

● JIALIANGYUANLI

● 秦裕瑗

嘉量原理

——有限型多阶段决策问题的一个新处理

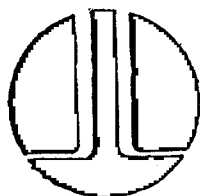


JIALIANGYUANLI

嘉量原理

—有限型多阶段决策问题的一个新处理

秦裕琰



湖北教育出版社

嘉 量 原 理

——有限型多阶段决策问题的一个新处理

秦 裕 琰

*

湖北教育出版社出版,发行 新华书店湖北发行所经销
咸宁地区印刷厂排版,印刷

850×1168毫米 32开本 24.5印张 5插页 606 000字

1990年4月第1版 1990年4月第1次印刷

ISBN 7-5351-0458-4/O·11

· 定价: 11.30元

序

美国R. Bellman于1951年建立了最优化原理与递推公式。在这基础上，他与其他学者一起，创立了动态规划。经过三十多年的发展，它已有了相当丰富的理论成果与广泛的应用，出现了大量的论文与为数不少的书籍，成为运筹学与管理科学中不可缺少的一个分枝与工具。

多年来，人们对最优化原理以及它与递推公式之间的关系，有不少评论。对于有限型部分，还深感缺乏有效的推理、运算工具。

作者近十年来，致力于另外建立一个原理，并构造一个新的工具，以整理、发展有限型动态规划。

最优化原理与递推公式是用过程、时间序列的语言来叙述的。有些与时间没有直接关系的多阶段决策问题，则经过转化手续，再用它们来研究。与此相反，我们在多阶段有向图上，让有向边上赋以抽象数学系统——半域——中的元素，作为嘉量，建立嘉量原理及其公式，讨论优化解，然后，让有些有限型的时间过程的决策问题转化为几何问题来处理。

作为推理、运算工具，我们建立了幕矩阵。它是常义矩阵的推广。这不仅在于其元素从取自实数域推广到取自半域，把矩阵的加法、乘法运算推广为幕加法与幕乘法；显得有其特色的，在于它能够在运算时兼顾了统一性与灵活性，在于解除了矩阵中某些古典概念的束缚。

在多阶段有向图上，我们不仅讨论最优解，还讨论各阶优化

解；不仅讨论单目标问题，还讨论多目标问题；不仅讨论决定型问题，还讨论随机型与Fuzzy（模糊）型问题。而所有这些，都服从于相应的特殊半域上的嘉量原理，都可以按几乎同一个基本格式进行计算。

我们除了讨论半域、摹矩阵与嘉量原理本身的问题，还利用它们及各种优化概念讨论铺设管道问题、设备替换问题、库存问题、排序问题、Markov决策问题等中的许多模型。

就讨论的内容来说，读者可以清楚看到，本书受 Dreyfus S. E. 与 Law A. R. 的《The Art and Theory of Dynamic Programming》一书的影响很大。此外，有不少学者过去或近二、三年的研究工作打开了作者研究与写作的思路，并在本书的框架内收入了他们的精采、深刻的成果，还在相应的地方提到了他们。这些给本书生色不少。在此，谨向他们致以深切的谢意。

书中不少材料是属于作者的工作成果。即使不少熟知的材料，由于作者的整理，在提法、处理、表达上，也与习见的有明显的不同。

为此，我们甚至对本书的名称也不叫做有限型动态规划，而叫做《嘉量原理——有限型多阶段决策问题的一个新处理》。

全书共有十二章。第一、二、五、七、九章全章以及第六章的§4—§7、第八章的§5—§7与第十二章的§4、§7是作者的若干篇论文的扩写。这些论文分别在多次学术会议上进行过交流，并已在期刊上发表。书中前六章与第九章、十章，作者曾于1982年秋在华中工学院运筹学专业研究生中作为教材讲授过一遍。有部分章节，作者在武汉钢铁学院、北京冶金机电学院企业管理专业的运筹学课程中以及几个运筹学短训班中讲授过。在这些交流、教学过程中，同行们、学生们的积极反应，更促使作者鼓起勇气将

