现代数学基础丛书 119

线性微分方程的非线性扰动

徐登洲　马如云　著

3

科学出版社
www.sciencep.com

内容简介

本书灵活地运用多种非线性分析工具，系统地论述了一些重要的常微分方程和偏微分方程边值问题解的存在性和唯一性. 主要内容有非共振问题、共振问题、强共振问题、特征线问题及其扰动、非线性常微分方程边值问题正解、结点解的存在性和解集分支的全局结构. 本书在第一版的基础上，新增了正算子及分歧，非线性常微分方程边值问题的正解，分歧理论在非线性常微分方程边值问题中的应用等内容.

本书适合高校数学及相关专业师生和科研人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

线性微分方程的非线性扰动/徐登洲，马如云著. —2版. —北京：科学出版社，2008

(现代数学基础丛书；119)

ISBN 978-7-03-020531-5

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①徐…②马… Ⅲ. 线性方程：微分方程 Ⅳ. O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 027194 号

责任编辑：林 鹏 张 扬/责任校对：赵燕珍

责任印制：赵德静/封面设计：王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1994 年 2 月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2008 年 3 月第 二 版 印张：18 3/4

2008 年 3 月第一次印刷 字数：348 000

印数：1—3 000

定价：56.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈长虹〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益.

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经被破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷. 它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新.

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

第二版前言

本书自 1994 年 2 月出版以来，曾于 1998 年 10 月第二次印刷．现根据读者意见和非线性微分方程研究领域的一些发展动态，结合作者自己近十余年的研究成果，对第一版作了以下修订：

1. 第 1 章增加了正算子及分歧方面的基本理论介绍.

2. 新增了“非线性常微分方程边值问题的正解”及“分歧理论在非线性常微分方程边值问题中的应用”这两方面的内容，分别列为第 6 章和第 7 章.

3. 更正了第一版中许多疏忽和印刷错误．

我们衷心感谢广大读者对本书的关心，并欢迎继续提出宝贵意见．

马如云

2007 年 10 月

第一版前言

非线性微分方程有着极为丰富的源泉，研究它的最基本方法是线性方程的非线性扰动.本书将讨论几种常见而重要的常微分方程和偏微分方程的可解性及多解的存在性问题，我们未拘泥于某一种非线性分析方法，而采用灵活多样的分析工具，如单调算子理论、不动点定理、解集连通理论、拓扑延拓定理及变分理论等.本书坚持先有方程，后找分析工具研究方程的思想.全书是依据扰动项的特征进行分类的.

本书第 1 章是以后诸章的基础，该章简介线性微分方程的基础知识及一系列最必要的分析工具，这样安排是为了便于读者.因而对于已经熟悉了这部分内容的读者，完全可以直接读后几章.有的读者即使不完全熟悉这部分内容，但若有较好的数学基础，也可先从后面几章读起，遇到有关概念和定理时再翻阅这一章.

第 2 章论述线性方程的不跨特征值扰动.我们使用多种不同的分析方法，逐步实现扰动项由渐近一致向渐近非一致的过渡.

第 3 章在单调性假设、Landesman-Lazer 条件及符号条件下讨论线性方程的跨特征值扰动问题的一些结果.

第 4 章是强共振问题和带周期函数扰动项的共振问题之专题讨论.

第 5 章介绍广义谱理论及另外一种与梁方程有关的四阶两参数特征值问题.该章的中心问题是广义特征值问题的非线性扰动的可解性.

每章之末以附注形式介绍有意义的工作和进展，书后的参考文献是按章编排的.

本书虽有系统整理日益膨胀的文献资料的目的，但无囊括一切成果的奢望.在内容选取上我们固然要介绍若干重要的结果，但却又偏重于近二十多年来的进展.由于这些材料至今仍分散在国内外的文献之中，所以编写过程中没有现成的书可借鉴，加之水平所限，成书仓促，疏漏和错误在所难免，真诚地欢迎读者批评指正.

陈文嫄教授和范先令教授阅读了本书初稿，提出了许多宝贵修改意见.作者在此对他们表示深切的感谢.

本书的工作获甘肃省自然科学基金资助.

作　者

1993 年 7 月

目　　录

第 1 章　半线性微分方程的现代方法简介

在线性微分方程理论中，一个方程的解往往可以借助多种不同的方法得到. 本书讨论带有非线性扰动的线性微分方程的解的存在性. 对于一个具体的方程，也常常试图利用多种不同的方法进行研究，所以首先对半线性微分方程的现代方法作简单介绍. 1.1 节介绍本书所论及的几类重要的微分方程及 Fredholm 抉择在线性微分方程中的应用；1.2 节简介 Sobolev 空间. Sobolev 空间是非线性分析应用到微分方程问题中去的桥梁. 这部分内容已有许多著作可供阅读. 为了方便查阅，仅给出了定义和几个嵌入定理；在 1.3～1.10 节中，分别罗列单调算子理论、不动点理论(如扭转映射的不动点定理、Schauder 不动点定理等)、拓扑度理论(如 Leray-Schauder 原理、Mawhin 延拓定理等)、临界点理论、集连通理论、正算子理论及分歧理论等方面的主要结果. 这里仅挑选出以后诸章最必要的材料，而略去证明. 对于已经熟悉了这些材料的读者，可越过这几节；对于想了解证明过程的读者，可根据出处参阅有关著作.

