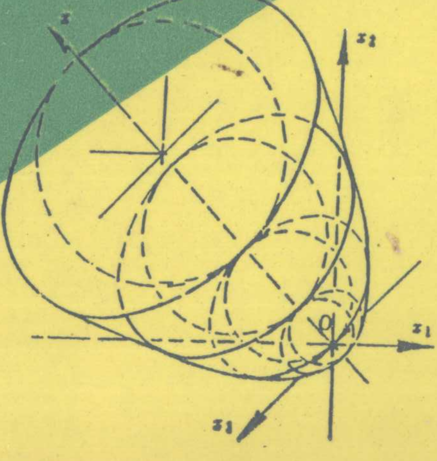
高维几何学雏论

李洪录 编著



原子能出版社

高维几何学雏论

李洪录　编著

原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

高维几何学雏论/李洪录编著．－北京：原子能出版社，1996

ISBN 7-5022-1593-X

Ⅰ．高… Ⅱ．李… Ⅲ．多维空间几何-概论 Ⅳ．O184

中国版本图书馆 CIP 数据核字（96）第 13940 号

内 容 简 介

本书由斜轴变换、斜轴画法和高维空间解析几何三部分组成，共八章：奇异线性变换所确定的关系及其性质；“关系”法与特定 n 维坐标系；特定 n 维系中图形与数字间的关系；特定 n 维系中图形的形状；特定 n 维系中图形的制作；两线性图形间的交错与距离；两线性图形间夹角问题及其线性解法；两线性图形间夹角问题的简氏解法。本书作者用线性代数方法对图学理论进行了有益的探讨。

本书对高校有关专业师生以及从事图学理论的研究人员均有参考价值。

原子能出版社出版发行

社址：北京市海淀区阜成路 43 号　邮政编码：100037

原子能出版社印刷厂印刷　新华书店经销

开本：787×1092 mm 1/32　印张 4.5　字数 100 千字

1996 年 9 月北京第 1 版　1997 年12月北京第 2 次印刷

印数：3001—3150

定价：7.00 元

序

《高维几何学雏论》是作者 17 年努力的成果。在这段时间里，他一边自学、一边研究，所取得的结果反映在本书中。本书由斜轴变换、斜轴画法和高维空间解析几何三部分组成。

斜轴变换（作者还把它称为“关系”法），是在奇异线性变换所确定象与象源之间关系的基础上，所形成的另一种线性变换。本书对奇异线性变换下象与象源间关系的有关概念、性质及运算规律进行了较为深入的研究，克服了应用“关系”法时所遇到的障碍。而“斜轴画法”则是在利用斜轴变换所建立特定 n 维坐标系（n 维空间坐标系的一种模拟图形）的基础上，提出了研究这种坐标系下图形与相应代数方程之间关系的方法。其中包括三种图示法（直接图示法、间接图示法、一般图示法）这一核心内容，概括了特定 n 维坐标系的全部图示规则，任意一个图形的图示原理、图示方法及被图示对象的识别方法等。此外，还包括点共泛理论、维数定理以及截痕法等等。所有这些为初步形成一套较为系统的，结构合理、方便实用的新颖图学理论体系作了有益的探讨。这种图示法好学易记，具有工科大学线性代数基础的读者很容易掌握。

高维空间解析几何是高维几何学的主体。斜轴画法将三维空间有关的概念很自然地推广到高维空间，便于初学者理解掌握。而斜轴画法又以点的重合问题作为突破口，使高维空间的大量几何问题迎刃而解。

阅读过本书的读者会发现，尽管线性代数中已有诸如欧氏空间、向量、坐标等几何概念，但是要用线性代数的方法处理高

维几何的问题，还要引入另一些几何概念。在本书中，作者在讨论非齐次线性方程组所表示的图形，与对应齐次线性方程组所表示图形之间的关系时，引入了所谓顺空间、法空间以及顺向量、法向量、公矢和非公矢等概念，上述术语有的是作者本人定义的，有的与通行的不尽一致，请读者阅读时注意。

