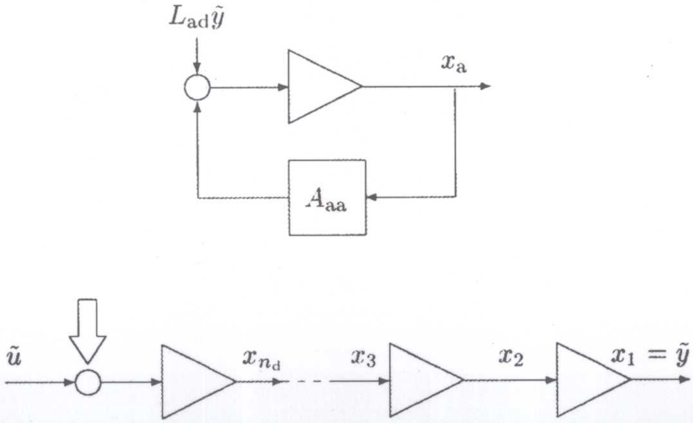
线性系统理论：
结构分解法

Linear Systems Theory:
A Structural Decomposition Approach



Ben M. Chen， Zongli Lin， Yacov Shamash
陈本美　林宗利　雅科夫·司马诩　著

席　斌　译

清华大学出版社

线性系统理论：结构分解法

Linear Systems Theory: A Structural Decomposition Approach

Ben M. Chen， Zongli Lin， Yacov Shamash
陈本美 林宗利 雅科夫·司马诩 著

席 斌 译

清华大学出版社
北京

北京市版权局著作权合同登记号　图字：01-2007-2423

Translation from the English language edition:

Linear Systems Theory: A Structural Decomposition Approach, by Ben M. Chen, Zongli Lin and Yacov Shamash

图书在版编目(CIP)数据

线性系统理论：结构分解法/(新加坡)陈本美，(美)林宗利，(美)司马诩著；席斌译. —北京：清华大学出版社，2008.2

书名原文：Linear Systems Theory: A Structural Decomposition Approach

ISBN 978-7-302-16367-1

Ⅰ.线…　Ⅱ.①陈…②林…③司…④席…　Ⅲ.线性系统理论　Ⅳ.O231.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 168920 号

责任编辑：王一玲
责任校对：白　蕾
责任印制：孟凡玉
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　　**客户服务**：010-62776969
印 刷 者：清华大学印刷厂
装 订 者：三河市溧源装订厂
经　销：全国新华书店
开　本：175×245　**印　张**：22.25　**字　数**：479 千字
版　次：2008 年 2 月第 1 版　　**印　次**：2008 年 2 月第 1 次印刷
印　数：1～3000
定　价：39.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：025697-01

此书谨献给我们的家人

前两位作者谨以这中译版献给
他们的母校——厦门大学

序

在控制理论的学科领域，线性系统理论是一门发展最为成熟和研究最为充分的分支学科。线性系统理论，以其学科上的最具基础性、体系上的最具系统性和应用上的最具实用性，长期以来始终在控制理论的教学与研究中处于重要的位置。随着所采用的分析工具和所采用的系统描述的不同，在线性系统理论中相继创立和形成了影响较大和各具特色的几个分支，包括“线性系统的状态空间法”、“线性系统的几何理论”、“线性系统的代数理论”和“线性系统的多变量频域方法”等，通常认为它们以不同的研究工具和方法构成了线性系统理论中的几个主要学派。陈本美(Ben M. Chen)等三位教授的这本著作的英文版《Linear Systems Theory: A Structural Decomposition Approach》在 2004 年由 Birkhäuser 出版社出版，本书的出版可以说意味着线性系统理论中一个新分支或新学派“线性系统的结构分解法”的面世和形成。

本书的核心内容是对线性系统引入和应用一种特定的和巧妙的系统结构变换，使之对系统结构实现按“有限零点结构、左右可逆结构以及无限零点结构”的全面分解，并基此系统地建立和发展了分析和综合线性系统的较为完整的方法，论述严谨详细，方法统一实用，尽管表达形式看起来会比较复杂一些，但全书注重突出各个变换阵的构造原则和构造方法，使相应部分的内容仍然具有很好的可读性和可理解性。这种结构分解法之所以有效和重要，就在于它能提供实际的可能性和方便的手段，使可以同时从结构上有效地研究线性控制系统的稳定性、性能和鲁棒性，本书的内容充分表明这种系统结构分解法在适用领域上的广泛性和系统分析与综合上的方便性。一个明显的例子是，如本书中的定理 10.2.2 所揭示的那样，在这种结构分解架构下，可以简单明了地揭示出先前被分别独立研究的 H_2 控制和 H_∞ 控制以及扰动解耦控制之间的内在关系。尽管本书的框架总体上仍然是建立在线性系统的状态空间描述的基础上的，但相比于线性系统理论的已有学派，如“线性系统的状态空间法”、“线性系统的几何方法”、“线性系统的多变量频域方法”等，“线性系统的结构分解法”具有方法统一性、工程直观性和易于在计算机上实现计算等重要优点。

