

HITP

数学奥林匹克系列

2008·第二辑(竞赛卷)

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

刘培杰 主编

《数学奥林匹克与数学文化》
是数学竞赛与数学文化方面
的系列专业文集。本文集旨
在为从事数学竞赛的师生与
从事数学文化研究与传播的
专业人员提供深度阅读,搭建
表达平台,促进海内外华人同
业人士的学术交流与合作,推
动数学的普及与进步。

哈尔滨工业大学出版社

012/17
:2008(2)
2008

HITP

数学奥林匹克系列

2008·第二辑(竞赛卷)

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

刘培杰 主编

哈尔滨工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克与数学文化.第二辑,竞赛卷/刘培杰主
编.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.8
ISBN 978-7-5603-2599-6

I.数… II.刘… III.数学课-中学-竞赛题-研究
IV.G634.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 125148 号

策划编辑 刘培杰
责任编辑 康云霞
封面设计 卞秉利
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 32 字数 694 千字
版 次 2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2599-6
印 数 1~3 000 册
定 价 48.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



《数学奥林匹克与数学文化》主编刘培杰等与俄罗斯《中学数学教学》编辑部负责人合影

简 讯

2007年9月5-15日哈尔滨工业大学出版社一行四人参加第20届莫斯科国际图书博览会，并顺访了俄罗斯《中学数学教学》杂志社与《量子》杂志社，就双方开展数学奥林匹克的教学与研究的合作交流达成共识。



双方讨论具体合作事宜



《量子》杂志社一角



刘培杰与俄罗斯同行在数学图书展区



《数学奥林匹克与数学文化》主编刘培杰与俄罗斯数学奥林匹克选手合影

征 稿 启 事

《数学奥林匹克与数学文化》是由哈尔滨工业大学出版社出版的数学普及系列文集。本文集发表原创性的数学奥林匹克和数学文化方面的学术论文(中文或英文),内容涉及数学竞赛试题背景研究,数学竞赛试题与现代数学的联系,专题综述,数学应用,数学趣闻,数学家小传等。本文集的宗旨是搭建高端平台,提供深度阅读,活跃奥数研究,促进数学传播。本文集倡导规范严谨的研究方法,提倡高等数学与初等数学相结合的学术取向,鼓励高校教师参与初等研究,期待数学大家现身数学普及。

来稿请寄哈尔滨工业大学出版社《数学奥林匹克与数学文化》文集编辑室

地址: 中国 黑龙江省哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号

邮编: 150006

电话: 0451-86281378 13904613167

E-mail: lpj1378@yahoo.com.cn



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室



已出版(即将出版)图书目录

书 名	出版 时间	定 价
平面几何证明方法全书	2007 - 08	35.00
平面几何证明方法全书习题解答	2006 - 12	18.00
500 个最新世界著名数学智力趣题	2007 - 04	48.00
初等数论难题集	即将出版	98.00
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006 - 05	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008 - 01	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	即将出版	48.00
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006 - 05	58.00
新编中学数学解题方法全书(高中版) 上卷	2007 - 09	38.00
新编中学数学解题方法全书(高中版) 中卷	2007 - 09	48.00
新编中学数学解题方法全书(高中版) 下卷(一)	2007 - 09	42.00
新编中学数学解题方法全书(高中版) 下卷(二)	2007 - 09	38.00
从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007 - 10	48.00
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008 - 01	48.00
从哥德巴赫到陈景润	即将出版	88.00
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)	2006 - 12	68.00
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007 - 03	28.00
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007 - 09	38.00
精神的圣徒 别样的人生——50 位中国数学家成长的历程	即将出版	48.00
中考数学专题总复习	2007 - 04	28.00
中等数学英语阅读文选	2006 - 12	38.00
统计学专业英语	2007 - 03	28.00
数学 我爱你	2008 - 01	28.00
数学思想领悟	2008 - 03	38.00
数学眼光透视	2008 - 03	38.00
数学建模导引	2008 - 03	38.00
数学方法溯源	2008 - 03	38.00
数学史话揽胜	2008 - 03	38.00
数学应用展现	2008 - 03	38.00
初等数学研究	2008 - 06	38.00
多项式和无理数	2008 - 04	68.00
数论选讲	2008 - 04	48.00

