丛书主编 陈东旭

金太阳系列丛书

GAOKAO RENWOXING

高考任我行

——高考第一轮复习用书（B版）

数学

主编 葛立其

江西高校出版社

总　策　划　刘春华
　　　　　　刘俊初
　　　　　　欧阳彩云
责任编辑　那晓萍
　　　　　　周应龙
封面设计　甘金文

ISBN 978-7-81075-888-8
9 787810 758888 >
总定价:218元(全套共6册)

金太阳系列丛书

丛书主编　陈东旭

高考任我行

——高考第一轮复习用书（B版）

数学

江西金太阳教育研究所　组织编写

主　编：葛立其

副主编：刘光清　杜建刚

编　委：(按姓氏笔画排列)

王　俊　刘正章　刘光清　刘国强　刘祖希

江厚利　何东华　何泉清　杜建刚　杨　波

闵　睿　胡棋峰　袁永平　高登科　高　解

葛立其　熊志远　黎金传

江西高校出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考任我行.高考第一轮复习用书.B版.数学/葛立其主编.—南昌:江西高校出版社,2007.3

(金太阳系列丛书/陈东旭主编)

ISBN 978-7-81075-888-8

Ⅰ.高… Ⅱ.葛… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料

Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 038092 号

出版发行	江西高校出版社
社　　址	江西省南昌市洪都北大道 96 号
邮政编码	330046
电　　话	(0791)8529392,8504319
网　　址	www.juacp.com
印　　刷	武宁县印刷厂
照　　排	江西金太阳教育研究有限公司照排部
经　　销	各地新华书店
开　　本	889mm×1194mm　1/16
印　　张	129.5
字　　数	4921 千字
版　　次	2007 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
印　　数	1～30000
书　　号	ISBN 978-7-81075-888-8
定　　价	218.00 元(全套共 6 册)

前言 GAO KAO REN WO XING

在崎岖的书山中艰难跋涉时，您需要得到的该是专家名师的“轻功秘籍”吧。在茫茫的题海里盲目漂流时，您渴望享有的应是开拓先锋的“航海指南”吧。

《高考任我行》，就是您跋涉时的“轻功秘籍”，漂流时的“航海指南”！

我们无意于给嶙峋的书山增添一方风景，我们只想在您奋勇登攀时悄悄递上一根支撑的手杖；我们无意于给浩渺的题海多添一瓢盐水，我们只想为您提供横渡题海的轻舟与双桨。让您愉快穿越茂密的丛林，登上希望的峰巅；使您轻松驾驭进取的风帆，驶向理想的港湾！

本册为数学分册，其主要栏目有：

- 章首总纲
  - 考纲要求
    - 宗旨：既叙述2007年考试大纲的最新要求，又结合近年来高考试题的实际命题趋势，综合全国名师的备考经验，专门列出“复习应达到的要求”。让师生明确大纲要求与实际考试要求，轻松驾驭高考。
    - 特色：以“考试要求”为本，以“复习应达到的要求”为补充，准确把握高考动向。
  - 知识框图
    - 宗旨：以框图形式扼要展示本章知识体系，理清知识脉络条理，有机地整合各知识点，帮助学生理清思路，宏观把握整章知识结构。
    - 特色：明确各知识点的交汇与联系。
  - 复习指导
    - 宗旨：从指导性的角度叙述了全国名师最有效的复习方法，对学生、对教师都有很好的指导作用。
    - 特色：注意对方法与策略的借鉴与利用。
- 小节分叙
  - 知识精要
    - 宗旨：叙述各小节的重要基础知识(包括定义、定理、公式)与重要规律，其目的是让学生全面掌握有关知识，巩固基础。
    - 特色：一书在手，什么都有。
  - 考题试解
    - 宗旨：选取近年高考基础性真题(选择题与填空题)，供学生在学完“知识精要”后，自己练习完成。
    - 特色：既训练基础，又了解高考趋势。
  - 例题精讲
    - 宗旨：根据本小节的内容、高考要求，结合主要题型和解题技巧，选择了若干例题，以“分析—解析—点评”的形式编写。
    - 特色：揭示解题方法技巧与规律，例题后均配有备选题。
  - 错解剖析
    - 宗旨：在本小节内容中的易错点上选一道错解题，对错误根源进行分析。
    - 特色：揭示规避技巧，要求有普遍的指导意义。
  - 方法归纳
    - 宗旨：叙述本小节内容的解题方法与技巧。
    - 特色：揭示数学思想。
  - 针对训练
    - 宗旨：在内容上分为基础练习、能力提高、专题试解三部分，其中考题试解选用2004年、2005年高考或2006年高考真题中涉及本小节内容的试题，让学生试解。
    - 特色：检查实际能力(复习效果)，让学生接触高考。

- 章末小结
  - 题型归纳
    - 宗旨:根据本章内容和高考要求,归纳出若干个高考热点题型,仍采用“分析—解析—点评”的形式,让学生明确高考试题的主要题型。
    - 特色:面向高考,重视综合,选题典型。
  - 本章测试
    - 宗旨:检查学生对本章内容的掌握情况。
    - 特色:综合检查,查漏补缺。

本套丛书凝聚着全国数百位专家全部的心血,他们既有对高考命题的深入研究,又有多年指导高考复习的宝贵经验。

所以——

她是一行行前人的足迹,引领您登上书山的峰顶;

她是一句句殷切的叮咛,提醒您拾起遗漏的点滴……

她是这样的真实——总结命题规律,关注高考走向,信息迅捷敏锐;

她是如此的热情——指导解题策略,展示思维过程,揭示常见陷阱;

