高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

线性代数

南开大学数学科学学院　贾兰香　邢金刚　编

高等教育出版社

高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

线性代数

南开大学数学科学学院
贾兰香　邢金刚　编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的经济管理类数学基础课程教学基本要求，同时参考了教育部最近颁布的研究生入学考试大纲编写而成的。全书分为5章，介绍了行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量以及二次型与对称矩阵。每章都附有习题和参考答案。

本书内容丰富，阐述简明易懂，结构合理，注重在经济和管理方面的应用以及对学生的抽象思维能力和推理能力的培养，可作为高等院校经济管理类各专业线性代数的教材。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数／贾兰香，邢金刚编．—北京：高等教育出版社，2008.5
ISBN 978-7-04-023909-6

Ⅰ.线… Ⅱ.①贾…②邢… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 042829 号

策划编辑 马 丽　责任编辑 李华英　封面设计 刘晓翔　责任绘图 尹文军
版式设计 王艳红　责任校对 王 超　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008年5月第1版
印　　张	16.75	印　　次	2008年5月第1次印刷
字　　数	310 000	定　　价	19.60元

物料号　23909-00

前言

本书是为一般高等院校经济管理类专业以及相关专业本科生编写的线性代数教材。

随着我国市场经济的深入发展和不断完善，对经济管理类专业本科生的数学基础、数学素养和运用数学理论及数学方法分析解决实际问题能力的要求也越来越高。同时，在经济管理类专业的本科生中，有相当多的学生希望在完成本科阶段的学习后，能攻读硕士学位，继续深造。为此，我们在总结多年线性代数课程教学经验的基础上，编写了本教材。

在编写过程中，我们注意把握以下几个基本点：第一，内容的深度与广度不低于经济管理类线性代数课程的教学基本要求；第二，基本理论与基本方法的阐述、例题与习题的选配，既能保证学生打好基础，也能满足学生将来报考硕士研究生的需要；第三，加强综合运用能力和解决实际问题能力的培养。

本书的内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型与对称矩阵等。

本书能够得以出版，首先要感谢高等教育出版社的支持与帮助，尤其是数学编辑对教材的定位、总体思路以及许多具体问题都给予了悉心指导和热情帮助。

本书的编写得到了南开大学教务处的立项支持，得到了南开大学数学科学学院的支持与帮助。数学科学学院高等数学教学部负责本书编写与出版的组织工作，高等数学教学办公室主任薛锋副研究员在协调、联络及后勤保障等工作中付出了辛勤劳动。对来自方方面面的关心、支持与帮助，我们在这里一并表示衷心的感谢。

由于我们的水平所限，加之时间仓促，本书的不足与缺点在所难免，请读者批评指正。

编　者

2007 年 12 月于南开园

目　　录

第1章 行 列 式

行列式是一个重要的概念,它在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用,尤其是在线性代数中,线性方程组解的理论更离不开行列式.本章首先介绍二阶、三阶行列式的概念,然后给出 n 阶行列式的定义、n 阶行列式的性质以及 n 阶行列式的计算,最后给出行列式的一个应用:含有 n 个未知数、n 个方程的 n 元线性方程组的克拉默法则.

1.1 二阶、三阶行列式

行列式起源于解含有两个或三个未知量的线性方程组.在中学代数中我们已经学过用消元法解二元和三元线性方程组.

对于标准的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 x_1,x_2 是方程组的未知量,a_{11},a_{21} 称为方程组(1.1.1)中 x_1 的系数,a_{12},a_{22} 称为方程组(1.1.1)中 x_2 的系数,b_1 和 b_2 称为方程组(1.1.1)的常数项.这里 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},b_1$ 和 b_2 均为常数.

通过消元法可解出方程组(1.1.1)的解,当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,并称之为一个二阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

在一个行列式中，横排叫作行，纵排叫作列. 其中 a_{11},a_{12} 和 a_{21},a_{22} 分别叫作该行列式的第 1 行和第 2 行，而 a_{11},a_{21} 和 a_{12},a_{22} 分别叫作该行列式的第 1 列和第 2 列，数 a_{11},a_{12},a_{21} 和 a_{22} 叫作行列式的元素.

按照二阶行列式的定义，公式(1.1.2)中 x_1 和 x_2 的分子可分别用下列行列式表示.

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

于是，公式(1.1.2)可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.1.3}$$

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示一个三阶行列式，它表示数值 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}- \\ a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}. \tag{1.1.4}$$

用消元法解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

当$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$时,可得到与二元线性方程组相类似的结论,即

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

由以上二阶行列式和三阶行列式的定义,我们可以得到以下几点:

(1) 一个二阶行列式由排成正方形的四个数组成,三阶行列式则由排成正方形的九个数组成. 这些数可以用 a_{ij} 表示,称为元素. 元素的两个下标,i 表示该元素所在的行,j 表示该元素所在的列. 这些元素横排成行,纵排成列.