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

邮 编:150006

联系电话:0451 - 86281378 13904613167

E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

数学奥林匹克与数学文化

Mathematical Olympiads and Mathematical Culture

2007·第二辑 竞赛卷

目 录 CONTENTS

IMO 试题研究

Research on IMO Test

- 1 从 $4\,444^{444}$ 的各位数字和谈起
- 4 关于一道 IMO 妙题的探讨
- 13 关于一道 IMO 名题的推广
- 30 第 46 届国际数学奥林匹克试题三的证明、加强与推广

高中联赛试题研究

Research on Test Questions of High School League Matches

- 43 2005 年全国高中数学联赛加试第二题的溯源与解答
- 49 2005 年全国高中数学联赛加试第二题解答与评述
- 52 一道数学竞赛试题的注记
- 57 2005 年全国高中数学联赛加试第一题新解
- 59 一道全国高中数学联赛试题与 Sperner 引理

普特南竞赛试题研究

Research on Test Questions of Putnam

- 90 一道普特南竞赛题的初等解法

莫斯科数学竞赛试题研究

Research on Test Questions of
Moscow Mathematics Competition

- 93 关于一道莫斯科数学竞赛试题的背景

各国竞赛试题研究

Research on Multinational Test Questions

- 98 从一道伊朗数学奥林匹克试题的解法谈卡拉西奥多里定理

地方数学竞赛试题研究

Research on Local Mathematical Test

- 103 五朵“金花”如何排队

- 110 近年高考与竞赛试题中有关李普希兹条件的几个问题

几何天地

Geometry World

- 132 三个几何问题思考

- 140 两正一反三相似图形

- 172 一道几何题的证明及其联想

- 181 神灵相助 魔术分身

- 187 关于“平面等周问题的简单解法”的注记

- 189 平面等周问题的简单解法

- 198 分点圆——一个预赛题背景

- 207 平面凸区域

- 210 椭圆中的格点

复域漫步

Stroll in Complex Domain

- 215 Rouché 定理的两个应用

219	复分析	
228	关于在复平面上三角形重心的复数表示及其在数学竞赛中的应用	
231	复数三角形面积公式的应用	
237	Position vectors; vector and complex-number methods in geometry	
	解法研究	Problems Solving Mode
281	关于一道妙题的再推广	
290	关于一道理科实验班复试试题的证明的几点笔记	
	史海钩沉	Research on the Competition in the Past
294	在波兰的数学竞赛会	
303	写在 1956 年数学竞赛结束之后	
306	夫妇圆桌公式的相互关系	
	经典重温	Sutra Once More
308	几何学中的归纳法	
	资料包	Data Base
363	数学奥林匹克中的切比雪夫逼近问题	
446	舒尔定理和范德瓦尔登定理	
	数论杂谈	Talking about Number Theory
463	一个判别 F_n 是否为素数的方程	
	英语之角	English Corner
465	Classroom Notes	

- 467 Note on a Remake of Wald

业内信息

Internal Information

- 469 “希望杯”全国数学邀请赛香港赛区命题委员会工作会议纪要
- 471 “希望杯”全国数学邀请赛香港赛区组织委员会顾问、主任委员、副主任委员名单
- 472 “希望杯”全国数学邀请赛香港赛区命题委员会名单
- 475 第二届全国数学奥林匹克研讨会通讯录 上海—2005

读者来信

Letters from Readers

- 480 读者来信 第一封
- 483 读者来信 第二封

试题之窗

The Column of Test Questions

- 484 2006 年全国高中数学联合竞赛试题
- 486 2006 年全国高中数学联合竞赛试题参考答案
- 490 2006 年全国高中数学联合竞赛加试试卷
- 491 2006 年全国高中数学联合竞赛加试试题参考答案

