PUTONGGAODENGJIAOYU GAOJIYINGYONGXING RENCAI PEIYANGGUIHUAJIAOCAI

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

高等数学（上册）

主编　丁尚文　廉玉忠　许其州

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

高等数学

(上册)

主　编　丁尚文　廉玉忠　许其州
副主编　王彦华　王　洁　李爱枝
参　编　罗纤维　贾云涛

同濟大學 出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的要求精神，按照国家非数学类专业数学基础课程教学指导委员会最新提出的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，并根据高等学校培养高级应用型人才的目标编写而成的. 全书分为上、下两册. 上册分七章，内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程. 下册分五章，内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数.

本书在内容上力求适用、够用、简明、通俗；在例题选择上力求全面、典型，难度循序渐进；在论述形式上则力求详尽、易懂. 每节后都附有比较全面的基础性习题与综合性习题. 为满足读者进行阶段性复习与自我检测的需要，在每一章末安排有自测题. 书后附有习题答案与提示.

本书知识系统，讲解全面，难度适宜，可作为普通高等院校理工类非数学专业高等数学课程的教材使用，也可供成教学院或专科院校选用为教材，并可为相关专业人员和广大教师参考之用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/丁尚文，廉玉忠，许其州主编. —上海：同济大学出版社，2008.7

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

ISBN 978-7-5608-3856-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①丁…②廉…③许… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第081912号

普通高等教育高级应用型人才培养规划教材

高等数学(上册)

主编 丁尚文 廉玉忠 许其州

责任编辑 张 莉 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址：上海市四平路1239号 邮编：200092 电话：021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 江苏句容排印厂
开 本 787 mm×960 mm 1/16
印 张 15.5
字 数 305 000
印 数 1—4100
版 次 2008年7月第1版 2008年7月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5608-3856-4/O·317

定 价 26.90元

前　言

当前我国的高等教育正处于飞速发展的阶段，以培养高素质应用型人才为目标的各类具有特色的本科院校正是在这种大环境下应运而生. 这无疑对高校的教材，特别是对像“高等数学”这种重要的基础理论课的教材提出了更新、更严的要求. 为了满足包括独立学院在内的大多数本科院校出现的新的教学形势、学生特点，我们编写了这套高等数学教材.

本书是在贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的要求精神，依据教育部制定的“高等数学课程教学基本要求”和教育部“质量工程”(2007)文件中关于“分类指导”、“注重特色”的要求，在总结多年本科数学教学经验，探索本科数学教学发展动向，分析国内外同类教材发展趋势的基础上编写而成的. 全书分为上、下两册. 上册分七章，内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程. 下册分五章，内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分和无穷级数.

本书编写的指导思想是：基础理论以够用为度，突出基本概念、基本方法，加强基本能力的培养，注重实际应用. 为此本书在内容上力求适用、够用、简明、通俗；在例题选择上力求全面、典型；在论述形式上则力求详尽、易懂. 每节后面都安排比较全面的基础性习题与综合性习题. 为满足读者进行检测的需要，在每章末安排有自测题. 全书习题均附有答案与提示.

本书知识系统，讲解全面，例题丰富，难度适宜. 适合作为普通高等院校理工类(非数学专业)高等数学课程的教材使用，也可供成教学院或高职高专院校选用为教材，并可为相关专业人员和广大教师参考之用.

本书由丁尚文、廉玉忠、许其州主编，王彦华、王洁、李爱枝副主编. 参加编写的人员还有罗纤维、贾云涛.

在本书的编写过程中广东技术师范学院天河学院及华南农业大学珠江学院、广州大学松田学院、东莞理工城市学院、北理工珠海学院等学校的领导都给与了热情的鼓励与支持，在这里谨向他们表示最诚挚的谢意.

由于时间仓促，书中难免有不足之处，敬请专家、教师和读者不吝赐教.

编　者

2008年7月

目　　录

1　函数与极限

初等数学研究的对象是常量,而高等数学研究的对象是变量,变量之间的依赖关系称为函数.极限的概念是微积分学的理论基础.本章着重介绍函数、函数的极限和连续性等基本概念以及它们的一些性质.

1.1　函　　数

1.1.1　区间和邻域

设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$,则数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为**开区间**,记为 (a, b),即

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\},$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点.数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为**闭区间**,记为 $[a, b]$,即

$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$

a 和 b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点.类似地有

$$(a, b]=\{x \mid a<x \leqslant b\},$$
$$[a, b)=\{x \mid a \leqslant x<b\},$$

它们称为**半开半闭区间**.

