全国高等农林院校"十一五"规划教材

线性代数

张丽梅　主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

线 性 代 数

张丽梅 主编

中 国 农 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/张丽梅主编．—北京：中国农业出版社，2007.12
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-109-11975-8

Ⅰ．线… Ⅱ．张… Ⅲ．线性代数-高等学校-教材
Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 189786 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
责任编辑 甘敏敏 刘新团

北京通州皇家印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm 1/16 印张：11
字数：191 千字
定价：18.00 元

内 容 提 要

本教材是全国高等农林院校“十一五”规划教材.主要内容包括：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、线性空间与线性变换、相似矩阵、对称矩阵与二次型、矩阵理论在细分方法中的应用. 本教材在充分遵照线性代数经典理论的基础上，注重内容叙述上的深入浅出、内在关系揭示的充分细化、习题内容与形式的多样化以及线性代数应用的实例分析. 本书可作为普通高等农林院校本科专业的教科书，又可以作为研究生入学考试的参考书，也可供科技工作者阅读.

主　编　张丽梅

副主编　张立石　程　莉　何　东

参　编　林淑容

前　言

本教材是全国高等农林院校“十一五”规划教材．适合32～40学时的课堂讲授，建议32学时的使用者略去线性空间与线性变换等内容．

线性代数是高等农林院校本科生一门重要的基础课．

线性代数作为数学科学的一个重要分支，是研究有限维线性空间的线性理论与方法的一门科学．随着计算机科学及其应用的普及，线性代数理论的应用日趋广泛．工程技术各个领域的诸多问题属于线性问题．解大型线性方程组、求矩阵的特征值与特征向量等是工程技术人员经常面临的问题．新兴计算机图形学、机器视觉、模式识别等研究方向通常将问题转化为有限维的离散量问题．如为了研究通信可靠性，人们用涉及线性代数的相关理论进行通讯保密性和信息安全方面的研究，甚至有过用行列式性质进行图像置乱与还原的算法尝试并收到很好的效果，线性微分方程的解法更是离不开特征值与特征向量，对图像进行线性迭代算法的本质也可转化为矩阵幂的运算．总之，随着计算技术的不断发展，大学数学基础课程线性代数的重要性日显突出，因此对线性代数理论与思想的深刻理解与灵活运用十分重要．

本教材按照高等农林“十一五”教育教学教材编写大纲的要求，参照全国研究生入学考试数学二线性代数考试大纲的标准，结合作者多年来线性代数教学教材研究与讲授的实际编写而成．

本教材有两条主线：一是以行列式和矩阵为工具，以线性方程组为主线，阐明了行列式与矩阵的基本理论与应用；二是以特征值

与特征向量为重点，以相似矩阵和二次型为工具，进一步揭示线性代数的理论与方法的内在联系．另外，还在附录中给出了矩阵理论在细分方法中的应用实例．

本书在具体内容的编写与安排上追求如下特色：其一是保持体系的完整性，即努力以严谨的结构布局、循序渐进的表现手法，突出线性代数的基本思想与方法．其二是注重揭示线性代数理论内在关系的细致刻画，即尽量引导学生理解概念的内涵与背景，通过习题的多样化培养学生对线性代数思想与方法的理解能力与运用其解决实际问题的能力．其三是习题的内容与形式的多样性，即追求习题内容的宽泛性与形式的多样性，题型包括填空、判断、选择、计算、证明等．

本书标“*”的内容是大纲内容的拓展，供教师选用．

大连水产学院、黑龙江八一农垦大学、四川农业大学三所高校的教师参加了本书的编写工作．编写人员为张丽梅、张立石、程莉、何东、林淑容，最后由张丽梅统一定稿．

本书的出版得到大连水产学院的资助与大力支持，在此表示衷心的感谢！

本书参阅了大量线性代数公开出版的教材，在此对前人的辛勤工作表示崇高的敬意与衷心的感谢！

对本书所出现的疏漏、错误与不足，敬请读者批评指正！

编　者

2007年11月2日

目　　录

第一章　行 列 式

行列式是一个重要的数学工具，它本质上是按一定规则对有序排列的数进行运算的式子，其结果是一个数. 由于其本身所具有的独特性质以及与矩阵、线性方程组之间的密切联系，使得它在科学技术的各个领域内不可或缺. 本章先引入二阶行列式和三阶行列式，并把它推广到 n 阶行列式，然后给出行列式的性质和计算方法，最后介绍将 n 阶行列式应用于求解 n 元线性方程组的克拉默（Cramer）法则.

§1　二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

在初等数学中，我们曾讨论过二元线性方程组和三元线性方程组的求解问题.