她是这般的新颖——注重能力立意,内容新颖活泼,题目典型实用。

十年铸品质,百年共辉煌。从相识相知,到相随相伴,我们一路兼程,播洒辛勤的汗水,为的是收获六月的璀璨。

目录 GAO KAO REN WO XING

第一章　集合与简易逻辑

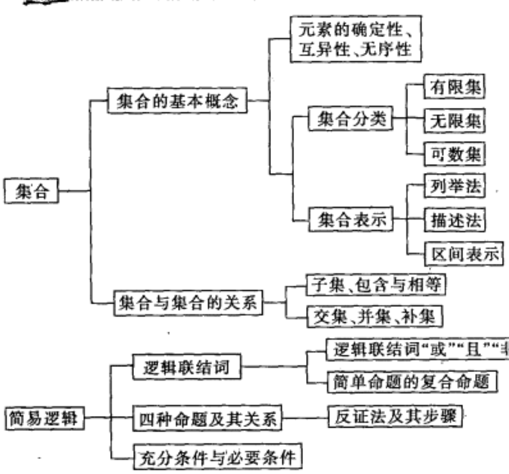
明确考纲　有的放矢

考纲要求

考试内容	考纲要求		在考纲要求的基础上复习还应达到的要求	
	层次	内容	层次	内容
集合	了解	了解空集和全集的意义， 了解属于、包含、相等关系的意义	灵活运用	正确进行集合的运算， 用文氏图进行集合的交、并、补运算， 借助数轴进行数集之间的运算
	理解	理解集合、子集、交集、补集、并集的概念		
	掌握	掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合		
简易逻辑	理解	理解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义， 理解四种命题及其相互关系	了解	命题的概念和命题的构成，并能判断命题的真假， 初步认识反证法及其思想
	掌握	掌握充分条件、必要条件及充要条件的意义	掌握	反证法证题的一般步骤，会用反证法证明简单的问题

构建网络　胸有全局

知识框图



讲究方法　掌握技巧

复习指导

集合的初步知识与简易逻辑知识以用集合语言表达数学问题为特点，与高中各章知识点交汇，考查考生的推理技能，发展学生的思维能力.

本章内容在高考中以考查空集与全集的概念，元素与集合、集合与集合之间的关系，集合的交、并、补运算为重点，以上内容又以集合的运算为重点考查内容. 逻辑联结词与充要条件这部分，以充要条件为重点考查内容.

本章内容概念性强，考题大都为容易的选择题，因此复习中应注意：

1. 复习集合，可以从两个方面入手，一方面是集合的概念之间的区别与联系，另一方面是对集合知识的应用.

2. 主要是把握集合与元素、集合与集合之间的关系，弄清有关的术语和符号，特别是对集合中的元素的属性要分清楚.

3. 要深刻理解和准确掌握集合、元素、子、交、补、命题、充要条件等基本概念和“或”“且”“非”等逻辑联结词的含义，这样才能准确地解答有关集合、简易逻辑的基本概念问题，才能对有关命题做出恰当的判断. 要注意逻辑联结词“或”“且”“非”与集合中的“并”“交”“补”是相关的，相互对照可加深对双方的认识和理解.

4. 复习逻辑知识时，要抓住所学的几个知识点，通过解决一些简单的问题达到理解、掌握逻辑知识的目的.

5. 集合多与函数、方程、不等式有关，要注意知识的融会贯通. 强化数形结合思想，自觉利用文氏图、数轴、函数图象等来帮助分析和理解，提高形象思维能力.

§1.1　集合的概念

考点知识　牢记在心

知识精要

1. 集合中元素的三要素

(1)确定性:对于一个给定的集合,任何一个对象或者是这个集合中的元素,或者不是它的元素,这是集合的最基本特征.

(2)互异性:集合中的任何两个元素都是能区分的(即互不相同的),相同的对象归入任何一个集合时,只能算作这个集合的一个元素.

(3)无序性:在一个集合中,通常不考虑它的元素之间的顺序,也就是说$\{a,b,c\}=\{b,c,a\}$.

2. 常用的集合的表示法

常用的有列举法、描述法、区间表示法和图示法.

有限集常用列举法表示,而无限集常用描述法或区间表示.

描述法表示集合时,集合中元素的意义取决于它的"代表"元素.

3. 元素与集合,集合与集合之间的关系

(1)元素与集合之间的关系是"属于"或"不属于";对象x是集合A的元素称x属于A,记作$x\in A$,否则称x不属于A,记作$x\notin A$. 记号"$\in$"和"$\notin$"只能用于表示元素与集合之间的关系,不能用来表述两个集合之间的关系.

(2)若集合A中任一元素都是集合B的元素,则称A是B的子集,记作$A\subseteq B$,读作A包含于B,或记作$B\supseteq A$,读作B包含A.若A是B的子集且B中至少存在一个元素不属于A,则称A是B的真子集,记作$A\subsetneqq B$,读作A真包含于B,或记作$B\supsetneqq A$,读作B真包含A.若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$,则$A=B$.

(3)常用集合之间的包含关系

$\varnothing\subsetneqq \mathbf{N}^*\subsetneqq\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$.

注:$\mathbf{N}^*$与$\mathbf{N}_+$都表示正整数集.

试解真题　了解趋势

考题试解

1. 设集合$A=\{1,2\}$,则满足$A\cup B=\{1,2,3\}$的集合B的个数是[2006年·辽宁]　(　　)

(A)1.　(B)3.　(C)4.　(D)8.