(2) 行列式的行数(或列数)称为行列式的阶,而行列式中元素的个数等于阶的平方.

(3) 二阶行列式有 $2!=2$ 项,其中每一项为两个元素的乘积,这两个元素分别来自不同的行和不同的列,它们当中有一项取正,一项取负. 类似地,三阶行列式共有 $3!=6$ 项,每一项为三个元素的乘积,它们分别来自不同的行和不同的列,这些项中有一半取正,一半取负.

在以上的分析中,我们知道行列式的每一项的符号有时取正,有时取负,究竟如何来确定它们的符号呢? 这个问题留待 1.3 节加以解决.

1.2 n 级排列

为了给出 n 阶行列式的定义,以及确定行列式中每一项所应取的符号,在这里我们首先研究一下 n 级排列的性质和有关定理.

定义 1.2.1 由数码 $1,2,\cdots,n$ 所组成的一个有序数组,称为一个 n 级排列.

显然,n 个数码总共有 $1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n=n!$ 种不同的排列.

例如,35412 和 1324 分别为 5 级排列和 4 级排列. 由 1,2,3 这三个数所构成的不同的 3 级排列共有 $3!=6$ 个,即 123,132,231,213,312,321.

定义 1.2.2 在一个排列中,若有某一个较大的数排在某一个较小的数的前面,则称这两个数构成一个逆序.

例如,5 级排列 35412 有七个逆序,4 级排列 1324 有一个逆序.

在一个 n 级排列 $K_1K_2\cdots K_n$ 中,逆序的总数称为这个排列的逆序数,记为 $N(K_1K_2\cdots K_n)$. 显然,

$$N(K_1K_2\cdots K_n) = N_1 + N_2 + \cdots + N_{n-1}.$$

其中 $N_i(i=1,2,\cdots,n-1)$表示 K_i 后面比 K_i 小的数的个数.

例如,在排列 3657214 中,在 3 后面比 3 小的数有 2 个,在 6 后面比 6 小的数有 4 个,在 5 后面比 5 小的数有 3 个,在 7 后面比 7 小的数有 3 个,在 2 后面比 2 小的数有 1 个,所以

$$N(3657214) = 2+4+3+3+1 = 13.$$

$123\cdots n$ 所构成的 n 级排列,是按照自然数的顺序由小到大进行排列的,我们称它为自然顺序排列,容易看出自然顺序排列的逆序数为 0.

在上例中,我们看到有的排列的逆序数是奇数,而有的排列的逆序数是偶数.

定义 1.2.3 在一个排列中,若它的逆序数是奇数,则称这个排列是奇排列;若它的逆序数是偶数,则称这个排列是偶排列.

例如,3 级排列 231 的逆序数 $N(231)=2$,是个偶数,所以它是一个偶排列;5 级排列 35412 的逆序数 $N(35412)=7$,是个奇数,所以它是一个奇排列;排列 $123\cdots n$ 的逆序数 $N(12\cdots n)=0$,因此它是一个偶排列.

把一个排列中某两个数互换,其余的数保持不动,得到一个新的排列,这样的一个变换称为一个对换.

例如,排列 1324 经过 3,4 对换,变成了排列 1423. 原来排列的逆序数是 1,为奇排列,经过对换 3,4 后的排列的逆序数是 2,为偶排列. 又如排列 1357624,经过 5,2 对换变为排列 1327654,原来排列的逆序数是 8,为偶排列,经过对换 5,2 后的排列的逆序数是 7,为奇排列. 在一个排列中,经过一次对换之后改变了原来排列的奇偶性. 由下面的定理知道,这是一个普遍的规律.

定理 1.2.1 在一个排列中,经过一次对换排列的奇偶性改变.

证 首先看在一个排列中对换相邻的两个数的情形. 设已给排列

$$\cdots ij\cdots,$$

经过 i,j 对换变成排列

$$\cdots ji\cdots,$$

其中"…"表示除 i,j 之外其余不动的数. 比较一下这两个排列的逆序数,由于"…"中各数的位置保持不变,因此在上述两个排列中,i 或 j 与前面和后面"…"中各数所构成的逆序也相同,所不同的只是改变了 i 与 j 的顺序. 于是,当 $i<j$ 时,新排列比原排列的逆序数多了一个;当 $i>j$ 时,新排列比原排列的逆序数少了一个,所以这两个排列的奇偶性相反.