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

用消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，此方程组有唯一解，即

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

为方便，我们引入符号 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，并称其为二阶行列式，即

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

“| |”符号内为排成两行两列的数表，其中 a_{ij} 为行列式的元素，a_{ij} 的下标表示该元素在行列式中的位置，第一个下标称为行下标，表示该元素所在的行；第二个下标称为列下标，表示该元素所在的列. 例如，a_{12} 的下标表示它位于行列式的第一行与第二列的交汇处. 常称 a_{ij} 为行列式的 (i, j) 元.

二阶行列式的计算规则可以用所谓对角线法则来记忆，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{3}$$

其中，实线称为行列式的**主对角线**，虚线称为行列式的**次对角线**. 主对角线上两个元素的乘积带正号，次对角线上两个元素的乘积带负号，所得两项的代数和就是二阶行列式的展开式.

若记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

则由上面的讨论知，当 $D \neq 0$ 时，线性方程组（1）的唯一解（2）式可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

此为求解二元线性方程组的**克拉默**（Cramer）**法则**.

例 1 用二阶行列式求解线性方程组

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ 2x + 3y = 8. \end{cases}$$

解 由于 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$，$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 11$，$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 6$，

则 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{11}{5}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{6}{5}$.

二、三元线性方程组与三阶行列式

设有三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{4}$$

用消元法消去 x_2，x_3，得

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1$$
$$= b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{13}a_{32} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{13}a_{22} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32}$$

同样，方便起见，引入记号 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

并称其为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{5}$$

通过观察发现，上述三阶行列式含 6 项，每项均为取自不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号，其规则如图 1 - 1 所示，

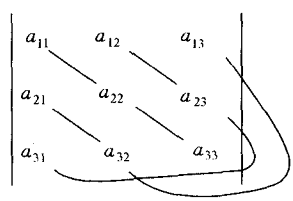

图 1 - 1

沿各实线相连的三个数的积取正号，请读者根据（5）式右端的符号项，用虚线画出负号乘积项的取法示意图；在与二阶行列式的定义进行比较分析后，猜测四阶行列式的代数和中有多少乘积项．

容易验证，当三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，上述三元线性方程组有唯一解，解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

即若求 x_i，就将右端常数项列替换行列式 D 中对应 x_i 的系数列构成新的行列式 D_i，并按上述公式计算出 x_i，此为求解三元线性方程组的**克拉默（Cramer）法则**．

例 2 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 5\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}.$$

解 由对角线法则知

$$\begin{aligned}D&=1\times0\times2+2\times5\times0+3\times4\times(-1)-3\times0\times0-\\&\quad 2\times4\times2-1\times5\times(-1)\\&=-23\end{aligned}$$

§2 排列与对换

观察二、三阶行列式可以发现，其值是一些乘积项的代数和，其中乘积项为取自不同行不同列的元素之积，并冠以不同的正负号．猜想从二、三阶行列式推广到 n 阶行列式，其结果也应为一些乘积项的代数和，事实上也是这样，且乘积项符号的确定与 n 个自然数排列顺序的指标（逆序数、奇偶性）相关，因此本节先进行排列的逆序数及其奇偶性的讨论．

一、排列与逆序

定义 1 由 1，2，…，n 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列（或全排列）．

显然 $12\cdots n$ 也是一个 n 级排列，这个排列具有自然顺序，就是按递增的顺序排起来的，其它的排列或多或少地破坏自然顺序．

定义 2 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就构成一个**逆序**，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**．

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$．

定义 3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**．

例 3 求排列 234651 的逆序数．

解 在排列 234651 中，从 2 开始数其后比它小的数的个数，为 1；再数 3 后面比它小的数的个数，为 1；一直下去，5 后面比它小的数的个数为 1. 将所有构成的逆序数加起来，$1+1+1+2+1=6$，即 $\tau(234651)=6$.

也可以从 2 至 1 依次找出前面比它大的数的个数，求和计算出逆序数，请

读者尝试．

例 4 分别求出排列 $123\cdots n$，$n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数 $\tau(123\cdots n)$，$\tau(n(n-1)\cdots 21)$，并指出排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的奇偶性．

解 易见在 n 阶排列 $123\cdots n$ 中没有逆序，所以 $\tau(123\cdots n)=0$，它具有自然顺序，常称为**自然排列**．

在排列 $n(n-1)\cdots 21$ 中，从 n 开始数其后比它小的数的个数，为 $n-1$；再数 $n-1$ 后面比它小的数的个数，为 $n-2$；一直下去，直到 2 后面比它小的数得个数为 1. 将所有构成的逆序数加起来，即