2. 已知集合$A=\{x|x^2-5x+6\leqslant 0\}$,集合$B=\{x||2x-1|>3\}$,则集合$A\cap B$等于[2006年·四川]　(　　)

(A)$\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$.　(B)$\{x|2\leqslant x<3\}$.

(C)$\{x|2<x\leqslant 3\}$.　(D)$\{x|-1<x<3\}$.

3. 定义集合运算:$A\odot B=\{z|z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$.设集合$A=\{0,1\}$,$B=\{2,3\}$,则集合$A\odot B$的所有元素之和为[2006年·山东]　(　　)

(A)0.　(B)6.　(C)12.　(D)18.

4. ω是正实数,设$S_\omega=\{\theta|f(x)=\cos[\omega(x+\theta)]$是奇函数$\}$.若对每个实数$a$,$S_\omega\cap(a,a+1)$的元素不超过2个,且存在$a$,使$S_\omega\cap(a,a+1)$含2个元素,则$\omega$的取值范围是________.[2005年·辽宁]

名师指点　注意领悟

例题精讲

【例1】含有三个实数的集合既可表示为$\{a,\frac{b}{a},1\}$,也可表示为$\{a^2,a+b,0\}$,求$a^{2008}+b^{2008}$的值.

[分析]依据集合中元素的确定性,不难得到$\{a,\frac{b}{a},1\}=\{a^2,a+b,0\}$,由此求出$a$、$b$的值.

[解析]由$0\in\{1,a,\frac{b}{a}\}$及$a\neq 0$得$\frac{b}{a}=0$,$\therefore b=0$,从而$\{a,0,1\}=\{a^2,a,0\}$,进而有$a^2=1\Rightarrow a=-1$或$a=1$(舍)(由集合元素的互异性),故有$a^{2008}+b^{2008}=1$.

点评　两个集合的相等是一个重要概念,必须注意集合中元素的互异性,在中学数学中主要研究数集和点集.

备选题1

设$A=\{-4,2a-1,a^2\}$,$B=\{9,a-5,1-a\}$,已知$A\cap B=\{9\}$,求实数a的值.

【例2】由实数构成的集合A满足条件:若$a\in A$,$a\neq 1$,则$\frac{1}{1-a}\in A$.证明:

(1)若$2\in A$,则集合A中必还有另外两个元素;

(2)集合A不可能是单元素集;

(3)集合A中至少有三个不同的元素.

[分析]由已知可得$a\in A$且$\frac{1}{1-a}\in A$,即可求出其他元素,从而解决本题的三个问题.

[证明](1)依题意,若$a\in A$,$a\neq 1$,则$\frac{1}{1-a}\in A$,$\because 2\in A$,$2\neq 1$,$\therefore\frac{1}{1-2}=-1\in A$,又$-1\neq 1$,$\therefore\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in A$,如此循环往复得出另外两个数:$-1,\frac{1}{2}\in A$.

(2)假设集合A是单元素集,则$a=\frac{1}{1-a}$,即$a^2-a+1=0$,而方程无实根,故$a\neq\frac{1}{1-a}$,$\therefore$集合A不可能是单元素集.

(3)$\because a\in A$,$a\neq 1$时有$\frac{1}{1-a}\in A$,$\therefore\frac{1}{1-a}\in A$且$\frac{1}{1-a}\neq 1$,即

$a\neq 0$ 时有 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}=\dfrac{a-1}{a}\in A$. ∴ $\dfrac{a-1}{a}\in A$ 且 $\dfrac{a-1}{a}\neq 1$ 时有 $\dfrac{1}{1-\dfrac{a-1}{a}}=a\in A$. 如此循环往复出现三个数：$a,\dfrac{1}{1-a},\dfrac{a-1}{a}\in A$，且 $a\neq\dfrac{1}{1-a}\neq\dfrac{a-1}{a}$，故集合 A 至少有三个不同的元素.

点评要理解集合中元素的特征，一是集合中的元素是什么，即集合中的元素有什么共同的属性，也就是确定性；二是集合中每个元素是不同的，也就是互异性.

备选题 2

已知集合 $M=\{x\in\mathbf{R}\mid ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$.

(1)若集合 M 中只有一个元素，求 a 的值，并求出这个元素；

(2)若集合 M 中至多只有一个元素时，求 a 的取值范围.

【例 3】设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，$B=\{y\mid y=2x+3,x\in A\}$，$C=\{z\mid z=x^2,x\in A\}$，且 $C\subseteq B$. 求实数 a 的取值范围.

[分析一]当 $-2\leqslant x\leqslant a$ 时，$z=x^2$ 的范围与 a 的取值的正负以及 $|a|$ 与 2 的大小均有关系. 因而先对 a 进行讨论，求得 C 后，再根据 $C\subseteq B$，求 a 的取值范围.

[解法一]∵ $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，∴ $B=\{y\mid y=2x+3,x\in A\}=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 2a+3\}$.

①当 $-2\leqslant a\leqslant 0$ 时，$C=\{z\mid a^2\leqslant z\leqslant 4\}$，∵ $C\subseteq B$，∴ $4\leqslant 2a+3$，解之得 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$，这与 $-2\leqslant a\leqslant 0$ 矛盾.

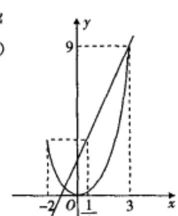
②当 $0<a\leqslant 2$ 时，$C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant 4\}$，∵ $C\subseteq B$，∴ $4\leqslant 2a+3$，解之得 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$，∴ $\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$.