为解决线性图形间的距离问题，作者还引进了“外和”的概念，并讨论了它的性质及方程，把线性代数中有关子空间的一些概念与性质推广到一般的线性图形。在解决线性图形之间夹角问题时，作者提出并解决了夹角数量及解的非唯一性这两个问题。还用线性代数理论介绍了简氏解法，并将其进一步推广用于解决任意两个线性图形间夹角的问题。同时还把三维空间中向量“外积”(又称叉积或矢积)的概念推广到多维空间，提出了向量正交化以及解线性方程组的另一种方法。

本书作者用线性代数方法对图学理论所进行的有益探讨，想来会引起有关人士的兴趣和注意。

沈以淡　北京理工大学

侯秉涛　北京装甲兵工程学院

潘建中　中科院数学所

一九九六年七月

目　录

第一章　奇异线性变换所确定的关系及其性质

画法几何和高维空间解析几何的研究，通常采用线性变换的方法。本书介绍一种"关系"法，即直接运用线性变换下象与象源之间的关系来处理有关问题。在一定条件下，由于关系中的元素可以直接参加运算，所以"关系"法具有方便、直观等优点。在北京装甲兵工程学院侯秉涛教授的耐心指导和亲自参与下，作者对奇异线性变换下象与象源之间的关系的有关性质及运算规律进行了深入探讨。除定理3外，本章其余7个定理及两个推论均经过侯教授亲自严密科学的证明，其中定理4,5,7及两个推论由侯教授亲自提出。

§1　奇异线性变换下向量的坐标之间的关系

设 V_n 是实数域 R 上的线性空间，σ 为 V_n 中的奇异线性变换，对于任意的 $\alpha\in V_n$，称 $\sigma(\alpha)=\alpha'$ 为 α 的象，而称 α 为 α' 的一个象源。

定义1　为方便计，称形如

$$M=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-r,1} & c_{n-r,2} & \cdots & c_{n-r,r} \end{bmatrix}$$

的 $n\times r$ 列满秩阵为 M 阵。有时，M 也写成剖分为上下两块的分块矩阵

$$M=\begin{pmatrix} I \\ C \end{pmatrix}$$

其中，I 为 r 阶单位阵，C 为 $(n-r)\times r\quad(r<n)$ 阵。

现在，我们在线性空间 V_n 中取定一个基底 $e_1,e_2,\cdots,e_n$，在 V_n 的象集 $\sigma(V_n)$ 中取定一个基底 $e_1',e_2',\cdots,e_r'(r<n)$，则基底 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的象既可由它自身线性表出，也可由基底 $e_1',e_2',\cdots,e_r'$ 线性表出，即：

当设
$$\begin{cases}\sigma(e_1)=a_{11}e_1+a_{12}e_2+\cdots+a_{1n}e_n\\ \sigma(e_2)=a_{21}e_1+a_{22}e_2+\cdots+a_{2n}e_n\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \sigma(e_n)=a_{n1}e_1+a_{n2}e_2+\cdots+a_{nn}e_n\end{cases}$$

和
$$\begin{cases}\sigma(e_1)=b_{11}e_1'+b_{12}e_2'+\cdots+b_{1r}e_r'\\ \sigma(e_2)=b_{21}e_1'+b_{22}e_2'+\cdots+b_{2r}e_r'\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \sigma(e_n)=b_{n1}e_1'+b_{n2}e_2'+\cdots+b_{nr}e_r'\end{cases}$$

且设
$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr}\end{bmatrix}$$

时，有
$$\sigma\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}e_1'\\e_2'\\\vdots\\e_r'\end{bmatrix}$$
（A 是 $n\times n$ 奇异阵，B 是 $n\times r$ 列满秩阵）。