此书定稿。

本书可供运筹学专业、企业管理专业大学高年级学生或研究生使用，也可供有兴趣于规划论的读者参考。

本书所建立的概念、原理与工具，从开始形成至今，为时甚短，接受考验尚少，远不是成熟的。加之作者本人的业务水平与写作能力有限，有些论述显得很笨拙。至于缺点与错误之处，肯定不少，尚请读者批评指正。

作为一个“双肩挑”的教师，在教学、行政工作之余，进行研究、写作，组织的关怀与领导的支持是至为重要的。武汉钢铁学院组织给予作者从1983年秋季开始的一学期的学术假，使得作者有可能集中精力最后完成全书的定稿工作。对此，作者深表感谢；感谢教务处赵德欣处长、李志坚副处长和李世品副教授的长期热情的关怀。

作为学术水平极为有限的作者，学者们的支持和帮助比什么都宝贵。在写作、讲述的过程中，他们口头、书面提出过许多宝贵意见。许多建议已被采纳。作者在此谨向他们表示诚挚的谢意。更要特别感谢武汉数字工程研究所吴学谋研究员、武汉钢铁学院任德麟教授以及郑州大学林诒勋副教授的自始至终的帮助与鼓励。

作为一个双职工的家庭成员，家庭的支持是写成本书的基本条件之一。爱人傅赛珍在工作之余，除了承担更多的家务劳动，在生活乐趣方面做了种种牺牲，还帮助整理了许多资料和草稿，我由衷地感谢她。

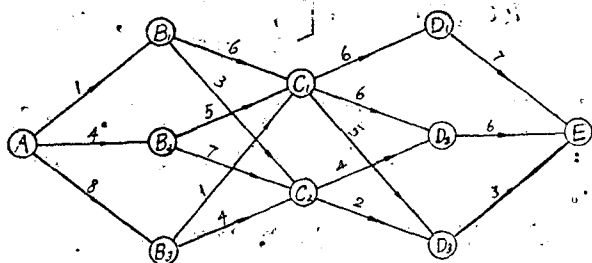
如果本书有某些可取之处，作者愿意把它献给武汉钢铁学院组织，献给所有关心于此的同志们。

作 者

1984年元旦

引言

这里有一个多阶段有向图：



各条有向边上都赋有一个数，不妨当作长度。从 A 到 E 有若干条路，例如

$$AB_1C_1D_2E$$

就是其中的一条。它的长度等于 19。我们问从 A 到 E 的所有的路中，以那一条的长度最短？

一个最直觉的办法就是找出从 A 到 E 的所有的路，求出它们的长度，从中找出最短的。象我们的这个问题，规模很小，一共只有 15 条路，按这个办法来求解是可行的。如果规模大了，就暴露了这个直觉的办法是言之有理、行之无效的。一定坚持按此来做，只能算是一个蛮干的办法。

有一个合理的办法：因为这里只有有限条路，每条路的长度是确定的，所以最短路是肯定存在的。我们现在来考虑顶点集合 $\{C_1, C_2\}$ 。最短路必然要经过顶点 C_1 或者 C_2 ，两者必有其一。如果最短路是经过顶点 C_1 的，那末，这条最短路上，从 C_1 到

E 的那一部分(叫做一节),从直观上看,应该也是最短的。是哪条呢?从 C_1 到 E 一共有三条路,经过 D_1 的长度是13($= 6 + 7$),经过 D_2 的,是12($= 6 + 6$),经过 D_3 的,是8($= 5 + 3$)。所以,最短的,该是 C_1D_3E ,它等于8,我们可以把上面的计算写成式子:

$$l(C_1, E) = \min \begin{bmatrix} 6 + 7 \\ 6 + 6 \\ 5 + 3 \end{bmatrix} = 8, \quad d(C_1) = D_3$$