以上区间都称为有限区间,区间长度为 $b-a$,从数轴上看,这些有限区间的长度都是有限的线段.

闭区间 $[a, b]$ 和开区间 (a, b) 在数轴上的表示方法分别如图 1-1(a),(b)所示.此外还有无限区间.引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则可类似地表示无限区间,例如

$$(-\infty, b)=\{x \mid x<b\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-1(c), (d)所示.

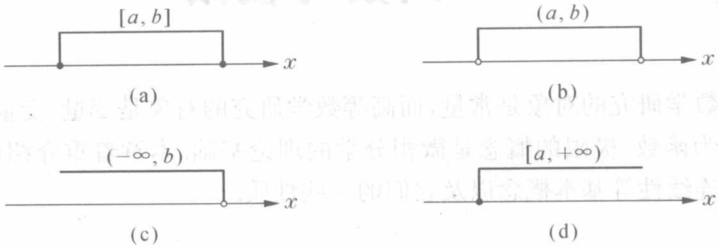

图 1-1

全体实数的集合 **R** 也记作 $(-\infty, +\infty)$，它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点以及是有限区间还是无限区间的场合,我们就简单地称之为**区间**,且常用 I 表示.

设 δ 是任一正数,则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$，简称为 a 的邻域,即

$$U(a, \delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\},$$

点 a 称为这邻域的中心,δ 称为该邻域的半径,如图 1-2 所示.

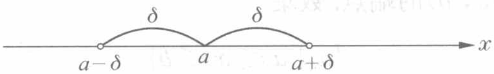

图 1-2

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉,在 a 的邻域中去掉中心后,称为点 a 的去心邻域,记作 $\mathring{U}(a, \delta)$,

$$\mathring{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

1.1.2 函数的概念

定义 1.1.1 设 D 是一个给定的实数集合,如果对于 D 中的每一个数 x,按照某种确定的法则 f,存在唯一的数 y 与之对应,则称对应法则 f 是定义在数集 D 上的一个**函数**,记为

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 为函数 f 的**定义域**,记为 D_f,集合 $R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 f 的**值域**.

在平面直角坐标系下，点集

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ $(x \in D)$ 的图像，如图 1－3 所示.

下面举几个函数的例子.

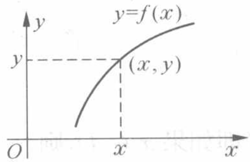

图 1－3

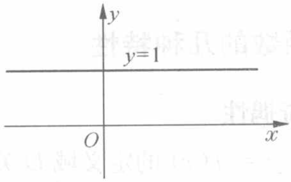

图 1－4

例 1 函数 $y = 1$ 的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = \{1\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1－4 所示.

例 2 绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = [0, +\infty)$，如图 1－5 所示.

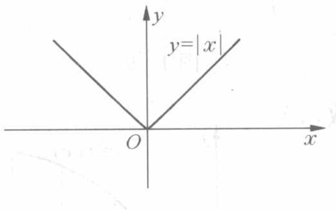

图 1－5

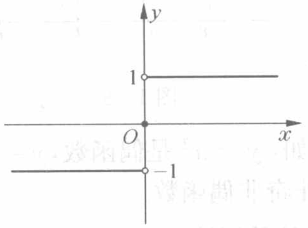

图 1－6

例 3 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$，其图形如图 1－6 所示.

例 4 取整函数

$$y = [x]$$

表示不超过 x 的最大整数，如

$[1.25]=1$，$[-3.5]=-4$，$[-1]=-1$，

图像如图 1 - 7 所示.

在例 2—例 4 所列的函数中，因自变量 x 所属的范围不同而用不同的公式表示 x 与 y 的对应规则，依这种方式定义的函数称为分段函数.

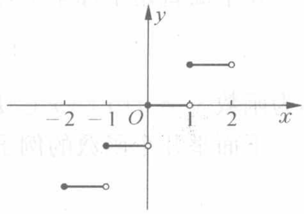

图 1 - 7

1.1.3 函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即如果 $x\in D$，则 $-x\in D$），如果对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果对于任意 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**. 在平面直角坐标系中，偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1 - 8 所示；奇函数的图形关于原点对称，如图 1 - 9 所示.

