



普通高等教育“十一五”国家级规划教材

数学分析教程

上册 | 李忠 方丽萍 编著

数学基础课程系列
简明教材

Mathematical Analysis

数学分析教程

上册

上册

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
数学基础课程系列简明教材

数学分析教程

(上册)

李 忠 方丽萍 编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析教程.上册/李忠,方丽萍编著.—北京:高等教育出版社,2008.5

ISBN 978-7-04-023895-2

I. 数… II. ①李…②方… III. 数学分析-高等学校-教材 IV. O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第041668号

策划编辑 李蕊 责任编辑 兰莹莹 封面设计 张申申
责任绘图 吴文信 版式设计 王艳红 责任校对 刘莉
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landaco.com.cn
印 刷	北京地质印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	850×1168 1/32	版 次	2008年5月第1版
印 张	16	印 次	2008年5月第1次印刷
字 数	410 000	定 价	23.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 23895-00

内 容 提 要

本书是为综合性大学与师范类院校的数学类专业编写的数学分析教材,全书共分上、下两册。上册的内容为一元微积分学与多元微分学,下册的内容为多元积分学、无穷级数、广义积分及傅氏级数等。作者根据多年的教学实践经验,对数学分析的内容体系作了精心的构架与调整,分散了难点,突出了分析学的基础知识与基本训练,使全书内容深入浅出、平实自然、有用有趣。

总 序

2005年,高等教育出版社为适应高校数学类专业的教学需求,经过一段时间的酝酿,决定在“十一五”期间推出一套“数学基础课程系列简明教材”。这套系列教材包含数学分析、高等代数、解析几何、复变函数、实变函数、概率统计、微分几何等。为做好此事,在高等教育出版社的主持下成立了编委会,并邀请了一批有多年教学实践经验的资深教授参加编写工作。这套系列教材中的第一批书目已经被列入普通高等教育“十一五”国家级规划教材。经过几年的努力,这套教材开始正式与大家见面了。其中多数是新编的,也有一些是经过教学实践证明优秀的,深受读者欢迎的教材的修订版。

这套系列教材适用于我国综合性大学、理工科大学以及师范大学中的数学类专业,作为数学专业基础课的教学用书;当然,它们也可以作为理工科中非数学类专业的教学参考书。面向全国各类高校的数学系,具有较广泛的适用性,这是我们编写这套系列教材的初衷之一。

在这套系列教材中,尽管每一本教材的风格各异,但是在编写的基本理念上大家有着相当多的共识。我们希望这套教材做到以下几点:

首先,教材内容“少而精”。

众所周知,“少而精”是教学的一个基本原则。它要求在教学上要紧紧地抓住所涉及学科的基础知识与基本训练这个纲,突出重点,纲举目张。相反,内容过多、过杂、过深,势必使人不得要领,事倍功半。但是,有时人们会看不到讲得过多的害处,会在某些口

号的驱使下使事情脱离了正确的轨道,比如求多求全、追求内容的先进性或现代化等等。我们知道,基础课教材的作用在于它为读者提供后续课以及日后参加工作不可或缺的基础知识、基本方法与基本思想。所讲的内容并非越多越好,越深越好。遗憾的是,目前基础课内容有一种不断扩充的趋势。这虽然出于良好的目的,而其效果却不如愿。实际上,就以我们这些“过来人”为例,认真回想一下自己以前所学到的、真正用得得心应手的内容并不多;而且真正用得到的内容也并不很多。与其求全求多,不如精选最基本的东西,帮助读者真正掌握这些内容的实质、方法和思想。读者有了这样的基础,在他们将来遇到没有学过但确有需要的内容时,也会有能力自学。课程内容“现代化”的要求,应当是针对数学系的整个的教学体系而言的,而不是要求基础课的内容更新换代。这对数学学科而言是无需争议的事实。基础课可以在观念上、记号上为专业课的现代化做些必要的准备,但不应该是把后续课的某些基本概念提到前面来讲述。

其次,教材尽可能做到“深入浅出”。

基础课教材是初学者入门的读本,而这些初学者在此之前没有任何学习高等数学的经验。在这种情况下,就要求教材注意循序渐进、由浅入深,尽可能做到通俗易懂,最好还能做到生动有趣,引起读者的兴趣。一个好的数学基础课教材应当既逻辑严谨、体系完整,又深入浅出、平实自然。我们应当学会通过典型的实例和足够详尽的解释,来帮助初学者学会解读数学的抽象形式,透过抽象的数学叙述,正确把握和理解其内容实质。教材的真正水准应当体现在是否能把那些艰深的内容讲得让人感到自然易懂。把本来容易的东西讲得复杂难懂,那是不可取的。为此,我们要注意避免过度形式化的不良倾向。数学工作者由于长期从事数学研究与教学,已经养成了严谨的习惯,追求叙述的一般性与抽象性,但与此同时,也往往形成了某种毛病,那就是忽视描述性语言,忽视那些抽象形式背后的直观模型,甚