译文征集

Solicit Translations

- 494 ЭТюд о формуле Эйлера
- 498 Гипотеза Каталана

编后语

Postscript

从 $4\,444^{4\,444}$ 的各位数字和谈起

吴康^① 龙开奋^②

第16届国际数学奥林匹克(IMO)第4题为“当 $4\,444^{4\,444}$ 写成十进制时,它的各位数字之和是 A ,设 B 为 A 的各位数字之和,求 B 的各位数字之和.(A 和 B 都写成十进制数)”原题解用到著名的九余法,优雅且简洁:

解 设 $n = 4\,444^{4\,444}$, B 的各位数字和为 C ,则由九余法得 $C \equiv B \equiv A \equiv n \equiv (-2)^{4\,444} = (2^6)^{740} \cdot 2^4 \equiv 1^{740} \cdot 16 \equiv 7 \pmod{9}$. 又 $n < (10^4)^{4\,444} < 10^{20\,000}$, $A \leq 20\,000 \times 9 = 180\,000$, $B \leq 5 \times 9 = 45$, $C \leq 3 + 9 = 12$,故 $C = 7$.

本文拟推广此问题.以下不加说明时均在十进制中讨论.

定义1 设 k 为正整数,把非负整数 n 从右至左每 k 位分一段(最左一段不是 k 位时可在前面补零凑够 k 位),诸段从右至左记为 $A_0, A_1, A_2, \dots, A_m$ (m 为非负整数),称之为 n 的 k 分段.代数和 $A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_m$ 称为 n 的 k 分段和, $A_0 - A_1 + A_2 - \dots + (-1)^m A_m$ 称为 n 的 k 分段交替和,分别记为 $g_k(n)$ 和 $h_k(n)$.

定义2 对负整数 n ,定义 $g_k(n) = -g_k(-n)$, $h_k(n) = -h_k(-n)$,仍称为 n 的 k 分段和、 k 分段交替和.

引理1 设 k 为正整数,正整数 P 整除 $10^k - 1$, n 为整数,则 $n \equiv g_k(n) \pmod{P}$.

证明 对非负整数 i ,有 $10^{ik} - 1 \equiv 1^i - 1 = 0 \pmod{10^k - 1}$,故 $10^{ik} \equiv 1 \pmod{P}$.

若 $n \geq 0$,由引理1, $n = \sum_{i=0}^m A_i \cdot 10^{ik} \equiv \sum_{i=0}^m A_i \cdot 1 = g_k(n) \pmod{P}$. 若 $n < 0$,由引理2易得同样结论.

引理1又称为“ P 余法”.

引理2 设 k 为正整数,正整数 Q 整除 $10^k + 1$, n 为非负整数,则 $n \equiv h_k(n) \pmod{Q}$.

证明 对非负整数 i ,有 $10^{ik} - (-1)^i \equiv (-1)^i - (-1)^i = 0 \pmod{10^k + 1}$,故

① 吴康(1957—),男,广东高州人,汉族,硕士,华南师范大学副教授,研究生导师,《中学教学研究》主编,数学教育指导组(硕士和教育硕士)组长,中国数学奥林匹克高级教练员.

② 龙开奋(1956—),男,广西天等人,壮族,广西师范大学副教授,研究生导师,“21世纪园丁工程”导师,中国数学奥林匹克高级教练员.

$10^{ik} \equiv (-1)^i \pmod{Q}$. 若 $n \geq 0$, 由引理 1, $n = \sum_{i=0}^m A_i \cdot 10^{ik} \equiv \sum_{i=0}^m A_i \cdot (-1)^i = h_k(n) \pmod{Q}$. 若 $n < 0$, 由引理 2 易得同样结论.

引理 2 又称为“Q 余法”. 以下是一些推广问题:

问题 1 设 $n = 4\,444^{4\,444}$, n 的 2 分段和是 A , A 的 2 分段和是 B , 求 B 的 2 分段和 C .

解 由 99 余法得 $C \equiv B \equiv A \equiv n \pmod{99}$. 注意到 $99 = 9 \times 11$, 9 和 11 互质, $n \equiv 7 \pmod{9}$ (原题解), $n \equiv 0 \pmod{11}$, 故易得 $C \equiv n \equiv 88 \pmod{99}$. 又 $n < 10^{20\,000}$, $A \leq 10\,000 \times 99 = 990\,000$, $B \leq 98 + 2 \times 99 = 296$, $C \leq 1 + 99 = 100$. 故 $C = 88$.