本书的框架、内容和体系大都源自于作者及其合作者多年来在本领域的持续研究结果。还是在陈本美教授 20 世纪 80 年代末在华盛顿州立大学攻读博士学位期间，他就已经注意到对线性系统的这种特定的和巧妙的系统结构变换，为此开发了相应的软件工具箱，开始了“线性系统的结构分解法”的研究，并将这种方法开创性地拓展应用到其他控制领域，如 H_2 控制和 H_∞ 控制等。我和陈本美教授相识于 1993 年上半年，那时他刚刚在纽约州立大学石溪分校电机系任教不久，而我恰正好是第二次去该系从事访问研究，他的为

人豪爽仗义和为学严谨朴实给我很深的印象，于是就此相识、相知，并从此建立了深厚的友谊，即便不久他出于朴素的感情转去新加坡国立大学任教后，彼此之间也一直保持着紧密的联系。也正是从那个时候起，我开始知道和了解了线性系统的这种特定的和巧妙的系统结构变换，并开始认识到这种特定系统结构变换在应用领域上的广泛性和系统分析综合上的有效性。2003 年初，陈本美等三位教授完成了本书英文版的手稿，并邀请我对书稿进行审读。我对此书的体系和方法很是欣赏和振奋，除提了一些细节性的意见和建议外，最为令人高兴的一个直觉是这或许意味着线性系统理论中一个新分支或新学派“线性系统的结构分解法”的形成。现在，在陈本美教授的直接指导下，本书的中文版得以高质量地翻译完成并顺利出版，使得更多的国内同行和读者能有机会认识和使用线性系统的这种特定的和巧妙的系统结构变换，认识和使用线性系统的结构分解法，感受这种系统结构分解法在适用领域上的广泛性和系统分析与综合上的方便性，并还将由此吸引更多研究者的参与，以推动这种方法的进一步发展与开拓。我想，这也必将是出版本书中文版所会激发的效应，而这想必同时也正是本书的三位作者们所期望的。

在本书中文版出版之际，作为本书第一作者和我多年好友的陈本美教授，一再嘱咐我务必为本书中文版写一个序，我自知才疏学浅，推辞未果，思考再三，权且写成上面一些文字以为序。

郑大钟　教授

2007 年 7 月于北京清华大学

前　言

系统的结构特性对我们理解以状态空间表示的线性系统起着重要作用。线性系统的结构化规范形表示不仅揭示了系统的结构特性，而且能使各种反馈控制策略的设计更为便利。具体地说，结构化规范形将系统分解成各种子系统，这些子系统以及它们之间存在的相互内在联系清晰地显示了系统的结构特性。子系统的简洁性和相互之间的显式连接，使我们能够更深入地理解反馈控制对整体控制系统所产生的作用，从而能够清晰地构造满足设计目标的反馈律。系统结构化规范形在反馈控制设计中的应用及研究已有相当长的历史。近来，结构分解的优点已经非常广泛和深入地应用在非线性系统控制理论中。

本书的目的是系统地给出线性系统的各种规范分解、清晰地显示系统的不同结构特性、对在系统分析和设计方面应用的最新进展情况进行综述。我们所考虑的系统将包括自治系统，它的内在特性完全由代表其动态特性的矩阵决定；无驱动或无检测系统，它的内在特性由一对矩阵确定，一个是代表内部动态的矩阵，另一个是测量或控制矩阵；还有正则系统，它的内在特性由一个矩阵三元组或矩阵四元组来决定。我们也将考虑线性奇异系统，它的结构特性由一个矩阵五元组决定。所有的结果都分别以连续时间和离散时间形式给出。同时，也建立在双线性变换下连续时间系统和离散时间系统的结构特性之间的相互关系。

本书面向的读者包括研究生、从事控制应用的工程师，以及系统和控制工程相关领域的研究人员。在本书的撰写过程中，我们力图达到自成一体。所以，在本书的开始部分，全面回顾了从矩阵理论到线性系统理论的各种主题。尽管如此，读者还是需要些线性代数、线性系统和控制理论的基础知识。