至抹杀直观的意义,这是很不妥当的。过度的形式化,不仅造成了初学者的困难,更重要的是歪曲了数学本质,误导了学生。在基础课教材中,为了帮助初学者理解抽象数学形式的意义,除了典型例子之外,用必要的直观描述性语言去解释它的意义,同样是十分重要、不可或缺的。

最后,教材重视基本训练,重视对学生的能力培养。

我们赞同“双基”的提法,即基础课的任务是传授基础知识和掌握基本训练。学好一门数学课程,单单知道有关数学结论是不够的,还要求读者具有一定的分析问题与解决问题的能力。这样,勤于思考,独立思考,并做好相当数量的习题,是完全必要的。这是一切在数学上学而有成的人的共同体。通过做题可以深入、具体地理解和掌握基本概念、结论和方法;获得计算和推理的能力;理解、掌握应用基本知识和方法解决问题的途径;同时也进一步锻炼刻苦思考和探索的毅力,培养创造性的思维能力和习惯。后面一点不仅对学好数学很重要,而且对读者以后工作能力的提高和事业的成功都是很重要的。在这套教材中,我们精心选配好适合读者的各种例题与习题,它们是教材很重要的组成部分,不可忽视。习题中不仅有基本练习,而且有一些题目,需要读者经过一定的努力,花费一定的时间去探索,才能最终解决。此外,题目富有多样性、趣味性和启发性。当然,我们也不赞成出一些技巧性过强而没有训练价值的偏题与难题。

常言道:“授人以鱼,不如授人以渔”。一本好的基础课教材要努力做到授人以渔,而不只是罗列知识。这就需要帮助读者理解课程内容和方法的实质,理解其中的数学思想。在教材中要尽可能地介绍清楚问题和概念的来龙去脉,包括一些典型的例子;尽可能解释清楚解决问题的思路和方法,其中包括定理证明和计算过程的思路,以提高学生的创新意识与探索精神。

以上是我们对这套教材的希望与要求,也是我们编书的理念。把它们写在这里,主要是为了自勉,并不表明这些我们已经全部做

好了、做到位了。我们希望使用这套教材的师生和其他读者多提宝贵意见,使教材得以不断完善。

“数学基础课程系列简明教材”编委会

2008年1月5日

序 言

数学分析,又称无穷小分析,其主要内容是微积分。

作为大学的一门课程,“数学分析”是数学专业中最重要的基础课之一,也是数学专业教学中的“重头戏”。

这套教材根据我们在北京大学与北京理工大学长期讲授数学分析课的实际经验编写而成。我们编写此书的基本想法如下:

第一,让微积分学变得更平实自然。

大家知道,在牛顿与莱布尼茨创立微积分学之后,数学家们经过一百多年的努力,才逐步为微积分奠定了坚实的逻辑基础。这主要是柯西与魏尔斯特拉斯建立的极限理论,以及由魏尔斯特拉斯、波尔查诺、康托尔与戴德金等人所建立的实数理论。

在多数传统数学分析的教材中,讲授的次序恰好与历史发展次序相反:一般是先讲实数,再讲极限与连续,然后再讲微积分本身。这样做的好处是逻辑严谨,体系完整。但这样做也带来一些明显的问题:在课程开始的相当长的一段时间里,所讲的内容,远离了微积分的基本思想与核心内容,这会使初学者感到十分困惑,不知道这样做的目的。另外,这样做就迫使初学者在一开始就不得不面临着一系列的复杂讨论:诸如戴德金分割、上下确界存在定理、区间套定理、柯西收敛原理、聚点原理、有限覆盖定理,一致连续等等。一般说来,对于仅有初等数学知识的一年级学生而言,这些内容是艰深的,有相当一部分人会感到困难,甚至有人可能因此而对数学分析失去兴趣。

过去已有不少的作者和专家教授尖锐地指出过这个问题,并做了各种改革尝试。在过去的长期教学实践中,我们也深感这个

问题应当引起足够的重视,并逐步形成了一些想法。在编写这套教材时,根据这些想法对传统的内容体系与传统的讲法做了必要的调整,希望这个课既有坚实严谨的理论基础,又深入浅出,平实自然。

与一般传统的教材内容体系相比,我们的这套教材作了如下的一些调整:

对所谓实数的定义作了淡化处理。我们没有用戴德金分割来定义实数,而是将实数看作是一个无限小数。这样做比较直观,与中学知识也相衔接。我们不打算在实数定义上花太多时间,以便让读者在开始阶段把主要精力集中在极限概念上。