$l(C_1, E)$ 表示从 C_1 到 E 的最短路的长度。 $d(C_1) = D_3$ 的意思是:“从 C_1 到 E 的最短路是从 C_1 出发,下一个顶点是 D_3 ,再……。”

如果最短路经过 C_2 ,这时,这条最短路上从 C_2 到 E 的那一节也是最短的。现在从 C_2 到 E 只有两条路,即有

$$l(C_2, E) = \min \begin{bmatrix} 4 + 6 \\ 2 + 3 \end{bmatrix} = 5, \quad d(C_2) = D_3 \quad (1)$$

即从 C_2 出发,下一个顶点是 D_3 ,再到 E ,长度等于5。

我们不考虑集合 $\{C_1, C_2\}$,而来考虑集合 $\{B_1, B_2, B_3\}$ 。这时,从 A 到 E 的一条最短路总要经过这三个顶点中的某一个,如果经过 B_1 ,则从 B_1 出发的那一节也应该是最短的。如果经过 C_1 再到 E ,那末,从 C_1 到 E 的最短路的长度已经算出,它等于8。所以,从 B_1 经过 C_1 到 E 的最短路的长度应该是14($= 6 + 8$)。又从 B_1 经过 C_2 到 E 的最短路的长度应该是8($= 3 + 5$)。写成式子,就有

$$l(B_1, E) = \min \begin{bmatrix} 6 + l(C_1, E) \\ 3 + l(C_2, E) \end{bmatrix}$$

$$= \min \left\{ \begin{array}{l} 6 + 8 \\ 3 + 5 \end{array} \right\} = 8, d(B_1) = C_2. \quad (2)$$

即从 B_1 出发的最短路由应是“从 B_1 出发，下一个顶点为 C_2 ，再….”

类似地，我们有

$$\begin{aligned} l(B_2, E) &= \min \left\{ \begin{array}{l} 5 + l(C_1, E) \\ 7 + l(C_2, E) \end{array} \right\} \\ &= \min \left\{ \begin{array}{l} 5 + 8 \\ 7 + 5 \end{array} \right\} = 12, d(B_2) = C_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l(B_3, E) &= \min \left\{ \begin{array}{l} 1 + l(C_1, E) \\ 4 + l(C_2, E) \end{array} \right\} \\ &= \min \left\{ \begin{array}{l} 1 + 8 \\ 4 + 5 \end{array} \right\} = 9, d(B_3) = C_1, C_2. \end{aligned}$$

这里， $d(B_3) = C_1, C_2$ 表示“从 B_3 出发，下一个顶点是 C_1 或者 C_2 ，再….”

最后，我们再考虑顶点 A 。我们有

$$\begin{aligned} l(A, E) &= \min \left\{ \begin{array}{l} 1 + l(B_1, E) \\ 4 + l(B_2, E) \\ 8 + l(B_3, E) \end{array} \right\} \\ &= \min \left\{ \begin{array}{l} 1 + 8 \\ 4 + 12 \\ 8 + 9 \end{array} \right\} = 9, d(A) = B_1. \quad (3) \end{aligned}$$

所以，从 A 到 E 的最短路的长度等于 9。这是怎样的一条路呢？由 (3) 式看到，从 A 出发，下一个顶点是 B_1 ，而由 (2) 式看到，从 B_1 出发，下一个顶点是 C_2 ，再由 (1) 式看到，下一个顶点是 D_3 ，再到达 E 。可见最短路由是

$$AB_1C_2D_3E$$

我们看到：它确实等于9，也确实是最短的。

这样就回答了我们的问题。

这是本书将要讨论的基本模型中的一个数例。我们将从它展开一系列需要讨论的问题和模型。

如果我们不是求最短路，而是求最长路，又怎么求解呢？如果我们的路长不是各有向边上的数之和，而是规定的乘积，又怎样讨论最大、最小的路呢？如果我们规定“路长”是各有向边上诸值中最小者（例如上图中有路 $AB_1C_1D_2E$ ，各边上的数是1，6，6，6，于是“路长”等于1），又怎样求出最大路呢？