问题 2 设 $n = 4\,444^{4\,444}$, n 的 3 分段和是 A , A 的 3 分段和是 B , 求 B 的 3 分段和 C .

解 由 999 余法得 $C \equiv B \equiv A \equiv n \pmod{999}$. 注意到 $999 = 27 \times 37$, 27 和 37 互质. 而 $n \equiv 16^{4\,444} = 2^{17\,776} = (2^9)^{1\,975} \times 2 \equiv (-1)^{1\,975} \times 2 \equiv -2 \pmod{27}$; $n \equiv 4^{4\,444} = 2^{8\,888} = (2^{18})^{493} \times 2^{14} \equiv (-1)^{493} \times 2^{14} \equiv 7 \pmod{37}$. 由孙子定理易得到 $n \equiv 673 \pmod{999}$. 又 $n < 10^{20\,000}$, $A \leq 6\,667 \times 999 < 6\,667\,000$. $B \leq 5 + 2 \times 999 = 2\,003$, $C \leq 1 + 999 = 1\,000$. 故 $C = 736$.

问题 3 设 $n = 4\,444^{4\,444}$, $A = h_1(n)$, $B = h_1(A)$, $C = h_1(B)$, 求 C .

解 由 11 余法得 $C \equiv B \equiv A \equiv n \equiv 0 \pmod{11}$. 又 $n < (10^4)^{4\,444}$, $|A| \leq 8\,888 \times 9 = 79\,992$, $|B| \leq 9 - 0 + 9 - 0 + 6 = 24$, $|C| \leq 9$. 故 $C = 0$.

问题 4 设 $n = 4\,444^{4\,444}$, $A = h_2(n)$, $B = h_2(A)$, $C = h_2(B)$, 求 C .

解 由 101 余法得 $C \equiv B \equiv A \equiv n \equiv 0 \pmod{101}$, 又 $n < (10^4)^{4\,444}$, $|A| \leq 4\,444 \times 99 = 439\,956$, $|B| \leq 99 - 00 + 43 = 142$, $|C| \leq 99$. 故 $C = 0$.

问题 5 设 $n = 4\,444^{4\,444}$, $A = h_3(n)$, $B = h_3(A)$, $C = h_3(B)$, 求 C .

解 由 1 001 余法得 $C \equiv B \equiv A \equiv n \pmod{1\,001}$. 注意到 $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$, 7, 11, 13 两两互质, $n \equiv (-1)^{4\,444} = 1 \pmod{7}$; $n \equiv 0 \pmod{11}$; $n \equiv (-2)^{4\,444} = (2^6)^{740} \times 2^4 \equiv (-1)^{740} \times 16 \equiv 3 \pmod{13}$. 由孙子定理算得 $n \equiv 484 \pmod{1\,001}$. 又 $n < (10^4)^{4\,444} = 10^{17\,776}$, $|A| \leq 5\,926 \times 999 = 5\,920\,074$, $|B| \leq 999 - 000 + 5 = 1\,004$, $|C| \leq 999$. $C = 484$ 或 -515 .

注: 问题 5 尚未获得最后结果.

以下约定: 对正整数 n , N_n 表示从左至右把 $1, 2, 3, \dots, n$ 各项连排所得正整数. 如 $N_5 = 12345$, $N_{15} = 123456789101112131415$, $N_{105} = 123456789101112 \cdots 99100101 \cdots 105$.

问题 6 设 $A = g_1(N_{2006})$, $B = g_1(A)$, $C = g_1(B)$, 求 C .

解 $C \equiv B \equiv A \equiv N_{2\,006} \equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + 2\,006 = 1\,003 \times 2\,007 \equiv 0 \pmod{9}$. 又 $N_{2\,006}$ 的位数为 $9 \times 1 + 90 \times 2 + 900 \times 3 + 1\,007 \times 4 = 6\,917$, 故 $A \leq 6\,917 \times 9 = 62\,253$, $B \leq 5 + 4 \times 9 = 41$, $C \leq 3 + 9 = 12$, 从而 $C = 9$.