1.1　线性微分方程

线性微分方程的理论是非线性微分方程理论的基础. 线性微分方程种类繁多，下面简介本书所论及的几类重要的线性微分方程.

1.1.1　线性特征值问题

(Ⅰ) 弹簧振子的运动是通过二阶线性常微分方程

$$\ddot{x}(t)+\lambda x(t)=0 \tag{1.1.1}$$

来描写的，其中，$\ddot{x}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

(a) 考虑带周期边值条件的线性特征值问题

$$\begin{cases}-\ddot{x}-\lambda x=0,\\ x(0)-x(2\pi)=\dot{x}(0)-\dot{x}(2\pi)=0,\end{cases} \tag{1.1.2}$$

其中，$\ddot{x}=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

定义线性算子 $L_1:D(L_1)\subset L^2(0,2\pi)\to L^2(0,2\pi)$，

$$L_1u(t)=-\ddot{u}(t),\qquad \forall\, u\in D(L_1),$$

其中，

$$D(L_1)=\left\{u\in L^2(0,2\pi)\left|\begin{array}{l}u,\dot{u}\text{ 在}[0,2\pi]\text{ 上绝对连续},\ddot{u}\in L^2(0,2\pi),\\ u(0)-u(2\pi)=\dot{u}(0)-\dot{u}(2\pi)=0\end{array}\right.\right\},$$

则 L_1 为自伴算子，且 L_1 的特征值为 $r_N=N^2(N=0,1,2,\cdots)$. $r_N=N^2$ 所对应的特征子空间为 span$\{\sin Nx,\cos Nx\}$.

(b) 考虑带两点边值条件(即 Dirichlet 边值条件)的线性特征值问题

$$\begin{cases}-\ddot{x}-\lambda x=0,\\ x(0)=x(\pi)=0.\end{cases}\tag{1.1.3}$$

定义线性算子 $L_2:D(L_2)\subset L^2(0,\pi)\to L^2(0,\pi)$,

$$L_2u(t)=-\ddot{u}(t),\qquad \forall u\in D(L_2),$$

其中，

$$D(L_2)=\left\{u\in L^2(0,\pi)\left|\begin{array}{l}u,\dot{u}\text{ 在}[0,\pi]\text{ 上绝对连续},\\ \ddot{u}\in L^2(0,\pi),u(0)=u(\pi)=0\end{array}\right.\right\},$$

则 L_2 的特征值为 $r_N=N^2(N=1,2,\cdots)$. $r_N=N^2$ 所对应的特征子空间为 span$\{\sin Nx\}$.

(c) 考虑带 Neumann 边值条件的线性特征值问题

$$\begin{cases}-\ddot{x}-\lambda x=0,\\ \dot{x}(0)=\dot{x}(\pi)=0.\end{cases}\tag{1.1.4}$$

定义线性算子 $L_3:D(L_3)\subset L^2(0,\pi)\to L^2(0,\pi)$,

$$L_3u(t)=-\ddot{u}(t),\qquad \forall u\in D(L_3),$$

其中，

$$D(L_3)=\left\{u\in L^2(0,\pi)\left|\begin{array}{l}u,\dot{u}\text{ 在}[0,\pi]\text{ 上绝对连续},\\ \ddot{u}\in L^2(0,\pi),\dot{u}(0)=\dot{u}(\pi)=0\end{array}\right.\right\},$$

则 L_3 的特征值为 $r_N=N^2(N=0,1,2,\cdots)$. $r_N=N^2$ 所对应的特征子空间为 span$\{\cos Nx\}$.

(II) 处于稳定状态的温度场中的温度、流体的势以及弹性理论中的调和位势等均满足 Laplace 方程

$$\Delta_1 u=0,\tag{1.1.5}$$

其中，$\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

现在设 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 为一个具有光滑边界的区域. 记

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_N^2}.$$

(d) 考虑带 Dirichlet 边值条件的二阶椭圆方程线性特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

定义线性算子 $L_4 : D(L_4) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$,

$$L_4 u = -\Delta u, \qquad \forall u \in D(L_4),$$

其中,

$$D(L_4) = \{u \in L^2(\Omega) \mid u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)\}$$

(关于 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 及 $W^{2,2}(\Omega)$ 的定义参见 1.2 节),则 L_4 是自伴算子且 L_4 有一列特征值

$$(0 <) \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \lambda_4 \leqslant \cdots,$$

具有如下性质:

(i) $\forall k, \lambda_k$ 所对应的特征子空间均为有限维.