再说我们求解上图的过程里，那样一步步地推算，不是令人感到烦琐、乏味，少了点数学美的感受吗？

能不能找到一个统一的思路、原理？能不能找到一个统一的、比较有效的推理、运算工具，使问题处理得更好一些？本书的目的就在于对此作出肯定的回答。

我们在第一章里，在一个抽象的数学系统——半域上，建立了矩阵概念，以作为全书推理、计算的主要工具。在第二章里，我们建立了嘉量原理，以替代R. Bellman的（有限型）最优优化原理及其递推公式。嘉量原理将作为全书的理论根据。

在解决了基本问题之后，我们将讨论一系列的应用问题：第三章里讨论了铺设管道问题、设备替换问题和库存问题；第四章里讨论了资源分配问题、背包问题和下料问题；第五章里讨论了网络中两类最优路问题的种种算法；第六章里讨论了零件排序问题、Euler游历与Hamilton回路问题以及一般的中国邮路问题与一般的巡回售货员问题。

我们对基本问题还作了推广，在第七章里讨论了两类 N 阶优问题。在第八章里讨论了多指标多阶段决策问题。

在这八章中，所讨论的都是决定型问题。

我们还讨论了随机型问题。在第九章里，系统地用多阶段有

向图和摹矩阵讨论了古典概率问题；在第十章里，建立了随机型嘉量原理，讨论了三种模型及一些应用问题；在第十一章里，讨论了Markov链与Markov决策链。

在最后一章里，还讨论了模糊型问题。我们建立了Fuzzy嘉量原理，采用特殊的摹矩阵——Fuzzy矩阵，讨论Fuzzy数学中的基本概念与问题，包括Fuzzy决策问题。

分散在各章里，还就数学中的某些问题，阐述了我们的看法。

本书涉及的内容，大量的可以在有限型动态规划书中找到。只是我们采用了摹矩阵与嘉量原理，许多方面有明显的不同。

本书用到很少一点微积分、线性代数与抽象代数知识。其余可以认为是自身满足的。

目 录

引言

第一章 摹矩阵

§1 半域	1
§2 半域 $\{\overline{C}, \wedge, +\}$	4
§3 半域 $\{\overline{C}, \overline{C}, \wedge, +\}$	8
§4 优选半域	11
§5 子半域 同构	13
§6 半域 $C \times B$	15
§7 摹矩阵的基本概念	16
§8 摹矩阵的运算规则	21
§9 分块摹矩阵	31
本章参考文献	34
练习题	35

第二章 嘉量原理

§1 图的基本概念	40
§2 嘉量原理	48
§3 多阶段有向图中的最优路问题	58
§4 摹乘积的最优算法	78

§5 幂方阵的幂乘幂的算法	84
§6 最优化原理 递推公式及对其几点评注	88
本章参考文献	95
练习题	96

第三章 多阶段决策问题

§1 铺设管道问题	
——模型PIPELINE-I	100
§2 铺设管道问题	
——模型PIPELINE-II	108
§3 设备替换问题	
——模型REPLACE-I	117
§4 设备替换问题	
——模型REPLACE-II	127
§5 库存问题的一般概念	131
§6 库存问题	
——模型INVENTORY-I	135
§7 库存问题	
——模型INVENTORY (BACK)-II	149
§8 库存问题	
——模型INVENTORY (LOST)-III	
与交货期 $\lambda > 0$ 的情形	153
本章参考文献	154
练习题	155