问题 7 设 $A = g_2(N_{2006})$, $B = g_2(A)$, $C = g_2(B)$, 求 C .

解 $C \equiv B \equiv A \equiv N_{2\,006} \equiv 1 + 23 + 45 + 67 + 89 + 10 + 11 + 12 + \cdots + 99 + 100\,101 + 102\,103 + \cdots + 998\,999 + 1\,000 + 1\,001 + \cdots + 2\,006 = 225 + 109 \times 45 + 1\,099\,100 \times 225 + 1\,503 \times 1\,007 \equiv 27 + 10 \times 45 + 2 \times 27 + 18 \times 17 \equiv 837 \equiv 45 \pmod{99}$.

又 N_{2006} 是 6 917 位数, 故 $A \leq 3\,459 \times 99 = 342\,441$, $B \leq 33 + 2 \times 99 = 231$, $C \leq 1 + 99 = 100$, 从而 $C = 45$.

问题 8 设 $A = g_3(N_{2007})$, $B = g_3(A)$, $C = g_3(B)$, 求 C .

解 $C \equiv B \equiv A \equiv N_{2007} \equiv 123 + 456 + 789 + 101\,112 + 131\,415 + \cdots + 979\,899 + 100 + 101 + 102 + \cdots + 999 + 100\,010\,011\,002 + 100\,310\,041\,005 + 200\,520\,062\,007 = 1\,368 + 1\,081\,011 \times 15 + 1\,099 \times 450 + 300\,530\,073\,009 \times 168 \equiv 369 + 93 \times 15 + 100 \times 450 + 912 \times 168 \equiv 199\,980 \equiv 180 \pmod{999}$. 又 N_{2007} 是 6 921 位数, 故 $A \leq 2\,307 \times 999 = 2\,304\,693$, $B \leq 1 + 2 \times 999 = 1\,999$, $C \leq 1 + 999 = 1\,000$. 从而 $C = 180$.

问题 9 设 $A = h_1(N_{2006})$, $B = h_1(A)$, $C = h_1(B)$. 求 C .

解 $C \equiv B \equiv A \equiv N_{2006} \equiv 45 \equiv 1 \pmod{11}$. 又 N_{2006} 是 6 917 位数, 故 $|A| \leq 3\,459 \times 9 = 31\,131$, $|B| \leq 3 + 9 + 9 = 21$, $|C| \leq 9$. 从而 $C = 1$.

问题 10 设 $A = h_2(N_{2006})$, $B = h_2(A)$, $C = h_2(C)$, 求 C .

解 $C \equiv B \equiv A \equiv N_{2006} \equiv 1 - 23 + 45 - 67 + 89 - 10 + 11 - 12 + 13 - \cdots - 98 + 99 - 100\,101 + 102\,103 - 104\,105 + 106\,107 - \cdots - 996\,997 + 998\,999 + 1\,000 + 1\,001 + \cdots + 2\,006 = 45 + 45 + 2\,002 \times 225 + 1\,503 \times 1\,007 \equiv 90 - 18 \times 23 + (-12) \times (-3) \equiv 15 \pmod{101}$. 又 N_{2006} 是 6 917 位数, 故 $|A| \leq 1\,730 \times 99 = 171\,270$, $|B| \leq 17 + 99 = 116$, $|C| \leq 99$. 从而 $C = 15$ 或 -86 .

注: 问题 10 尚未获得最后结果.

问题 11 设 $A = h_3(N_{2007})$, $B = h_3(A)$, $C = h_3(B)$, 求 C .