③当 $a>2$ 时，$C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant a^2\}$，∵ $C\subseteq B$，∴ $a^2\leqslant 2a+3$，解之得 $-1\leqslant a\leqslant 3$，∴ $2<a\leqslant 3$.

综上所述，a 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2},3\right]$.

[分析二]作出函数的图象，数形结合求解.

[解法二]如图，在同一坐标系内，作出函数 $y=2x+3(x\geqslant -2)$ 和 $y=x^2(x\geqslant -2)$ 的图象.



令 $2x+3=(-2)^2$，解之得 $x=\dfrac{1}{2}$.

令 $2x+3=x^2(x\geqslant -2)$，解之得 $x=3$，

∴ a 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2},3\right]$.

点评分类讨论是一种重要的数学方法，而采用数形结合思考可以避免讨论，显得更简捷直观.

备选题 3

已知集合 $A=\{x\mid x^2-4mx+2m+6=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^-\neq\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

前车之覆　后车之鉴
错解剖析

【例】已知 $f(x)=x^2$，集合 $A=\{x\mid f(x+1)=ax\}$，且 $A\cup\mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$，求实数 a 的取值范围.

[错解]由 $f(x+1)=ax$ 和 $f(x)=x^2$ 可得 $x^2+(2-a)x+1=0$，又由 $A\cup\mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$，得 $A\subseteq\mathbf{R}^+$，即 $x>0$，

则有 $x^2+(2-a)x+1=0$ 有正根，故有

$$\begin{cases}\Delta=(2-a)^2-4\geqslant 0,\\ x_1+x_2=a-2>0,\\ x_1x_2=1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\geqslant 4\text{ 或 }a\leqslant 0,\\ a>2\end{cases}\Rightarrow a\geqslant 4.$$

∴实数 a 的取值范围是 $[4,+\infty)$.

[剖析]错解中由 $A\cup\mathbf{R}^+=\mathbf{R}^+$，得出 $A\subseteq\mathbf{R}^+$，但忽视了 $A=\varnothing$ 时的情况.

[正解](1)当 $A\neq\varnothing$ 时，由上述错解知 $a\geqslant 4$；

(2)当 $A=\varnothing$ 时，$x^2+(2-a)x+1=0$ 无实数根，则有 $\Delta=(2-a)^2-4<0\Rightarrow 0<a<4$；综合(1)(2)可得 a 的取值范围是 $a>0$.

牢记方法　掌握规律
方法归纳

1. 集合是近代数学的基本概念之一，集合思想是一种从整体角度认识问题的思想. 掌握集合知识可以使数学中的一些基本概念表达得更加准确，理解更为深刻，中学数学里主要研究数集和点集.

2. 集合中元素的特征：确定性、互异性、无序性. 这三个特征是理解集合概念和解决有关集合问题的关键，如下列集合：

(1) $\{x\mid y=x^2+1\}$ 为二次函数自变量 x 的值的全体；

(2) $\{y\mid y=x^2+1\}$ 为二次函数函数值 y 的值的全体；

(3) $\{(x,y)\mid y=x^2+1\}$ 为二次函数图象上所有点的全体；

(4) $\{y=x^2+1\}$ 为单元素集，只有一个元素，即二次函数 $y=x^2+1$.

3. 集合的相等是指两个集合的元素完全相同，若两个有限的数集相等，则它们元素的和(或积)也相等.

4. 在研究有关子集问题时，不要忽略空集，因为空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

5. 要重视数形结合思想的运用，对于一些比较抽象的集合间的关系，用图示法表示往往更直观.

巩固知识　勤加训练

针对训练

1. 已知 $A=\{x|x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x||x|<a\}$，若 $\varnothing\subsetneqq B\subsetneqq A$，则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $0<a<1$.　　(B) $a\leqslant 1$.

(C) $0<a\leqslant 1$.　　(D) $-1<a\leqslant 3$.

2. 已知集合 $A=\{a|\frac{x+a}{x^2-2}=1$ 有唯一实数解$\}$，用列举法表示集合 A 为 ( )

(A) $\{-\frac{9}{4}\}$.　　(B) $\{\frac{9}{4}\}$.

(C) $\{-\frac{9}{4},\sqrt{2}\}$.　　(D) $\{-\frac{9}{4},-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

3. 同时满足(1) $M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$；(2)若 $a\in M$，则 $6-a\in M$ 的非空集合 M 有 ( )

(A) 16 个.　　(B) 15 个.

(C) 7 个.　　(D) 6 个.

4. 已知函数 $f(x)$、$g(x)(x\in\mathbf{R})$，设不等式 $|f(x)|+|g(x)|<a$ $(a>0)$ 的解集为 M，不等式 $|f(x)+g(x)|<a(a>0)$ 的解集为 N，则 M 与 N 的关系是________.

5. 已知集合 $A=\{1,2,4,6,8,12\}$，$B=\{8,x,y,z\}$，$C=\{1,xy,yz,zx\}$，其中 $x,y,z\in A$，且 $B=C$，则 $x+y+z=$________.

6. 设 $\frac{1}{2}\in\{x|x^2-ax-\frac{5}{2}=0\}$，则集合 $\{x|x^2-\frac{19}{2}x-a=0\}$ 中所有元素的积为________.

7. 设集合 $A=\{x|x=a^2-4a+5,a\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y|y=4b^2+4b+2,b\in\mathbf{R}\}$，则 A 与 B 的关系是________.

8. 设函数 $f(x)=\lg(\frac{2}{x+1}-1)$ 的定义域为 A，$g(x)=\sqrt{(x-a)^2-1}$ 的定义域为 B.