现在,看一般情形. 设 i 与 j 之间有 K 个数,即排列为

$$\cdots iS_1S_2\cdots S_Kj\cdots,$$

经过 i 与 j 的对换,变成排列

$$\cdots jS_1S_2\cdots S_Ki\cdots,$$

这样的一个对换,我们可以把它看作在原排列中先让 j 与 S_K 对换,再与 S_{K-1} 对换,……,最后与 i 对换;一共经过 $K+1$ 次相邻两数的对换,变成排列

$$\cdots jiS_1S_2\cdots S_K\cdots,$$

然后,再让 i 与 S_1 对换,再与 S_2 对换,……,最后与 S_K 对换,一共经过 K 次相邻两数的对换,最后变成排列

$$\cdots jS_1S_2\cdots S_Ki\cdots,$$

它正是排列 $\cdots iS_1S_2\cdots S_Kj\cdots$ 经过 i 与 j 的对换所得到的排列. 因此,i 与 j 的对换总共通过 $2K+1$ 次相邻两数的对换而得到. 上面已经证明对换相邻两数改变排列的奇偶性,而 $2K+1$ 为奇数,所以,经过奇数次相邻两数的对换改变原排列的奇偶性.

1.3 n 阶行列式的定义

在 1.1 节结束时,我们曾提出过行列式中某一项符号的确定问题. 首先观察二阶行列式和三阶行列式中每一项符号的构成规律. 我们知道,二阶行列式中的两项为 $a_{11}a_{22}$ 和 $a_{12}a_{21}$,在每一项中,当这一项的元素的行标按自然顺序排列好之后,它的列标正好取遍了所有的 2 级排列 12 和 21,并且 $N(12)=0$ 是偶数,12 为偶排列,所对应的项 $a_{11}a_{22}$ 取正号;$N(21)=1$ 是奇数,21 为奇排列,所对应的项 $a_{12}a_{21}$ 取负号. 再来看三阶行列式中的六项:

$$a_{11}a_{22}a_{33},\ a_{12}a_{23}a_{31},\ a_{13}a_{21}a_{32},\ a_{13}a_{22}a_{31},\ a_{11}a_{23}a_{32},\ a_{12}a_{21}a_{33}.$$

它们的行标都已按自然顺序排列好,而列标正好取遍了所有的 3 级排列 123,231,312,321,132,213. 并且 $N(123)=0$,$N(231)=2$,$N(312)=2$ 均为偶数,即

123,231 和 312 均为偶排列,所对应的项 $a_{11}a_{22}a_{33}$,$a_{12}a_{23}a_{31}$ 和 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 取正号;$N(321)=3$,$N(132)=1$,$N(213)=1$ 均为奇数,即 321,132 和 213 均为奇排列,所对应的项 $a_{13}a_{22}a_{31}$,$a_{11}a_{23}a_{32}$ 和 $a_{12}a_{21}a_{33}$ 取负号.

根据以上规律,我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.3.1　设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列,用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示,称为 n 阶行列式,其中 a_{ij} 代表第 i 行第 j 列的数(称为元素)($i,j=1,2,\cdots,n$).它等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和,此代数和共有 $n!$ 项,每项的符号是这样确定的:当这一项的 n 个元素的行标按自然顺序排列好之后,它的列标构成一个 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$,若该 n 级排列是偶排列,那么这一项取正号;是奇排列则取负号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \qquad (1.3.1)$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 称为行列式的一般项.

当 $n=2$ 或 3 时,就是二阶行列式或三阶行列式.特别地,当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

我们知道,二阶行列式共有 $2!=2$ 项,其中有一项取正号,一项取负号;三阶行列式共有 $3!=6$ 项,其中有三项取正号,三项取负号.n 阶行列式共有 $n!$ 项,可以证明在 n 阶行列式中有 $\frac{n!}{2}$ 项取正号,$\frac{n!}{2}$ 项取负号.由行列式的定义 1.3.1,只需证明在 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中,有一半是偶排列,一半是奇排列就行了.设 $n!$ 个 n 级排列中有 p 个偶排列,q 个奇排列.我们将 $n!$ 个 n 级排列中的前两个数码对换,其他数的位置保持不变,由定理 1.2.1 可知,对换后改变原排列的奇偶

性，原来为偶排列的，对换后变为奇排列，这说明奇排列的个数不小于偶排列的个数，即 $q \geq p$，原来为奇排列的，对换后变成了偶排列，这说明了偶排列的个数不小于奇排列的个数，即 $p \geq q$，所以 $q=p$. 因此，在 $n!$ 个 n 级排列中，奇、偶排列各占一半.

定义 1.3.1 中的行列式，简记为 $|a_{ij}|$.

例 1.3.1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ u & v & g & h \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式，按行列式的定义，它应有 $4!=24$ 项. 但只有以下四项

$$adeh,\ adfg,\ bceh,\ bcfg$$

不为零. 与这四项相对应的列标的 4 级排列分别为 1234，1243，2134 和 2143，而 $N(1234)=0$，$N(1243)=1$，$N(2134)=1$，$N(2143)=2$，所以第一项和第四项应取正号，第二项和第三项应取负号，即

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & e & f \\ u & v & g & h \end{vmatrix} = adeh - adfg - bceh + bcfg.$$

例 1.3.2 下列各项是否为六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中的一项？若是，应取什么符号？

(1) $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{56}a_{61}$；

(2) $a_{33}a_{44}a_{66}a_{55}a_{12}a_{61}$；

(3) $a_{24}a_{31}a_{53}a_{42}a_{16}a_{65}$.