(ii) λ_1 所对应的某特征函数 φ 满足

$$\varphi(x) > 0, \qquad \forall x \in \Omega,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} < 0, \qquad \forall x \in \partial\Omega,$$

其中,$\frac{\partial}{\partial \vec{n}}$ 表示外法向导数.

(e) 考虑带 Neumann 边值条件的二阶椭圆方程线性特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = 0, & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1.7}$$

问题(1.1.7)的特征值为

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots.$$

$\lambda_1 = 0$ 所对应的特征子空间为 span$\{1\}$. 对于任意自然数 k, λ_k 所对应的特征子空间均是有限维的.

不难看出,当 $N=1$ 时,Laplace 算子便是二阶常微分算子 $\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2$.

(III) 弹性弦的波动方程.

设 $Q=[0,2\pi]\times[0,\pi]$.

(f) 考虑带周期- Dirichlet 边值条件的一维波方程的线性特征值问题

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \lambda u = 0, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \\ u(0,x) = u(2\pi, x). \end{cases} \tag{1.1.8}$$

定义线性算子 $L_6:D(L_6)\subset L^2(Q)\to L^2(Q)$，

$$L_6u=u_{tt}-u_{xx},\qquad \forall u\in D(L_6),$$

其中，$D(L_6)=\left\{u\in L^2(Q)\ \middle|\ \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{N}}}(n^2-m^2)^2|C_{mn}|^2<+\infty\right\}$（注意：当 $u\in L^2(Q)$ 时，u 可以 Fourier 展开成 $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}C_{jk}\mathrm{e}^{ijt}\sin kx$，$\sum_k\sum_j|C_{jk}|^2<\infty$. 为方便，常用 $\{C_{jk}\}$ 表示 u），则 L_6 是一个有闭值域的自伴算子，且 L_6 的特征值集为

$$\{n^2-m^2\mid n\in\mathbb{N},m\in\mathbb{Z}\},$$

$r_{n,m}=n^2-m^2$ 所对应的特征函数为

$$\varphi_{nm}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(nx)\sin(mt), & n\in\mathbb{N},\quad m\in\mathbb{Z}^+,\\ \dfrac{1}{\pi}\sin(nx), & n\in\mathbb{N},\quad m=0,\\ \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\sin(nx)\cos(mt), & n\in\mathbb{N},\quad -m\in\mathbb{Z}^+.\end{cases}$$

易见 $\lambda=0$ 所对应的特征子空间是无穷维的.

(IV) 均匀梁的横向运动方程为

$$u_{tt}+c^2u_{xxxx}=0. \tag{1.1.9}$$

(g) 考虑带周期边值条件的梁方程的线性特征值问题

$$\begin{cases}u_{tt}+u_{xxxx}-\lambda u=0,\\ u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0,\\ u(0,x)=u(2\pi,x).\end{cases} \tag{1.1.10}$$

定义 $L_7:D(L_7)\subset L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$，

$$L_7u=u_{tt}+u_{xxxx},\qquad \forall u\in D(L_7),$$

其中，$D(L_7)=\{u\in L^2(Q)\mid \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ n\in\mathbb{N}}}(n^4-m^2)^2|C_{mn}|^2<+\infty\}$（注：$\forall u\in L^2(Q)$ 可 Fourier 展开成

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}C_{jk}\mathrm{e}^{ijt}\sin kx,\qquad \sum_k\sum_j|c_{jk}|^2<\infty),$$

则 L_7 是一个自伴算子，且 L_7 的特征值集为

$$\{n^4-m^2\mid m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\}.$$

易见 L_7 的特征值 $\lambda=0$ 所对应的特征子空间是无穷维的.

(h) 如果当时间充分大时，均匀梁的横向运动趋于稳态. 这时(1.1.9)相应地退化为一个与 t 无关的方程

$$u_{xxxx}=0. \tag{1.1.11}$$

考虑带边值条件的弯曲梁方程的线性特征值问题

$$\begin{cases}u_{xxxx}-\lambda u=0,\\ u(0)=u(\pi)=u''(0)=u''(\pi)=0.\end{cases} \tag{1.1.12}$$

定义线性算子 $L_9: D(L_9)\subset L^2(0,\pi)\to L^2(0,\pi)$,

$$L_9 u=u_{xxxx},\qquad \forall\, u\in D(L_9),$$

其中,

$$D(L_9)=\left\{u\in L^2(0,\pi)\,\middle|\,\begin{array}{l}u,\dot u,\ddot u,\dddot u \text{ 在}[0,\pi]\text{上绝对连续}, u^{(4)}\in L^2(0,\pi),\\ u(0)=u(\pi)=\ddot u(0)=\ddot u(\pi)=0\end{array}\right\},$$

则 L_9 的特征值为 $\lambda_N=N^4$ ($N=1,2,\cdots$). λ_N 所对应的特征子空间为 $\mathrm{span}\{\sin Nx\}$.