第四章 小型整数规划的应用问题

§1 数学规划 整数规划	161
§2 资源分配问题	

——模型ALLOCA-I ($N; X$)	167
§3 资源分配问题	
——模型ALLOCA-II ($N; X, Y$)	179
§4 模型ALLOCA-II ($N; X, Y$) 的另一求解方法	
——Lagrange乘数法	182
§5 多约束条件的资源分配问题	
——模型ALLOCA-III ($N; X_1, X_2, \dots, X_n$)	187
§6 资源分配问题	
——模型ALLOCA-IV ($N; aX + bY \leq M$)	189
§7 背包问题	
——模型KNAPSACK-I ($N; X$)	191
§8 二维背包问题	
——模型KNAPSACK-II ($N; X, X_1$)	202
§9 库存问题	
——模型INVENTORY-IV	209
§10 库存问题	
——模型INVENTORY(BACK)-V (凹问题)	222
本章参考文献	229
练习题	230

第五章 最优路的算法

§1 网络中的最优路	239
§2 基本概念与基本公式	243
§3 无回路网络中的第一类问题	
——模型OPTPATH-I	251
§4 统筹图中的主要矛盾线	258
§5 阳网络中的第一类问题	
——模型OPTPATH-II	

——Dijkstra算法	260
§6 无涡回路网络中的第一类问题	
——模型OPTPATH-Ⅲ	
——Ford算法 第一、第二Yen算法	268
§7 无涡回路网络中的第二类问题	
——模型OPTPATH-Ⅳ	
——广义Floyd算法	282
§8 模型OPTPATH-Ⅳ (续)	
——Floyd算法 Dantzig算法	
与Tabourier算法	288
§9 第一种可分解网络中的两类问题	
——模型OPTPATH-V与Ⅵ	313
§10 第二种可分解网络中的第二类问题	
——模型OPTPATH-Ⅶ	
——Hu算法	317
§11 特征摹向量 有限型距离空间	
与最优路问题	325
本章参考文献	328
练习题	330

第六章 排序问题

§1 零件排序问题与林类基本模型	336
§2 零件排序问题	
——模型JOBSCHEDULE-I~Ⅲ	340
§3 零件排序问题	
——模型JOBSCHEDULE-Ⅳ	348
§4 零件排序问题	
——模型JOBSCHEDULE-V(n, m)	357

§5. 确定相邻两零件次序的几个充分条件	368.
§6 PAIXU条件	382
§7 模型JOBSCHEDULE - V ($n, 3$) (续)	388
§8 Euler游历	393
§9 一般中国邮路问题 ——模型POSTMAN	397
§10 Hamilton回路	401
§11 一般旅行售货员问题 ——模型SALESMAN	405
§12 模型SALESMAN的几个近似算法	414
§13 竞赛图与模型JOBSCHEDULE - VI	421
§14 关于求解模型的算法复杂性问题	424
本章参考文献	437
练习题	440

第七章 N 阶优化路问题

§1 N 阶优化路与 N 阶优化解	442
§2 半域 N -THOPT与第1类首 N 阶优化路问题	451
§3. 半域 $\{P(t), \oplus, \otimes\}$ 、 $\{P(t), \oplus, \otimes\}$ 与第2类首 N 阶优化路问题	469
本章参考文献	478
练习题	479

第八章 多指标多阶段决策问题

§1 引言	481
§2 多指标优化问题的提出及其基本概念	482
§3 综合评判法	489
§4 分层序列法与淘汰法	492

§5 半域 R^1 广义优选运算	496
§6 半域PARETO多指标嘉量原理	506
§7 多指标多阶段有向图的优化解综合评判法	513
本章参考文献	520
练习题	521

第九章 初等概率

§1 基本概念	524
§2 条件概率	527
§3 序列试验	548
§4 随机变量及其数字特征	555
本章参考文献	563
练习题	564

第十章 随机型多阶段决策问题

§1 随机型有向图的期望报酬的一个例	567
§2 开环控制与全控制的一般模型	578
§3 随机型设备替换问题	
——模型STOREPLACE - I	583
§4 随机型设备替换问题	
——模型STOREPLACE - II ~ III	591
§5 随机型设备替换问题	
——模型STOREPLACE - IV	595
§6 随机型库存问题	
——模型STOINVENT - I	601
§7 随机型库存问题	
——模型STOINVENT (BACK) - II	
——模型STOINVENT (LOST) - III	605