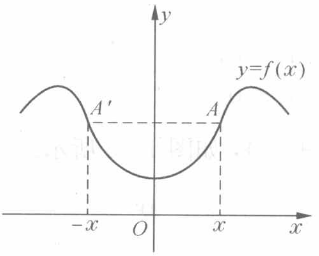

图 1 - 8

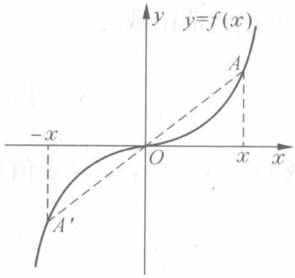

图 1 - 9

例如，$y=x^2$ 是偶函数，$y=x^3$ 是奇函数，$y=10^x$ 是非奇非偶函数.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 对于 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的，如图 1 - 10 所示；如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 D 上是单调减少的，如图 1 - 11 所示. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**. 例如，$y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调减少，在 $(0,+\infty)$ 上单调增加，但 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数.

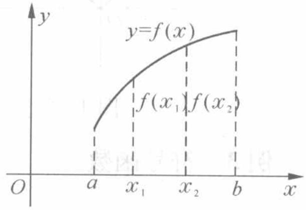

图 1 - 10

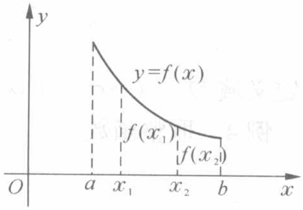

图 1 - 11

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个正数 T,使得对于任意的 $x \in D$,有 $(x \pm T) \in D$,且

$$f(x \pm T) = f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的周期,通常所说周期函数的周期是指最小的正周期.

例如,函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,函数 $y = \tan x$ 是以 π 为周期的函数.

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在正数 M,使得对任意的 $x \in D$ 都有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称**函数 $f(x)$ 在 D 上有界**. 如果这样的正数 M 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 D 上无界.

例如,函数 $y = \arctan x$,在任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,都有不等式 $|\arctan x| < \frac{\pi}{2}$ 成立,所以,$y = \arctan x$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的有界函数. 函数的有界性与 x 取值区间有关,例如,函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内无界,但它在区间 $(1, +\infty)$ 上却是有界的.

1.1.4 反函数与复合函数

1. 反函数

在自由落体运动过程中,距离 s 表示为时间 t 的函数,

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

在时间的变化范围中任意确定一个时刻 t_0,由上述公式就可得到相应的距离 $s_0 = \frac{1}{2}gt_0^2$,如果已知下落的距离 s,求下落时间 t,则有 $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$. 这里,原来的因变量 s 成为自变量,原来的自变量 t 成为因变量,这样得到的新函数 $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$,称为原有函数 $s = \frac{1}{2}gt^2$ 的反函数.

定义 1.1.2 设 $y = f(x)$ 是定义在 D 上的一个函数,值域为 W,如果对于

每一个 $y \in W$，必定有确定的 $x \in D$，满足 $f(x) = y$，如果把 y 看作自变量，x 看作因变量，按照函数概念，得到一个新函数，则称这个函数为 $y = f(x)$ 的**反函数**，记为 $x = f^{-1}(y)$. 相对于 $x = f^{-1}(y)$，原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数，习惯上反函数 $x = f^{-1}(y)$，记为 $y = f^{-1}(x)$.

例 5 求 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 的反函数.

解 由 $y = \sqrt[3]{x+1}$，解得 $x = y^3 - 1$，则 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y = x^3 - 1$.

如果将直接函数 $y = f(x)$ 和它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形画在同一个坐标平面上，那么这两个图形关于直线 $y = x$ 是对称的，如图 1－12 所示.

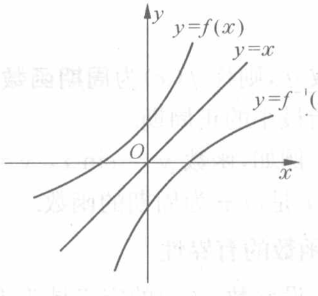

图 1－12

2. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u = g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D) \subset D_1$，则由下式确定的函数

$$y = f[g(x)], \quad x \in D$$

称为由函数 $y = f(u)$ 和函数 $u = g(x)$ 构成的**复合函数**，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量.

例如，由函数 $y = \sqrt{u}$，$u = x + 4$ 可以构成复合函数 $y = \sqrt{x+4}$，为使 u 的值域包含在 $y = \sqrt{u}$ 的定义域 $[0, +\infty)$ 内，必须有 $x \in [-4, +\infty)$，所以复合函数 $y = \sqrt{x+4}$ 的定义域为 $[-4, +\infty)$.