注 1.1.1　除了以上几类特征值问题外,在第 5 章,还将讨论下列两类特征线问题:

(i)

$$\begin{cases}\ddot u+\lambda_+ u^+-\lambda_- u^-=0,\\ u(0)=u(\pi)=0,\end{cases} \tag{1.1.13}$$

其中,$u^+=\dfrac{1}{2}(|u|+u)$,$u^-=\dfrac{1}{2}(|u|-u)$.

(j)

$$\begin{cases}u^{(4)}+\alpha\ddot u-\beta u=0,\\ u(0)=u(1)=\ddot u(0)=\ddot u(1)=0.\end{cases} \tag{1.1.14}$$

(1.1.13)不再是线性问题了,(1.1.13)和(1.1.14)可分别看成是(1.1.3)和(1.1.12)的推广.

1.1.2　Fredholm 二择一性质

设 X 和 Y 都是赋范线性空间. 映射 $T:X\to Y$ 称为紧的(或全连续的),如果 T 把 X 中的有界集映成 Y 中的相对紧集,或等价地,T 把 X 中的有界序列映为 Y 中含有收敛子列的序列. Fredholm 二择一性质(或称 Riesz-Schauder 原理)涉及空间 X 到自身的紧线性算子,并且是有限维空间线性映射理论的一个推广.

定理 1.1.1　设 T 是赋范线性空间 X 到自身中的一个紧线性映射. 那么,或者

(i) 齐次方程

$$x-Tx=0$$

有非平凡解 $x\in X$,或者

(ii) 对每个 $y \in X$,方程

$$x - Tx = y$$

有唯一确定的解 $x \in X$. 而且在情形(ii),已断定其存在性的算子$(I-T)^{-1}$也是有界的.

证明略. 参见文献[1].

在 1.1.1 小节中讨论了几类特殊的线性算子的特征值和特征函数. 一般地,设 $T: X \to X$ 为紧线性算子,如果 X 中存在非零元 x 满足 $Tx = \lambda x$,就称 λ 为 T 的特征值. 很明显,属于不同特征值的特征向量必然是线性无关的. 算子 $S_\lambda = \lambda I - T$ 的零空间的维数称为 λ 的重数. 如果 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \in \mathbb{R}$ 不是 T 的特征值,从定理 1.1.1 推出,预解算子 $R_\lambda = (\lambda I - T)^{-1}$ 是有明确定义的、把 X 映到自身的有界线性映射.

如下结果刻画了赋范线性空间到自身的紧线性映射的特征值集的特性.

定理 1.1.2 赋范线性空间到自身中的紧线性映射 T 的特征值全体构成一个可数集. 这个集合除 $\lambda = 0$ 可能例外外,没有别的极限点. 每一非零特征值均有有限的重数.

证明略. 参见文献[1].

定理 1.1.2 可以帮助我们进一步理解 1.1.1 小节中的结果.

例 1.1.1 设 Ω 是一个具有足够光滑边界的区域. 考虑线性特征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

定义线性算子 $L: D(L) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$,

$$Lu = -\Delta u, \qquad \forall u \in D(L),$$

其中,$D(L) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$,则 L 为自伴算子. 因 L 正定,从而 $\widetilde{K} \triangleq L^{-1}$ 存在.

由 Poincaré 不等式:

$$\left| \int_\Omega u \cdot v \right| \leqslant C \left(\int_\Omega |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{W_0^{1,2}}, \quad \forall u \in L^2(\Omega), \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

及 Riesz 表示定理,存在有界线性算子 $K: L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$,使得

$$\int_\Omega u \cdot v = (Ku, v)_{W_0^{1,2}}, \qquad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

其实这个 K 就是 $\widetilde{K} = L^{-1}$,这是因为

$$\int_\Omega u \cdot v = \int_\Omega -\Delta \widetilde{K} u \cdot v = \int \nabla \widetilde{K} u \cdot \nabla v = (\widetilde{K} u, v)_{W_0^{1,2}}.$$

于是 K 作为 $W_0^{1,2}(\Omega)$ 到自身的自伴紧算子有谱 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n \geqslant \cdots \to 0$. 由此可见,$L = -\Delta$ 有谱 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots \to +\infty$,其中,$\lambda_i = \dfrac{1}{\mu_i}$,$i = 1, 2, \cdots$.