解 (1) $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{56}a_{61}$ 的行标排列为 123456，这表明元素来自不同的行，而列标排列为 234561，这也表明元素来自不同的列，所以它是六阶行列式的一项，并且 $N(234561)=5$ 是奇数，即 234561 为奇排列，所以该项应取负号.

(2) $a_{33}a_{44}a_{66}a_{55}a_{12}a_{61}$ 的行标排列为 346516，来自第 6 行的有两个元素，根据行列式的定义，它不是六阶行列式的一项.

(3) $a_{24}a_{31}a_{53}a_{42}a_{16}a_{65}$ 的行标排列为 235416，这表明元素来自不同的行，列

标排列为 413265，这也表明元素来自不同的列，所以它是六阶行列式的一项. 现在确定它应取的符号：把它的行标按自然顺序排列为 $a_{16}a_{24}a_{31}a_{42}a_{53}a_{65}$，列标的六级排列为 641235，且 $N(641235)=8$ 是偶数，即 641235 为偶排列，所以该项应取正号.

例 1.3.3 计算上三角形行列式（当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$ 的行列式）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 这是一个 n 阶行列式，应有 $n!$ 项，它的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，而乘积当中只要有一个元素为 0，乘积就为 0，所以只需取乘积不为 0 的项即可. 由于第 n 行中只有 a_{nn} 不为 0，故 $j_n=n$. 在第 $n-1$ 行只有 $a_{n-1,n-1}$ 和 $a_{n-1,n}$ 不为 0，而 $j_n=n$，故 $j_{n-1}=n-1$，依次类推，…，$j_2=2$，$j_1=1$. 所以行列式中不为 0 的项只能是

$$a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn},$$

列标的 n 级排列的逆序数 $N(123\cdots n)=0$ 为偶数，所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

在行列式中，我们称左上角到右下角的对角线为主对角线. 例 1.3.3 表明上三角形行列式等于主对角线元素的乘积.

同理可计算出下三角形行列式（当 $i<j$ 时 $a_{ij}=0$ 的行列式）

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,对角形行列式(当 $i\neq j$ 时,$a_{ij}=0$ 的行列式)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.3.4 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 这个行列式除了 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 这一项外,其余项均为 0. 现在来看这一项的符号,列标的 n 级排列为 $n(n-1)\cdots 21$,其逆序数

$$N(n(n-1)\cdots 21) = (n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

同理可计算出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

由行列式的定义,可以得出:如果行列式有一行(或列)的元素全为 0,则该行列式等于 0.

事实上,因为行列式中每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积,所以每一项都至少有一个 0 元素,因而该行列式等于 0.

定理 1.3.1 n 阶行列式的一般项可以写为

$$(-1)^{m+l}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 都是 n 级排列,m 和 l 分别为排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

证 在乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中,交换任意两个元素的位置,那么两个下标所对应的 n 级排列也同时变换,由定理 1.2.1 可知,排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数将同时改变奇偶性,于是 $m+l$ 的和的奇偶性不变. 这样,我们经过交换有限次两个元素的位置,使乘积 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中元素的行标调换成按自然顺序 $123\cdots n$ 排列,而设此时所对应的列标的 n 级排列为 $s_1s_2\cdots s_n$,则有

$$\begin{aligned}(-1)^{m+l}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} &= (-1)^{N(12\cdots n)+N(s_1s_2\cdots s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}\\ &= (-1)^{N(s_1s_2\cdots s_n)}a_{1s_1}a_{2s_2}\cdots a_{ns_n}.\end{aligned}$$

上式利用了 $N(12\cdots n)=0$.

有了定理 1.3.1,在 n 阶行列式的定义 1.3.1 中,如果我们把行列式的一般项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中元素的列标调换成按自然顺序 $123\cdots n$ 排列,而此时相应的行标的 n 级排列为 $i_1i_2\cdots i_n$,那么行列式的定义又可叙述为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}, \qquad (1.3.2)$$

其中 $\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 求和.

1.4 行列式的性质

本节介绍行列式的一些主要性质,以便利用这些性质,简化行列式的计算.

性质 1 如果行列式的某行(如第 i 行)的各元素是二项之和,那么这个行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{i-1,j_{i-1}}(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{i-1,j_{i-1}}b_{ij_i}a_{i+1,j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}+$$

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{i-1,j_{i-1}}c_{ij_i}a_{i+1,j_{i+1}}\cdots a_{nj_n}$$