(1)当 $a=1$ 时，求集合 $A\cap B$；

(2)若 $A\subseteq B$，求 a 的取值范围.

9. 设 $f(x)=x^2+px+q$，$A=\{x|x=f(x)\}$，$B=\{x|f[f(x)]=x\}$.

(1)求证：$A\subseteq B$；

(2)如果 $A=\{-1,3\}$，求 B.

10. 已知集合 M_D 是满足下列性质的函数 $f(x)$ 的全体：若函数 $f(x)$ 的定义域为 D，对于任意的 $x_1,x_2\in D(x_1\neq x_2)$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$.

(1)当 $D=(0,+\infty)$ 时，函数 $f(x)=\ln x$ 是否属于 M_D？若属于 M_D，给予证明；否则说明理由.

(2)当 $D=(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$，函数 $f(x)=x^3+ax+b$ 时，若 $f(x)\in M_D$，求实数 a 的取值范围.

§1.2　集合的运算

考点知识　牢记在心　知识精要

1. 集合的运算

(1)交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$.

(2)并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做集合 A 与集合 B 的并集，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$.

(3)补集：设 U 是一个集合，A 是 U 的一个子集(即 $A\subseteq U$)，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做子集 A 在全集 U 中的补集(或余集)，记为 $\complement_U A$，$\complement_U A=\{x|x\in U$ 且 $x\notin A\}$.

2. 集合运算中常用结论

(1) $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

(2) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$，$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

(3)由 n 个元素所组成的集合，其子集个数为 2^n 个，即是 $C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

(4)空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$，这个结论在解集中容易忽略.

结论(1)和(2)常常是作为"等价转化"的依据，若已知 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$.

结论(3)是集合与组合数的综合运用的结果，用以计算集合子集的个数.

3. "数形结合"的思想在集合中的应用

认清集合的特征，准确地转化为图形关系，借助图形使问题直观、具体、准确地得到解决，因此要重视数形结合的思想方法的运用(如数轴、几何图形、文氏图等).

4. 集合问题与函数、方程、不等式以及与整个中学数学知识有关，要正确运用集合的思想将问题相互转化，特别是数与形、代数与几何之间的转化.

试解真题　了解趋势　考题试解

1. 设 I 为全集，S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$，则下面论断正确的是[2005 年·全国Ⅰ]　(　　)

(A) $\complement_I S_1\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$.　(B) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cap\complement_I S_3)$.

(C) $\complement_I S_1\cap\complement_I S_2\cap\complement_I S_3=\varnothing$.　(D) $S_1\subseteq(\complement_I S_2\cup\complement_I S_3)$.

2. 已知集合 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$，$A=\{2,4,5,7\}$，$B=\{3,4,5\}$，则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$ 等于[2006 年·重庆]　(　　)

(A) $\{1,6\}$.　(B) $\{4,5\}$.

(C) $\{2,3,4,5,7\}$.　(D) $\{1,2,3,6,7\}$.

3. 已知集合 $M=\{x|\frac{x}{(x-1)^3}\geqslant 0\}$，$N=\{y|y=3x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N$ 等于[2006 年·江西]　(　　)

(A) $\varnothing$.　(B) $\{x|x\geqslant 1\}$.

(C) $\{x|x>1\}$.　(D) $\{x|x\geqslant 1$ 或 $x<0\}$.

4. 若 A、B、C 为三个集合，$A\cup B=B\cap C$，则一定有[2006 年·江苏]　(　　)

(A) $A\subseteq C$.　(B) $C\subseteq A$.

(C) $A\neq C$.　(D) $A=\varnothing$.

名师指点　注意领悟　例题精讲

【例 1】若集合 $A=\{x|x^2+2x-8<0\}$，$B=\{x||x+2|>3\}$，$C=\{x|x^2-2mx+m^2-1<0,m\in\mathbf{R}\}$，

(1)若 $A\cap C=\varnothing$，求 m 的集合；

(2)若 $(A\cap B)\subseteq C$，求 m 的集合.

[分析]分别把 A、B、C 三个集合明确表示出来，利用数轴，用数形结合进行分析.

[解析]由已知可求，得 $A=\{x|-4<x<2\}$，

$B=\{x|x<-5$ 或 $x>1\}$，

$C=\{x|m-1<x<m+1\}$. $\therefore A\cap B=\{x|1<x<2\}$.

(1)若 $A\cap C=\varnothing$，则 $m-1\geqslant 2$ 或 $m+1\leqslant -4$，

解得 $m\geqslant 3$ 或 $m\leqslant -5$.

故所得 m 的集合为 $\{m|m\leqslant -5$ 或 $m\geqslant 3\}$.

(2)若 $(A\cap B)\subseteq C$，即 $\{x|1<x<2\}\subseteq\{x|m-1<x<m+1\}$.

$\therefore\begin{cases}m-1\leqslant 1,\\m+1\geqslant 2,\end{cases}$解得 $1\leqslant m\leqslant 2$.

故所求 m 的集合为 $\{m|1\leqslant m\leqslant 2\}$.

点评解题时，应尽可能借助于图形、数轴或直角坐标系等使问题直观形象.

备选题 1

设 $A=\{x|1<x<3\}$，又设 B 是关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x^2-2x+a\leqslant 0,\\x^2-2bx+5\leqslant 0\end{cases}$ 的解集，试确定 a,b 的取值范围，使得 $A\subseteq B$.

【例 2】设 $A=\{(x,y)|2x-y+a=0,x,y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)|y=\sqrt{2x},x,y\in\mathbf{R}\}$. 在下列条件下分别求 a 的取值范围.