解 $C \equiv B \equiv A \equiv N_{2007} \equiv 123 - 456 + 789 + 101\,112 + 131\,415 + \cdots + 979\,899 - 100 + 101 - 102 + 103 - \cdots - 998 + 999 + 100\,010\,011\,002 + 100\,310\,041\,005 + \cdots + 200\,520\,062\,007 = 456 + 1\,081\,011 \times 15 + 450 + 300\,530\,073\,009 \times 168 \equiv 906 + (-69) \times 15 + 166 \times 168 = 27\,759 \equiv 732 \pmod{1\,001}$. 又 N_{2007} 为 6 921 位数, 故 $|A| \leq 1\,154 \times 999 = 1\,152\,846$, $|B| \leq 999 + 1 = 1\,000$, $|C| \leq 999$. 从而 $C = 732$ 或 -269 .

注: 问题 11 尚未获得最后结果.

题解中用到的一些技巧留给读者理解和发挥.

[编者注] 本文作者之一吴康先生文理兼备, 好写诗文, 抒发情怀. 2007 年 7 月 23 日晚给编者发来短信赋诗一首. 录于文末, 奇文共赏.

荣升感言: “圆规粉笔过来人, 平面风云今履新. 莫道青春随数去, 化为桃李又青春.” 编者不解“荣升”二字何意, 发过短信问荣升何意. 不一会, 短信回来: “今天年满 50, 荣升老人”. 编者大笑, 怪自己不懂幽默. 遂又回短信: “革命人永远是年轻”.

2007 年中秋节, 吴先生又发来短信, 赋诗一首: 采桑子! 中秋随想. “自由愿付登天价, 古有嫦娥! 今又嫦娥, 华夏腾飞疾似梭, 蟾宫折桂神仙梦, 百族祥和, 环宇祥和, 碧海青天日月歌!” 好诗!

关于一道 IMO 妙题的探讨

邓寿才^①

1 加 强

第 41 届 IMO 第 2 题是由美国提供的一道妙题:

设 a, b, c 是正实数, 且满足 $abc = 1$. 证明

$$(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) \leq 1 \quad (A)$$

放眼观察, (A) 式的结构紧凑, 外形优美. 据笔者初探, 本妙题约有 10 种证法, 限于篇幅, 从略.

如果我们证(A) 式左边为 P , 再证

$$T = \frac{1}{3} \left[(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c}) + (b - 1 + \frac{1}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) + (c - 1 + \frac{1}{a})(a - 1 + \frac{1}{b}) \right] \quad (1)$$

那么, 我们可以首先将(A) 式完善成一个漂亮的双向不等式

$$T \geq 1 \geq P \quad (B)$$

证明 设 $x_1, x_2, x_3 > 0$, 且 $a = \frac{x_1}{x_2}, b = \frac{x_2}{x_3}, c = \frac{x_3}{x_1}$, 则不等式 $T \geq 1$ 化为

$$\sum x_1(x_1 + x_2 - x_3)(x_3 + x_1 - x_2) \geq 3x_1x_2x_3 \quad (2)$$

$$\text{令 } \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x_2 + x_3 - x_1) > 0 \\ y = \frac{1}{2}(x_3 + x_1 - x_2) > 0 \\ z = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y + z \\ x_2 = z + x \\ x_3 = x + y \end{cases}$$

代入②式得

^① 四川省泸州市纳溪区上马镇银坪村.

$$\begin{aligned}
 4\sum yz(y+z) &\geq 3\prod(y+z) \Leftrightarrow 4\sum x^2(y+z) \geq 3\sum x^2(y+z) + 6xyz \Leftrightarrow \\
 \sum x^2(y+z) &\geq 6xyz \Leftrightarrow \sum x(y^2+z^2) - 6xyz \geq 0 \Leftrightarrow \\
 \sum x(y-z)^2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

即②式成立,从而(B)式得证,等号成立仅当 $x = y = z \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

在题设条件下,笔者建立了不等式(A)的五个加强式

$$P \leq 1 - \frac{2}{3}Q_1 \quad (C)$$

其中

$$Q_1 = \sum \left(a + \frac{1}{b} - 1\right) \left(\sqrt{c} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \geq 0$$

$$P \leq 1 - \frac{1}{9}Q_2 \quad (D)$$

其中

$$Q_2 = \sum \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0$$

$$P \leq 27(\sqrt[3]{ab^2} + \sqrt[3]{bc^2} + \sqrt[3]{ca^2})^{-3} \quad (E)$$

$$P \leq 1/(1+Q_3) \quad (F)$$

其中

$$Q_3 = \frac{5}{6} \left[\prod \left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}} - \sqrt[3]{\frac{c}{b}} \right) \right]^{\frac{2}{3}} \quad (G)$$

$$P \leq 1/(1+Q_4)$$

其中

$$Q_4 = \frac{1}{27} \left(\sum \left| \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right| \right)^2$$

限于篇幅,本文仅给出(D)式的证明,其余的留给大家练习.