显然，当设
$$\begin{bmatrix}e_1'\\e_2'\\\vdots\\e_r'\end{bmatrix}=N\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}$$
（N 为 $r\times n$ 行满秩阵）时，有
$$A=B\cdot N。$$

证：由条件有
$$B\begin{bmatrix}e_1'\\e_2'\\\vdots\\e_r'\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}$$

因
$$\begin{bmatrix}e_1'\\e_2'\\\vdots\\e_r'\end{bmatrix}=N\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}$$

故
$$B\begin{bmatrix}e_1'\\e_2'\\\vdots\\e_r'\end{bmatrix}=B\cdot N\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}$$

即
$$A=B\cdot N。$$

特别地，当
$$\sigma\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1'\\e_2'\\\vdots\\e_n'\end{bmatrix}$$
($e_{r+1}', e_{r+2}', \cdots, e_n'$均可由基底$e_1', e_2', \cdots, e_r'$线性表出)时，$B$为一$M$阵，即
$$B=M=\begin{pmatrix}I\\C\end{pmatrix}$$

证：因
$$\begin{bmatrix}e_1'\\e_2'\\\vdots\\e_r'\end{bmatrix}=N\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}$$
所以，当
$$\sigma\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1'\\e_2'\\\vdots\\e_n'\end{bmatrix}$$
时有
$$\sigma\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_1'\\e_2'\\\vdots\\e_r'\end{bmatrix}$$
即
$$\sigma\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_r\end{bmatrix}=N\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}$$
这时，N成为矩阵A的前r行所构成的子阵，即

$$N=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{bmatrix}$$

而 A 的后 $n-r$ 行中，任意一行均可由 N 中各行线性表出，因此，这后 $n-r$ 行所构成的 A 的子阵可看作一个 $(n-r)\times r$ 矩阵

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n-r,1} & c_{n-r,2} & \cdots & c_{n-r,r} \end{bmatrix}$$

与 N 的乘积，即 A 可表示为剖分成上下两块的分块矩阵，并进而表示为矩阵的乘积

$$A=\begin{pmatrix} N \\ (C\cdot N) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (I\cdot N) \\ (C\cdot N) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I \\ C \end{pmatrix}N=M\cdot N$$

又因 $A=B\cdot N$ 故有 $B=M=\begin{pmatrix} I \\ C \end{pmatrix}$

(I 为 r 阶单位阵)。

这时 $$C=\begin{bmatrix} b_{r+1,1} & b_{r+1,2} & \cdots & b_{r+1,r} \\ b_{r+2,1} & b_{r+2,2} & \cdots & b_{r+2,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

即 C 是 B 的后 $n-r$ 行所构成的 B 的子阵。

现在，我们设线性空间 V_n 是向量的集合，在取定基底 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 之后，任意向量 $\alpha\in V_n$ 均可由该基底线性表出，即可设

$$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$$

且表示是唯一的，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 α 对基底 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的坐标。同样，对任意 $\alpha\in V_n$，象 $\sigma(\alpha)\in\sigma(V_n)$ 也都可由基底 $e_1',e_2',\cdots,e_r'$ 线

性表出，即可设

$$\sigma(\alpha)=y_1e_1'+y_2e_2'+\cdots+y_re_r'$$

$y_1,y_2,\cdots,y_r$称作 $\sigma(\alpha)$对基底 $e_1',e_2',\cdots,e_r'$的坐标。

在奇异线性变换 σ 下，向量

$$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$$

与它在 σ 下的象

$$\sigma(\alpha)=y_1e_1'+y_2e_2'+\cdots+y_re_r'$$

的坐标之间的关系可以表示为

$$(y_1y_2\cdots y_r)=(x_1x_2\cdots x_n)B。$$

特别地，当 $\sigma(e_i)=e_i'(i=1,2,\cdots,n。e_{r+1}',e_{r+2}',\cdots,e_n'$，均可由基底 $e_1',e_2',\cdots,e_r'$，线性表出)时，有

$$(y_1y_2\cdots y_r)=(x_1x_2\cdots x_n)M。$$

证：

因
$$\begin{bmatrix}e_1'\\e_2'\\\vdots\\e_r'\end{bmatrix}=N\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}$$