(1)$A\cap B=\varnothing$；

(2)$A\cap B$ 为单元素集合.

[分析]集合 A、B 都是点集，故可考虑满足条件的点构成的图形，转化为解析几何求之.

[解析]集合 A 为平行线系，集合 B 为抛物线 $y^2=2x(y\geqslant 0)$ 的上半部分，当直线与抛物线相切时，即 $\begin{cases}2x-y+a=0,\\ y^2=2x\end{cases}$ 时，

$4x^2+(4a-2)x+a^2=0$ 有两个等根，

$\therefore\Delta=(4a-2)^2-4\times 4a^2=0$，$\therefore a=\frac{1}{4}$.

由数形结合易得.

(1)当 $a>\frac{1}{4}$ 时，$A\cap B=\varnothing$.

(2)当 $a=\frac{1}{4}$ 或 $a<0$ 时，$A\cap B$ 为单元素集合.

点评 解题时应注意常用数学思想和方法的应用，本题体现了数形结合思想、化归思想的应用，当一种形式不好入手时，可将其转化为另一种形式，即转化为直线与曲线的位置关系.

备选题 2

设全集 $U=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$. $A=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$，$B=\{(x,y)|y=x+1\}$，求$(\complement_U A)\cap B$.

【例 3】已知抛物线 $y=x^2+2ax-2a$，$y=x^2+ax-a$，$y=x^2+4ax-4a$ 中至少有一条与 x 轴相交，求实数 a 的取值范围.

[分析]直接求解也可以，若能求得使三条抛物线都与 x 轴无交点的实数 a 的集合 A，则 $\complement_{\mathbf{R}}A$ 为所求.

[解析]三条抛物线至少有一条与 x 轴相交的反面为三条抛物线均与 x 轴无交点，即

$$\begin{cases}\Delta_1=(2a)^2-4(-2a)<0,\\ \Delta_2=a^2-4(-a)<0,\\ \Delta_3=(4a)^2-4(-4a)<0,\end{cases}$$

即 $-1<a<0$.

则取其补集为满足条件的 a 的取值范围：$a\leqslant -1$ 或 $a\geqslant 0$.

点评 如果从正面入手较繁较难时可从问题(或其中某个方面)的反面入手，即所谓"正难则反". 但在应用此种方法时，必须注意确定全集的范围，这里全集为全体实数 $\mathbf{R}$，但有时就不一定了. 比如一元二次方程"至少有一个正根"，它的反面是"两个都是负根"，但它们都建立在"有实根"的基础上，因此全集应为"有实根"所确定的范围.

备选题 3

已知 $A=\{x|x^2-x-6<0\}$，$B=\{x|x^2+2x-8>0\}$，$C=\{x^2-4ax+3a^2<0\}$，试确定 a 的取值范围分别使(1)$C\supseteq A\cap B$；(2)$C\supseteq(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)$成立.

前车之覆　后车之鉴　错解剖析

【例】设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$. 若 $\complement_U A=\{5\}$，求实数 a 的值.

[错解]$\because\complement_U A=\{5\}$，$\therefore 5\in U$ 且 $5\notin A$，

$\therefore a^2+2a-3=5$，$\therefore a=2$ 或 $a=-4$.

[剖析]错误在于忽视了本题的隐含条件 $A\subseteq U$(或者说 $A\subsetneqq U$，因 U 为三元素集，A 为二元素集). 因此，在求出 $a=2$ 或 $a=-4$ 后应考察集合 A 中的元素.

[正解](1)应继续对 a 的值是否适合 $A\subseteq U$ 进行验证：

当 $a=2$ 时，$|2a-1|=|4-1|=3\neq 5$，此时 $A=\{2,3\}\subseteq U$.

当 $a=-4$ 时，$|2a-1|=|-8-1|=9\neq 5$，

此时 $A=\{2,9\}\nsubseteq U$.

$\therefore a$ 的值只能为 2.

(2)也可按以下方法解答.

$\because\complement_U A=\{5\}$，$A=\{|2a-1|,2\}$，$U=\{2,3,a^2+2a-3\}$，

$\therefore\begin{cases}|2a-1|=3,\\ a^2+2a-3=5,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=2\text{ 或 }a=-1,\\ a=2\text{ 或 }a=-4,\end{cases}$

$\therefore a=2$.

牢记方法　掌握规律　方法归纳

1. 加强对集合中元素特征的理解，互异性和空集常常容易被忽略，在解题时要特别注意.

2. 解集合题的关键是用恰当的方式来表示集合，通常用描述法表示的集合改用列举法，或用不等式(方程)的解集表示出来，这样就会更具体、更明确；或者用曲线、数轴上的区间、韦恩图来表示，以便形象化，便于用数形结合的方法.

3. 对含参数的集合问题，常采用数形结合进行分类讨论.

4. 要准确理解集合语言，集合问题常与函数、方程、不等式、解析几何等知识综合.

巩固知识　勤加训练
针对训练

1. 已知 $\mathbf{R}$ 为全集，$A=\{x|\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant-2\}$，$B=\{x|\frac{5}{x+2}\geqslant1\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$ 是　　(　　)

(A) $\{x|-2<x\leqslant-1$ 或 $x=3\}$.

(B) $\{x|-2<x<-1$ 或 $x=3\}$.

(C) $\{x|-1<x<3$ 或 $x=-2\}$.

(D) $\{x|-1<x\leqslant3$ 或 $x=-2\}$.