(D)式的证明:

设 $a = x/y, b = y/z, c = z/x (x, y, z > 0)$, 则 $P = \prod \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) =$

$\frac{\prod(y+z-x)}{xyz}$. 再设 $t = \sum x^2(y+z-x)$, 且

$$\left. \begin{aligned}
 x &\geq y \geq z > 0 \\
 x &= z + m \\
 y &= z + n \\
 (m &\geq n \geq 0)
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3xyz - \sum x^2(y+z-x) = \sum x(x-y)(x-z) =$$

$$\begin{aligned}
 &(z+m)(m-n)m + (z+n)(n-m)n + zmn = \\
 &z(m-n)^2 + (m+n)(m-n)^2 + zmn \geq \\
 &z(m-n)^2 = z(x-y)^2 \Rightarrow 3xyz - t \geq z(x-y)^2
 \end{aligned}$$

同理

$$\left\{ \begin{aligned}
 3xyz - t &\geq y(z-x)^2 \\
 3xyz - t &\geq x(y-z)^2
 \end{aligned} \right. \Rightarrow 3(xyz - t) \geq \sum x(y-z)^2 \Rightarrow$$

$$t \leq 3xyz - \frac{1}{3} \sum x(y-z)^2 \quad (3)$$

现在证明

$$t = \sum x^2(y+z-x) \geq 3 \prod (x+y-z) \quad (4)$$

令

$$\begin{cases} y+z-x=2\lambda \geq 0 \\ z+x-y=2u \geq 0 \\ x+y-z=2v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=u+v \\ y=v+\lambda \\ z=\lambda+u \end{cases}$$

$$3 \prod (x+y-z) \leq \sum x^2(y+z-x) \Leftrightarrow$$

$$12\lambda uv \leq \sum \lambda(u+v)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum v[(\lambda-u)^2 + 4\lambda u] \geq 12\lambda uv \Leftrightarrow \sum \lambda(\mu-v)^2 \geq 0$$

即④式成立.③和④两式结合得

$$P \leq t/(3xyz) = \sum x^2(y+z-x)/(3xyz) \leq \frac{3xyz - \frac{1}{3} \sum x(y-z)^2}{3xyz} =$$

$$1 - \frac{1}{9} Q_2 \Rightarrow P \leq 1 - \frac{1}{9} Q_2$$

其中

$$Q_2 = \frac{\sum x(y-z)^2}{9xyz} = \sum \left(\sqrt{\frac{y}{z}} - \sqrt{\frac{z}{y}} \right)^2 = \sum \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)^2$$

即(D)式成立.等号成立仅当 $a=b=c=1$.

2 参数推广

许多不等式都可以从参数方面进行推广,不等式(A)也不例外.

推广一(参数推广) 设 a, b, c, λ 是正实数,且满足 $abc = \lambda^3$,证明

$$(a - \lambda + \frac{\lambda^2}{b})(b - \lambda + \frac{\lambda^2}{c})(c - \lambda + \frac{\lambda^2}{a}) \leq \lambda^3 \quad (H)$$

证明 设 $x, y, z > 0$, 令 $a = \frac{\lambda x}{y}, b = \frac{\lambda y}{z}, c = \frac{\lambda z}{x}$, 于是(H)式等价于

$$\left(\frac{\lambda x}{y} - \lambda + \frac{\lambda^2 z}{\lambda y} \right) \left(\frac{\lambda y}{z} - \lambda + \frac{\lambda^2 x}{\lambda z} \right) \left(\frac{\lambda z}{x} - \lambda + \frac{\lambda^2 y}{\lambda x} \right) \leq \lambda^3$$

即

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \leq xyz \quad (5)$$

设

$$\begin{cases} u = y+z-x \\ v = z+x-y \\ w = x+y-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v=2z > 0 \\ v+w=2x > 0 \\ w+u=2y > 0 \end{cases}$$

因此 u, v, w 中最多只有一个为负数.

