-4)收敛;则级数

$$\sum_{j=1}^{\infty} b_j \tag{10-10}$$

也收敛，且和与级数(10-4)相同．

**证**　设 $b_1=a_1+a_2+\cdots+a_{k_1}, b_2=a_{k_1+1}+a_{k_1+2}+\cdots+a_{k_2},\cdots$

$b_j=a_{k_{j-1}+1}+\cdots+a_{k_j}, j\in\mathbf{N}, k_j\in\mathbf{N}$，$\{k_j\}$是严格递增数列．记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k, \sigma_m=\sum\limits_{j=1}^{m}b_j$，则 $\sigma_m=S_{k_m}$．因$\{\sigma_m\}$是收敛数列 $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$ 的子序列，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_m=S$，其中 $S$ 是级数(10-4)的和．

**说明 2**　由级数(10-10)的收敛性，不能得出级数(10-4)的收敛性．

**10.1.4**　收敛级数的柯西准则：

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当且仅当对它满足柯西条件

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon:\forall n\geqslant N_\varepsilon,\forall p\in\mathbf{N}\to$$
$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon \tag{10-11}$$

**证**　因 $a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}=S_{n+p}-S_n$，其中 $S_n$ 是级数(10-4)的部分和，则条件(10-11)意味着$\{S_n\}$是基本序列，根据对数列的柯西准则知，条件(10-11)等价于$\{S_n\}$存在有限极限，即级数(10-4)收敛．

如果不满足柯西条件，即

$$\exists\varepsilon_0>0,\forall k\in\mathbf{N},\exists n\geqslant k,\exists p\in\mathbf{N}:$$
$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|\geqslant\varepsilon_0$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散．

**练习**

3. 试利用柯西准则证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散．

**【例 10-5】**　利用柯西准则证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x^n}{n^2}$$

收敛．

**证**　我们来找这样的数 $N_\varepsilon$，使对 $n>N_\varepsilon$，及任何 $p>0$，有$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$. 因

$$\begin{aligned}|S_{n+p}-S_n| &= \left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{\cos x^{n+1}}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2}\right|\\ &\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\ &<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\ &=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-p}<\frac{1}{n}\end{aligned}$$