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{(n-1)n}{2}.$$

故
$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的奇偶性与 n 的取值有关，须讨论确定．设 k 为非负整数，

当 $n=4k+1$ 时，$\frac{(n-1)n}{2}=2k(4k+1)$ 为偶数，排列为偶排列；

当 $n=4k+2$ 时，$\frac{(n-1)n}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 为奇数，排列为奇排列；

当 $n=4k+3$ 时，$\frac{(n-1)n}{2}=(2k+1)(4k+3)$ 为奇数，排列为奇排列；

当 $n=4k+4$，$\frac{(n-1)n}{2}=2(k+1)(4k+3)$ 为偶数，排列为偶排列．

二、对　　换

为了研究 n 级行列式的性质，需要讨论对换以及它与排列奇偶性之间的关系．把一个排列中某两个数的位置互换而其余的数不动，就得到另一个排列．这称为一个**对换**．显然，如果再次施行相同的对换，那么排列就还原了．

定理 1 一次对换改变排列的奇偶性．

这就是说，经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列．

证 先考虑相邻两数的对换，设 n 级排列为 $\cdots ab\cdots$，交换 a，b 的位置，得 $\cdots ba\cdots$.

在这两个 n 级排列中，除 a，b 以外，其它各对数的顺序和逆序是相同的. 因此，当 $a<b$ 或 $a>b$，有 $\tau(\cdots ba\cdots)=\tau(\cdots ab\cdots)\pm 1$，
所以这两个 n 级排列的奇偶性不同．

再考虑不相邻两数的对换，设 n 级排列为 $\cdots ae_1\cdots e_jb\cdots$，其中 $j\geqslant 1$，交换

a，b 的位置，得$\cdots be_1\cdots e_ja\cdots$.

用另一个过程实现这个对换，先由 a 依次与右边相邻数对换 j 次，得

$$\cdots e_1\cdots e_jab\cdots,$$

再把 b 依次与左边相邻数对换 $j+1$ 次，得$\cdots be_1\cdots e_ja\cdots$，

其间共进行了 $2j+1$ 次相邻两数的对换，即两排列间改变了 $2j+1$ 次奇偶性，所以它们的奇偶性不同．

推论 1 奇排列变成自然排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然排列的对换次数为偶数．

由定理 1，一次对换改变排列的奇偶性，所以一个奇排列经过 1 次对换变成偶排列，经过 2 次对换又变成奇排列，依次类推，奇排列经过 $2k-1$ 次对换变成偶排列，经过 $2k$ 次对换变成奇排列，其中 k 为正整数．因为自然排列 $12\cdots n$ 是偶排列，即，一个奇排列必须经过奇数次对换才能变成自然排列．同理，一个偶排列必须经过偶数次对换才能变成偶排列．

推论 2 在全部 n 级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有 $n!/2$ 个．

证 n 级排列的总数为$n!$，设其中奇排列为 p 个，偶排列为 q 个．设想将每一个奇排列都施以相同的对换，例如都将第 1,2 元素对换，则由定理 1 可知 p 个奇排列全都变为偶排列，于是有 $p\leqslant q$. 同理，如果将全部的偶排列也都施以同一对换，则 q 个偶排列全都变为奇排列，于是又有 $q\leqslant p$，所以得出 $p=q$，即奇偶排列个数相等，各为$\frac{n!}{2}$个．

§3 n 阶行列式

在给出 n 阶行列式的定义之前，再来回顾一下二阶和三阶行列式的定义．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33},$$

从中可以看出，它们都是一些乘积项的代数和，而每一乘积项都是由行列式中位于不同行和不同列的元素构成的，并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积项组成．另一方面，每一乘积项都带有符号，这符号是按什么原则确定的呢？在三阶行列式的展开式中，项的一般形式可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，

其中 $j_1j_2j_3$ 是 1，2，3 的一个排列．可以看出，当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时，对应的项带有正号；当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时对应的项带有负号．对于二阶行列式也是如此．

这样，二阶行列式可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

$\sum$ 表示对 1,2 两个数的所有二级排列 j_1j_2 求和．

三阶行列式可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和．

上面对二阶、三阶行列式定义的分析使我们对下面 n 阶行列式的定义更容易理解和接受．

定义 4 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积项

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

的代数和．这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，每一项都按下面规则带有符号：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项带有正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项带有负号．这一定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \qquad (6)$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和．

行列式有时简单记为 $\det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 为行列式的 (i,j) 元，即第 i 行、第 j 列元素．一阶行列式 $|a|$ 就是 a，注意不要与绝对值符号相混淆．

定义表明，为了计算 n 阶行列式，首先由所有可能的位于不同行不同列的