若 u, v, w 中恰有一个为负数,则

$$uvw \leq 0 < xyz$$

⑤式成立;若 u, v, w 均大于0,则

$$\sqrt{uv} = \sqrt{(y+z-x)(z+x-y)} \leq \frac{1}{2} [(y+z-x) + (z+x-y)] = z$$

同理, $\sqrt{vw} \leq x, \sqrt{wu} \leq y$. 所以 $uvw \leq xyz$, 即⑤式成立, 从而(H)式成立, 等号成

立仅当

$$x = y = z \Leftrightarrow a = b = c = \lambda$$

3 指数推广

现在我们从指数角度推广不等式(A).

推广二(指数推广) 设 a, b, c 为正实数, 且满足 $abc = 1, \alpha, \beta, \gamma$ 均为正数, 则

$$(a - 1 + \frac{1}{b})^\alpha \cdot (b - 1 + \frac{1}{c})^\beta \cdot (c - 1 + \frac{1}{a})^\gamma \leq a^{\alpha_1} \cdot b^{\beta_1} \cdot c^{\gamma_1} \quad (I)$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(3\alpha + \beta - \gamma), \quad \beta_1 = \frac{1}{2}(3\beta + \gamma - \alpha), \quad \gamma_1 = \frac{1}{2}(3\gamma + \alpha - \beta)$$

显然, 当取 $\alpha = \beta = \gamma = 1$ 时, $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \frac{3}{2}$. (I) 式化为(A) 式.

证明 从已知条件知 a, b, c 中最多两个大于等于1, 或者最多有两个小于等于1. 因此易知 $a - 1 + \frac{1}{b}, b - 1 + \frac{1}{c}, c - 1 + \frac{1}{a}$ 中最多有一个小于0, 此时(I) 式显然成立, 否则将导致矛盾. 于是

$$\begin{aligned} (a - 1 + \frac{1}{b})(c - 1 + \frac{1}{a}) &= (a - 1 + ac)(c - 1 + \frac{1}{a}) = \\ &a(1 - \frac{1}{a} + c)(c - 1 + \frac{1}{a}) \leq a \left[\frac{(1 - \frac{1}{a} + c) + (c - 1 + \frac{1}{a})}{2} \right]^2 = ac^2 \end{aligned}$$

设 $x, y, z > 0$, 则有

$$\left[(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c}) \right]^y \leq (ac^2)^y$$

同理

$$\left[(b - 1 + \frac{1}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) \right]^z \leq (a^2b)^z$$

$$\left[(c - 1 + \frac{1}{a})(a - 1 + \frac{1}{b}) \right]^x \leq (b^2c)^x$$

将上面三式相乘, 得

$$(a - 1 + \frac{1}{b})^{y+z} \cdot (b - 1 + \frac{1}{c})^{z+x} \cdot (c - 1 + \frac{1}{a})^{x+y} \leq a^{y+2z} \cdot b^{z+2x} \cdot c^{x+2y} \quad (6)$$

令

$$\begin{cases} y + z = \alpha > 0 \\ z + x = \beta > 0 \\ x + y = \gamma > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(\beta + \gamma - \alpha) \\ y = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha - \beta) \\ z = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = y + 2z = \frac{1}{2}(3\alpha + \beta - \gamma) \\ \beta_1 = z + 2x = \frac{1}{2}(3\beta + \gamma - \alpha) \\ \gamma_1 = x + 2y = \frac{1}{2}(3\gamma + \alpha - \beta) \end{cases}$$

代入⑥式即得(I) 式. 等号成立仅当 $a = b = c = 1$.

其实, 由于 $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha - \gamma), \beta_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) + (\beta - \alpha), \gamma_1 =$