2. 设 $U=\mathbf{Z}$ 为全集，集合 $A=\{a,0\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}|x^2-3x\geqslant0\}$，若 $A\cap(\complement_U B)\neq\varnothing$，则 a 等于　　(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 1 或 2.　　(D) 8.

3. 若集合 $A=\{y|y=x^{\frac{1}{3}},-1\leqslant x\leqslant1\}$，$B=\{y|y=2-\frac{1}{x},0<x\leqslant1\}$，则 $A\cap B$ 等于[2006 年·上海春]　　(　　)

(A) $(-\infty,1]$.　　(B) $[-1,1]$.

(C) $\varnothing$.　　(D) $\{1\}$.

4. 设集合 $M=\{(x,y)|x^2+y^2=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)|x^2-y=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为　(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

5. $\{(x,y)|x+y-2=0$ 且 $x-2y+4=0\}\subsetneqq\{(x,y)|y=3x+b\}$，则 $b=$____________.

6. 已知集合 $A=\{x|x^2+3x-18>0\}$，$B=\{x|(x-k)\cdot(x-k-1)\leqslant0\}$，若 $A\cap B\neq\varnothing$，则 k 的取值范围是________.

7. 已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2=1,x,y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)|\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1,a>0,b>0,x,y\in\mathbf{R}\}$，当 $A\cap B$ 只有一个元素时，a、b 的关系式是________.

8. 已知集合 $A=\{x|(\frac{1}{2})^{x^2-x-6}<1\}$，$B=\{x|\log_4(x+a)<1\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围.

9. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{m|$方程 $mx^2-x-1=0$ 有实数根$\}$，集合 $N=\{m|$方程 $x^2-x+m=0$ 有实数根$\}$，求 $(\complement_U M)\cap N$.

10. 已知 $A=\{x|x^2+3x+2\geqslant0\}$，$B=\{x|mx^2-4x+m-1>0,m\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=A$，求 m 的取值范围.

§1.3　逻辑联结词和四种命题

考点知识　牢记在心　知识精要

1. 命题的概念

(1)命题是可以判断真假的语句,命题由题设和结论两部分构成.命题有真假之分,数学中的定义、公理、定理、公式等都是真命题.

(2)逻辑联结词有"或"、"且"、"非",不含逻辑联结词的命题叫做简单命题.由简单命题和逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.复合命题的构成形式有三种:"p或q","p且q","非p".

(3)判断复合命题真假的形式——真值表

p	真	真	假	假
q	真	假	真	假
p且q	真	假	假	假

p	真	真	假	假
q	真	假	真	假
p或q	真	真	真	假

p	真	假
非p	假	真

总结:p且q命题真假:有假则假;

p或q命题真假:有真则真;

非p命题真假:真假相对.

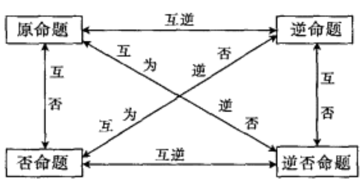
2. 命题的四种形式及相互关系

(1)命题的四种形式.

原命题:若p则q.　逆命题:若q则p.

否命题:若$\neg p$则$\neg q$.　逆否命题:若$\neg q$则$\neg p$.

(2)四种命题的关系



注意:①原命题与逆否命题、逆命题与否命题是等价关系.

②注意区分"命题的否定"与"否命题"这两个不同的概念.命题p的否定为"非p",记作$\neg p$,一般只是否定命题p的结论,否命题是对原命题"若p则q"既否定它的条件,又否定它的结论.

3. 当一个命题的真假不易判断时,往往可以判断其逆否命题的真假,从而判断出原命题的真假.

4. 反证法

用反证法证明命题的一般步骤为:

(1)假设命题的结论不成立,即假设命题结论的反面成立.

(2)从这个假设出发,经过推理得出矛盾.

(3)由矛盾判断假设不正确,从而肯定命题的结论正确.

反证法的第一步是否定结论,在解决实际问题中,需掌握以下词语的否定.

词语	是	都是	大于(>)
词语的否定	不是	不都是	不大于(≤)

词语	所有的	任一个	至少一个	至多一个
词语的否定	某些	某个	一个也没有	至少两个

试解真题　了解趋势　考题试解

1. 有限集合S中元素的个数记作card(S),设A、B都为有限集合,给出下列命题:

①$A\cap B=\varnothing$的充要条件是card($A\cup B$)=card(A)+card(B);

②$A\subseteq B$的必要条件是card(A)≤card(B);

③$A\nsubseteq B$的充分条件是card(A)≤card(B);

④$A=B$的充要条件是card(A)=card(B).

其中真命题的序号是[2006年·湖北]　(　　)

(A)③④.　(B)①②.　(C)①④.　(D)②③.

2. 设$p:x^2-x-20>0$,$q:\frac{1-x^2}{|x|-2}<0$,则p是q的[2006年·山东]　(　　)

(A)充分而不必要条件.

(B)必要而不充分条件.

(C)充要条件.

(D)既不充分也不必要条件.

3. 命题"若$a>b$,则$2^a>2^b-1$"的否命题为________.[2005年·江苏]

4. 设A、B为两个集合,给出下列四个命题:

①$A\nsubseteq B\Leftrightarrow$对任意$x\in A$,有$x\notin B$;②$A\nsubseteq B\Leftrightarrow A\cap B=\varnothing$;

③$A\nsubseteq B\Leftrightarrow A\not\supseteq B$;④$A\nsubseteq B\Leftrightarrow$存在$x\in A$,使得$x\notin B$.