且
$$\alpha=(x_1x_2\cdots x_n)\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}$$

$$\sigma\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}e_1'\\e_2'\\\vdots\\e_r'\end{bmatrix}$$

故 $$\sigma(\alpha)=(x_1x_2\cdots x_n)\sigma\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}=(x_1x_2\cdots x_n)A\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}$$

$$=(x_1x_2\cdots x_n)B\cdot N\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}$$

又因 $$\sigma(\alpha)=(y_1y_2\cdots y_r)\begin{bmatrix}e_1'\\e_2'\\\vdots\\e_r'\end{bmatrix}=(y_1y_2\cdots y_r)N\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}$$

所以 $$(y_1y_2\cdots y_r)N\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}=(x_1x_2\cdots x_n)B\cdot N\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}$$

即 $$(y_1y_2\cdots y_r)=(x_1x_2\cdots x_n)B\text{。}$$

特别地，当 $\sigma(e_i)=e_i'$ 时，因有 $B=M$，即有

$$(y_1y_2\cdots y_r)=(x_1x_2\cdots x_n)M \tag{1}$$

对(1)式取转置并写成详细的坐标表示式则有

$$\begin{cases}y_1=x_1+c_{11}x_{r+1}+c_{21}x_{r+2}+\cdots+c_{n-r,1}x_n\\y_2=x_2+c_{12}x_{r+1}+c_{22}x_{r+2}+\cdots+c_{n-r,2}x_n\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\y_r=x_r+c_{1r}x_{r+1}+c_{2r}x_{r+2}+\cdots+c_{n-r,r}x_n\end{cases} \tag{2}$$

这就是奇异线性变换 σ 下当 $\sigma(e_i)=e_i'$ 时向量 α 与它在 σ 下的象的坐标之间的关系的公式。

§2 奇异线性变换下象与象源间的关系和性质

设 σ 为线性空间 V_n 中的奇异线性变换，$\alpha\in V_n$，若 $\sigma(\alpha)=\alpha'$，则称 α 与 α' 之间有关系 σ，

记作 $$\alpha \overset{\sigma}{—} \alpha'$$

并称 σ 为由 V_n 到 $\sigma(V_n)$ 的关系。若 α 与 α' 没有关系 σ，即 $\sigma(\alpha)\neq\alpha'$，则记作 $$\alpha \overset{\sigma}{\not—} \alpha'。$$

定理 1 奇异线性变换 σ 下，关系 σ 不是自反的。

证：若 $\forall\ \alpha\in V_n$ 有 $\alpha \overset{\sigma}{—} \alpha$，则 σ 为恒等变换，这与 σ 的奇异性相矛盾，故关系 σ 不具有自反性。

定理 2 奇异线性变换 σ 下，关系 σ 不是对称的。

证：设 A 为 σ 对基底 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的矩阵，则 A^2 是 σ^2 的矩阵。

假若关系 σ 具有对称性，则 $\forall\ \alpha\in V_n$，有

$$\sigma[\sigma(\alpha)]=\alpha$$

即 σ^2 为一恒等变换，于是 $A^2=I$

I 为 n 阶单位阵，这与 A 的秩 $r<n$ 相矛盾，故关系 σ 不具有对称性。

定理 3 奇异线性变换 σ 下，关系 σ 不是可传递的。

证：假若关系 σ 具有可传递性，则 $\forall\ \alpha\in V_n$，

有 $\sigma[\sigma(\alpha)]=\sigma(\alpha)$

亦即 $\sigma(\alpha)=\alpha$ （σ 可以有广义逆[4]）

因此又有 $\sigma[\sigma(\alpha)]=\alpha$

但由定理 1 和 2，σ 和 σ^2 均非恒等变换，因此，关系 σ 不具有可传递性。

§3 关系 σ 中元素的运算规律

3.1 线性运算规律

定理 4 若 $\alpha_1 \overset{\sigma}{—} \alpha_1'$，$\alpha_2 \overset{\sigma}{—} \alpha_2'$，则对于任意实数 k_1, k_2，有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \overset{\sigma}{—} k_1\alpha_1' + k_2\alpha_2'$$