对于描述实数集合完备性的各种命题,我们没有集中在开头讲述,而是把它们适当分散到不同的阶段,使这些命题与其直接应用衔接在一起。此外,我们没有像通常那样,把确界的存在定理作为实数的完备性,而换之以单调有界序列有极限的定理。这是因为后者更容易被接受和应用,并在紧接而来的序列极限的讨论中成为极限存在性的基础。

在讲述闭区间上的连续函数的基本性质时,我们将一致连续的概念和闭区间上连续函数一致连续的定理移至后面。在微分学中只讲闭区间连续函数的有界性定理、中间值定理与最大最小值定理。

在讲完微分学与不定积分之后,讲定积分之前,我们专门设了一章“再论实数与连续函数”,其中讲述柯西收敛原理、上下确界与上下极限的存在性定理、有限覆盖定理和闭区间上连续函数的一致连续定理等等。

这样处理的好处不仅分散了难点,降低了“门槛”,更重要的是,这使得柯西收敛原理、上下确界与上下极限的存在性定理以及闭区间上连续函数的一致连续定理等,都安排在靠近直接应用的地方,从而使读者能更直接、具体地看清这些定理的意义,并真正理解它们。

II

顺便指出,在一致连续的概念的引入方式上,本书也有自己的特点。我们没有按通常的说法引入这一概念,而是用函数在区间上的振幅来引出函数连续的一致性的问题。教学实践表明,这样做使一致连续的概念更为直观、易懂。另外,一致连续的振幅的说法也与后面紧接而来的函数可积性讨论相呼应,使读者更清晰地理解一致连续性的意义。

最后,本书在内容的先后次序上也做了一点调整:在讲完一元微积分之后,没有接着讲广义积分和级数,而是在讲完了多元微积分之后,再讲无穷级数、广义积分和傅氏级数等。这一调整主要是考虑到后面这些内容有许多共同之处,摆在一起可以相互借鉴和类比。另外,我们认为广义积分、函数项级数的讨论可能比多元微积分要复杂些,将它们放在多元微积分之后更有利。

第二,强调数学分析课的基础性,演奏好“主旋律”。

我们在编写这套教材时十分关注教材的基本要求问题,希望它能较完善地体现分析学的基础知识与基本训练。

大家知道,数学分析是一门基础课,其教学目的是为后续的数学课和物理学奠定最必要的基础。我们不能离开它的基础性和基本教学目的,去片面追求它的先进性与现代化。在编写本教材过程中,当权衡内容取舍以及斟酌讲述重点时,我们总是看这些内容在分析学中乃至整个数学中的重要性,看它是否属于基础知识与基本训练,最后做出决定。我们希望这套教材能唱好“主旋律”,不走调。

在我们的教材中,凡属于分析学中的基本概念、基本理论,我们会不惜篇幅与笔墨,务求讲深、讲透;凡属基本训练,则要通过各种典型例子与习题反复讲解训练,力求做足、做到位。

在内容的取舍上,我们明确了以下几条原则:列入教材的内容必须是分析学中的基础知识与基本训练,也就是说,它们应当是重要的;凡是在后续课中要讲的基本概念或理论,不提前到这个课中讲授;有关微积分在物理与几何上的应用,在这套教材中只限于

那些典型的基本事实,较为复杂或烦琐的应用不列入;不追求叙述形式的一般性,而强调它的典型性,强调文字叙述上的深入浅出和简洁明了,反对过度形式化;在名称、记号上尽可能与数学界公共习惯标准一致。

我们认为,早年教育部颁发的《数学分析教学大纲》依旧应该得到重视,并应当成为现在讨论内容取舍的一个基本参考。砍掉某些内容应十分慎重,而增加某些内容也应十分慎重。与过去的大纲中规定的内容相比,本套教材在内容范围上没有作本质上的增删。

为了体现教学的基本要求,在某些段落或证明处,我们加了脚注或星号,来说明这些内容并不作为教学一般要求,而是留给有兴趣的读者自学。

引导学生做好习题是教学要求的一个重要体现。我们主张习题的难度要适中,特别在初学时不要做过多的、技巧性过强的题目。本书中每一节后面,留有适量的习题,大多是为了复习、巩固、深化本节所学知识的,一般说来并不难。其中有少数的题目有一定的难度。对此我们都作了必要提示,相信读者在提示的基础上能够做出。在学好基本知识把握了基本技能之后,做一些较难的题目也是必要的。