其中真命题的序号是________.(把符合要求的命题序号都填上)[2004年·湖北]

名师指点　注意领悟　例题精讲

【例1】分别写出由下列各组命题构成的"p或q"、"p且q"、"非p"形式的复合命题,并判断其真假.

(1)p:3是9的约数,q:3是18的约数.

(2)p:菱形的对角线相等,q:菱形的对角线互相垂直.

(3)$p:a\in\{a,b,c\}$,$q:\{a\}\subsetneqq\{a,b,c\}$.

(4)p:不等式$x^2+2x+2>1$的解集是$\mathbf{R}$,q:不等式$x^2+2x+2\leq1$的解集为$\varnothing$.

[分析]复合命题是由简单命题和逻辑联结词构成的,因此判断其真假的方法是:先判断各简单命题的真假,然后由真值表判断出最后结果.

[解析](1)p或q:3是9的约数或18的约数,为真命题.

p且q:3是9的约数且是18的约数,为真命题.

非p:3不是9的约数,为假命题.

(2)p或q:菱形的对角线相等或互相垂直,为真命题.

p且q:菱形的对角线相等且互相垂直,为假命题.

非p:菱形的对角线不都相等,为真命题.

(3)p或q:$a\in\{a,b,c\}$或$\{a\}\subsetneqq\{a,b,c\}$,为真命题.

p 且 q：$a\in\{a,b,c\}$ 且 $\{a\}\subsetneqq\{a,b,c\}$，为真命题.

非 p：$a\notin\{a,b,c\}$，为假命题.

(4)p 或 q：不等式 $x^2+2x+2>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 或 $x^2+2x+2\leqslant1$ 的解集为 $\varnothing$，为假命题.

p 且 q：不等式 $x^2+2x+2>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$ 且 $x^2+2x+2\leqslant1$ 的解集为 $\varnothing$，为假命题.

非 p：不等式 $x^2+2x+2>1$ 的解集不是 $\mathbf{R}$，为真命题.

点评判断一个复合命题的真假往往可以用真值表.一般先确定复合命题的构成形式，然后根据简单命题的真假和真值表得出结论.

在求解本例时，对于判断复合命题的真假，应记住：p 且 q 形式是"一假必假，其余皆真"，p 或 q 形式是"一真必真，其余皆假"，非 p 则是"与 p 的真假相反".

备选题 1

写出命题"若四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 将四边形分成面积相等的两个三角形，则直线 AC 必平分对角线 BD"的逆命题，判断这个逆命题是否正确，并给予证明.

【例 2】已知命题 p：$|x^2-x|\geqslant6$；q：$x\in\mathbf{Z}$，若"p 且 q"与"非 q"同时为假命题，求 x 的值.

[分析]通过条件首先判定 p、q 的真假，再利用解不等式求出相应的 x.

[解析]∵"p 且 q"为假，

∴p、q 中至少有一个命题为假命题；

又"非 q"为假，∴q 为真，从而知 p 为假命题，

故有 $\begin{cases}|x^2-x|<6,\\x\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x^2-x-6<0,\\x^2-x+6>0,\\x\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-2<x<3,\\x\in\mathbf{R},\\x\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

∴x 的值为：$-1,0,1,2$.

点评对于真值表要理解地加以记忆，才能运用自如.

备选题 2

设有两个命题：

命题 p：不等式 $|x-1|+|x+3|>a$ 对一切实数 x 都成立；

命题 q：函数 $y=(6-2a)x+a^2-7a+12$ 的图象不经过第四象限.

若命题"p 或 q"为真，求实数 a 的取值范围.

【例 3】已知 x 为实数，$a=x^2+\frac{1}{2}$，$b=2-x$，$c=x^2-x+1$，用反证法证明：a、b、c 中至少有一个不小于 1.

[分析]命题的结论涉及"至少"的形式，从正面不易入手，可用反证法证明.反证法应先否定结论，再推出矛盾.

[证明]假设 a、b、c 均小于 1，则有 $a+b+c<3$，

而 $a+b+c=x^2+\frac{1}{2}+2-x+x^2+1-x$

$=2x^2-2x+\frac{7}{2}=2(x-\frac{1}{2})^2+3\geqslant3$，

这与 $a+b+c<3$ 矛盾.

∴假设不成立.∴a、b、c 中至少有一个不小于 1.

点评当一个命题的结论涉及"至少"、"至多"、"唯一"或"否定"的形式时，宜用反证法.

备选题 3

设 a,b,c,d 是正数，求证：下列三个不等式

$a+b<c+d$　①

$(a+b)(c+d)<ab+cd$　②

$(a+b)cd<ab(c+d)$　③

中至少有一个不正确.

前车之覆　后车之鉴

错解剖析

【例】写出命题"若 $m\leqslant2$ 或 $n\leqslant3$，则 $m+n\leqslant5$"的否命题.

[错解一]否命题为"若 $m\leqslant2$ 或 $n\leqslant3$，则 $m+n>5$".

[错解二]否命题为"若 $m>2$ 或 $n>3$，则 $m+n>5$".

[剖析]这两种结论都是错误的，在写否命题时，首先要分清是"否命题"还是"命题的否定"."否命题"是对条件与结论分别否定，而"命题的否定"是只对结论的否定.即若原命题为 $A\Rightarrow B$，那么它的否命题是 $\overline{A}\Rightarrow\overline{B}$，而命题的否定是 $A\Rightarrow\overline{B}$.其次要注意对"且"与"或"的否定.一般来说，"且"的否定是"或"，而"或"的否定是"且".

[正解]原命题的否命题为：

若 $m>2$ 且 $n>3$，则 $m+n>5$.