证：因为 $\sigma(\alpha_1) = \alpha_1'$，$\sigma(\alpha_2) = \alpha_2'$，所以

$$\sigma(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) = k_1\sigma(\alpha_1) + k_2\sigma(\alpha_2) = k_1\alpha_1' + k_2\alpha_2',$$

故 $$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 \overset{\sigma}{—} k_1\alpha_1' + k_2\alpha_2'。$$

3.2 移项规律

定义 2 若 $\alpha_0 \overset{\sigma}{—} \alpha_0$，则称 α_0 为关系 σ 中的自反元。

定理 5 设 A 为 V_n 中奇异线性变换 σ 对基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的矩阵，则 V_n 中任一元：$\alpha = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$
为关系 σ 中非零自反元的充分必要条件是：A 的转置矩阵 A' 具有特征根 $\lambda_0 = 1$，且 α 为 A' 对应于特征根 $\lambda_0 = 1$ 的特征向量。

证：因为

$$\alpha = (x_1x_2\cdots x_n)\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \qquad 且 \quad \sigma(\alpha) = \alpha$$

故 $$\sigma(\alpha) = (x_1x_2\cdots x_n)\sigma\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = (x_1x_2\cdots x_n)A\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

$$= (x_1x_2\cdots x_n)\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

即 $$(x_1x_2\cdots x_n)A=(x_1x_2\cdots x_n)$$

转置得 $$A'\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$（必要性）；

反之，因 $(x_1x_2\cdots x_n)A=(x_1x_2\cdots x_n)$ 且 $\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n$，

故 $$\sigma(\alpha)=(x_1x_2\cdots x_n)A\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}=(x_1x_2\cdots x_n)\begin{bmatrix}e_1\\e_2\\\vdots\\e_n\end{bmatrix}$$

即 $$\sigma(\alpha)=\alpha$$ （充分性）。

定理 6 设 $\alpha\overset{\sigma}{-}\alpha_1'+\alpha_2'$，则 $\alpha-\alpha_1'\overset{\sigma}{-}\alpha_2'$ 的充分必要条件是 α_1' 为自反元。

证：因为 $\sigma(\alpha-\alpha_1')=\sigma(\alpha)-\sigma(\alpha_1')=\alpha_1'+\alpha_2'-\sigma(\alpha_1')$，所以 $\sigma(\alpha-\alpha_1')=\alpha_2'$ 的充分必要条件是 $\sigma(\alpha_1')=\alpha_1'$，即 α_1' 为自反元。

推论 设 $\alpha_1+\alpha_2\overset{\sigma}{-}\beta$，则 $\alpha_2\overset{\sigma}{-}\beta-\alpha_1$ 的充分必要条件是 α_1 为自反元。

3.3 元素对调规律

定义 3 如果 $\alpha_0\overset{\sigma}{-}\beta_0$ 且 $\beta_0\overset{\sigma}{-}\alpha_0$，则称 α_0 与 β_0 为关系 σ 中的对称元。

定理 7 设 A 为 V_n 中奇异线性变换 σ 对基底 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 的矩阵，则 V_n 中任意 α 与 β 为对称元的充分必要条件是：A^2 的转置 $(A^2)'$ 具有特征根 $\lambda_0=1$ 且 α 为 $(A^2)'$ 的对应于特征根 $\lambda_0=1$ 的特征向量。

证：必要性