第三,讲一点数学史,讲一点人文。

我们认为在数学分析这样的基础课中,应该讲一点有关的数学史,讲一点有关的数学家的生平。在本书的开头,我们编写了一章“绪论”,来介绍什么是数学分析以及它的发展历史,介绍它对整个自然科学的影响。另外,我们以“历史的注记”与“人物的注记”的形式,把有关的历史事实及数学家的一些评述,附在了有关章节之后。重要的数学家还附上了图片。这样做的好处是多方面的:它们告诉读者,数学的概念是历史发展的结果,而不是天上掉下来的,也不是人类头脑中所固有的;读者能从更宽的视角观察数学,了解数学分析,而不至于只关注细节,只见树木不见森林。另

外,读者会从数学家的思想与精神中得到激励与启发。在编写这些内容时,我们对自己提出两条要求:一是简短(每一条记录在二三百字左右),以免“喧宾夺主”;二是准确,就是根据充足,不可杜撰,并努力避免以讹传讹。

当然,这些内容不作为教学基本要求,也不必在课堂讲授,留给学生自己读就是了。

这套书的初稿在2006年之后至正式出版前,作者们分别在首都师范大学与北京理工大学的数学学院进行了试用。教学的实践为本书初稿的修订提供了必要的依据。在试用中,首都师范大学数学学院的李庆忠院长、朱一心副院长、张晓声教授,以及北京理工大学数学系主任杨国孝教授都给予了大力支持与帮助。此外,北京大学的郭懋正教授以本书初稿为教材,亲自为07级主讲此课,并对教材初稿提出了许多宝贵的意见。高等教育出版社的李蕊同志为促成该书的出版作了不懈的努力,特别是2007年夏在北京召开了会议,征求对初稿的意见。兰莹莹同志对书稿作了精心的编辑加工,纠正了书稿中许多差错与疏漏,并使本书文字增色不少。在此,我们对他们的帮助一并表示衷心的感谢!

鉴于我们的水平有限,书中难免有错误或不妥之处,恳请广大教师与读者批评指正。

李 忠 方丽萍
2007年12月21日

目 录

绪 论	1
第一章 函数与极限	8
§1 实数	8
1. 有理数域	8
2. 无理数	11
3. 实数域及其完备性	13
4. 数轴与绝对值不等式	17
习题 1.1	21
§2 函数的概念	23
1. 函数的定义与例	24
2. 反函数与复合函数	28
3. 周期函数	31
4. 有界函数与无界函数	32
5. 初等函数	33
习题 1.2	36
§3 序列的极限	38
1. 序列极限的定义	38
2. 极限的四则运算	45
3. 实数域完备性的表述	49
习题 1.3	50
§4 序列极限的基本性质	52
1. 子序列的极限	52
2. 夹逼定理	53
3. 极限不等式	55
4. 一个重要的极限	56

5. 无穷小量与无穷大量	58
习题 1.4	61
§ 5 函数的极限	63
1. 极限的定义	63
2. 单侧极限	68
3. 当 x 趋于无穷时的极限	70
4. 无穷小量与极限的四则运算	73
习题 1.5	78
§ 6 函数极限的性质	79
1. 函数极限与序列极限	79
2. 夹逼定理	81
3. 极限不等式	84
习题 1.6	87
§ 7 连续函数	88
1. 连续函数的定义	88
2. 间断点及其分类	90
3. 连续函数的四则运算	92
4. 复合函数与严格单调函数的连续性	92
5. 初等函数的连续性	95
习题 1.7	97
§ 8 闭区间上连续函数的性质	98
1. 区间套原理与波尔查诺 - 魏尔斯特拉斯定理	99
2. 中间值定理	101
3. 有界性定理	104
4. 最大值与最小值定理	105
5. 反函数的连续性	107
6. 附注	108
习题 1.8	109
第二章 导数与微分	111
§ 1 导数的概念及其四则运算	111
1. 导数的定义	111
2. 可导与连续	116

3. 导数的四则运算	116
4. 函数的可导性	119
习题 2.1	122
§ 2 复合函数与反函数的导数	124
1. 复合函数的导数	124
2. 隐函数求导法	126
3. 反函数的导数	127
习题 2.2	131
§ 3 微分的概念	133
1. 无穷小量阶的比较	133
2. 微分的概念	134
习题 2.3	137
§ 4 高阶导数与高阶微分	138
习题 2.4	141
§ 5 一阶微分的形式不变性	142
1. 一阶微分的形式不变性	142
2. 参变量函数微分法	144
习题 2.5	145
第三章 微分中值定理	147
§ 1 拉格朗日中值定理	147
1. 费马定理与罗尔定理	147
2. 拉格朗日中值定理	149
3. 拉格朗日中值定理的一些直接应用	150
习题 3.1	155
§ 2 柯西中值定理与洛必达法则	157
1. 柯西中值定理	157
2. 洛必达法则	158
3. 其他未定式的极限	164
习题 3.2	165
§ 3 极值问题	166
1. 极值点与稳定点	166
2. 稳定点是极值点的充分条件	166