1.1.5 初等函数

1. 基本初等函数

下列函数称为基本初等函数：

(1) 常数函数 $y = C$ (C 为常数)；

(2) 幂函数 $y = x^\mu$ (μ 为实数)；

(3) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)；

(4) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)；

(5) 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \csc x$；

(6) 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成，并能用一个解

析式表示的函数称为**初等函数**，例如 $y=ax^2+bx+c$，$y=\sin\frac{1}{x}$，$y=e^{-x^2}$ 等都是初等函数.

工程技术中常用的双曲函数：

双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，

双曲余弦函数 $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，

双曲正切函数 $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，

双曲余切函数 $\coth x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

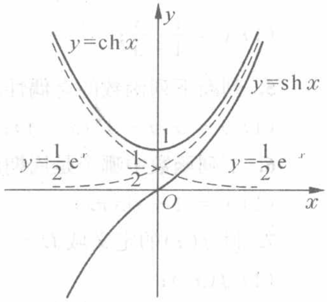

图 1-13

利用函数 $y=\frac{1}{2}e^x$ 与 $y=\frac{1}{2}e^{-x}$ 的图像叠加，可以得到 $y=\operatorname{sh} x$ 和 $y=\operatorname{ch} x$ 的图像，如图 1-13 所示.

$y=\operatorname{sh} x$ 和 $y=\operatorname{ch} x$ 的主要性质如表 1-1 所示.

表 1-1　　双曲正切、余切函数的性质

名　称	表达式	定义域	主 要 性 质
双曲正弦函数	$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$(-\infty,+\infty)$	奇函数，图像分布在一，三象限，经过原点，在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加
双曲余弦函数	$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$(-\infty,+\infty)$	偶函数，图像在一，二象限，经过点 $(0,1)$，在 $(-\infty,0)$ 上单调减少，在 $(0,+\infty)$ 上单调增加

由双曲函数的定义，容易推出如下的恒等式：

(1) $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$；

(2) $\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y$；

(3) $\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch} x\operatorname{ch} y\pm\operatorname{sh} x\operatorname{sh} y$；

(4) $\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x$；

(5) $\operatorname{ch}2x=\operatorname{sh}^2x+\operatorname{ch}^2x$；

(6) $2\operatorname{sh}^2x=\operatorname{ch}2x-1$，$2\operatorname{ch}^2x=\operatorname{ch}2x+1$.

习题 1.1

1. 确定下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{9-x^2}$；　(2) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；

(3) $y=\tan(x+1)$；　(4) $y=\arcsin(x-3)$；

(5) $y=\frac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$；　(6) $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,求 $f[f(x)]$.

3. 将函数 $y=5-|2x-1|$ 用分段函数表示,并作出函数的图形.

4. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;　　(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x-1}$.

5. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x(x-1)(x+1)$;　　(2) $y=3x^2-x^3$.

6. 下列函数中哪个是周期函数?对周期函数,指出其周期.

(1) $y=1+\sin\pi x$;　　(2) $y=x\cos x$.

7. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=[0,1]$,求下列函数的定义域.

(1) $f(x^2)$;　　(2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)\ (a>0)$;　　(4) $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$.

8. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\quad g(x)=e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

9. 在半径为 r 的球内嵌入一圆柱,试将圆柱的体积表示为其高的函数,并求出此函数的定义域.

10. 某化工厂生产某产品 1 000 t,定价为 130 元/t,销量在 700 t 以内时,按原价出售;超过 700 t 时,超过部分打 9 折出售,试将销售总收入与总销售量的函数关系,用数学表达式表示.

1.2　数列的极限

1.2.1　数列极限的定义

数列极限的概念是由于求某些实际问题的精确值而产生的,早在公元 3 世纪,我国数学家刘徽就利用圆的内接正多边形的面积推算出圆的面积.

设有半径为 R 的圆,作它的内接正六边形,面积记为 S_1;再做内接正十二边形,其面积为 S_2;再作内接正二十四边形,其面积为 S_3……作内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形,其面积为 S_n. 于是得到一系列内接正多边形面积

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots$$

当 n 无限增大时,正多边形的面积无限接近于圆的面积,这个圆的面积就是上面这列有次序的数 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 当 $n\to\infty$ 时的极限.