前两位作者要对已故的华盛顿州立大学教授 Chin S. Hsu 表达深深的谢意，作者在华盛顿州立大学求学时得到了他的热心帮助，他的线性系统理论课程生动且有趣。第 3 章的一些练习题就是来自于他所布置的课后练习和测试题。前两位作者还要感谢华盛顿州立大学的 Ali Saberi 教授和美国新泽西州罗特格斯大学的 Pedda Sannuti 教授，作者在华盛顿州立大学攻读博士学位期间得到了他们的严谨指导，是他们把我们引入了线性系统特殊坐标基(SCB)理论，这是本书的关键部分。第三位作者要感谢 Ali Saberi 教授，是他把作者引入了这个研究方向并且有早期的合作。第一位作者要特别感谢 Pedda Sannuti 教授在撰写科学专著方面所给予的无价指导。第二位作者还要感谢北京控制工程研究所的严拱添老师，他对作者在矩阵理论和线性系统理论方面进行了严格的训练。

新加坡国立大学的刘新民先生为本书的 MATLAB 工具箱的完成做出了贡献，清华大学郑大钟教授在书稿的校正方面提供了帮助，我们谨表万分谢意。我们还要感谢新加

坡国立大学的储德林教授、彭可茂博士、程国杨博士、何英杰博士和何明华博士。我们和新加坡国立大学的李崇兴教授、美国得克萨斯州阿灵顿得克萨斯大学的 Frank L. Lewis 教授、澳大利亚墨尔本大学的 Iven Mareels 教授、加拿大西蒙弗雷泽大学的 Mehrdad Saif 教授有过许多有益的学术讨论，在此表示感谢。感谢新加坡国立大学、弗吉尼亚大学、纽约州立大学石溪分校为我们各自的基础研究工作提供了优越的环境。

系列丛书的主编 William S. Levine 教授对我们完成这本书给予了热情的鼓励。我们还要感谢 Birkhäuser 的编辑们，特别是 Thomas Grasso 先生和 Seth Barnes 先生对我们的编辑工作所提供的宝贵帮助。

最后，我们要强调，书中所包括的每个算法都已经包含在 MATLAB 环境下的线性系统工具箱中。读者可以在 http://linearsystemskit.net（或 http://hdd.ece.nus.edu.sg/~bmchen/）上得到工具箱的 beta 版本。这个工具箱将极有助于理解书中各种分析和设计算法的应用。对于那些已经有早期版本的有兴趣的读者，即由 Chen（1988）[17]、Lin（1989）[84]和 Lin 等（1991）[90]所报道的特殊坐标基（SCB）实现软件，我们建议更新到最新版的工具箱。特殊坐标基（SCB）是本书所包括的结构化分解技术之一，新版的工具箱是基于 Chu 等（2002）[36]最近发表的更加稳定的数值计算方法，以及本书中所介绍的新方法来实现的。

本书是作者采用 LATEX 排版。所有的仿真和数值计算由 MATLAB 完成。插图则由 LINUX 中的 XFIG 和 MATLAB 中的 SIMULINK 所生成的。

陈本美，新加坡肯特冈
林宗利，美国弗吉尼亚州夏城
雅科夫·司马诩，美国纽约州石溪
2004 年 6 月

目　录

第1章 导论和预览

1.1 背景

线性系统的状态空间表示是动态系统分析和设计的基础，现代控制理论就建立在系统的状态空间这个概念的基石之上，状态空间可以很好地揭示动态系统的本质特性。自从引入状态的概念以后，在状态空间的框架下对线性系统的研究就一直非常活跃，研究主题涵盖甚广，从稳定性、可观性、可控性、冗余性和最小性等系统基本概念，到更为精细的有限和无限零点结构、可逆性和几何子空间。对线性系统的深层次理解促进了现代控制理论的发展，反过来，对现代控制理论的迫切期待则要求我们了解和应用线性系统中更微妙的特性。

线性系统理论的重要性，以及与此相关的活跃研究可以从持续不断出版的线性系统理论教科书和专著中得到佐证，如 Kalman 和他的合作者[66,71-73]，Gilbert[58]，Zadeh 和 Desoer[157]所发表的有关状态空间的可控性、可观性和稳定性及其相关主题的经典著作。Naidu[103]最近对在各个不同时期出版的线性系统理论书籍进行了全面的述评。在 20 世纪 60 和 70 年代出版的几本早期著作是 DeRusso 等(1965)[47]，Ogata(1967)[104]，Brockett(1970)[14]，Chen(1970)[32]，Rosenbrock(1970)[112]，Blackman(1977)[13]。对于 20 世纪 80 年代以来的线性系统理论，比较新的著作有 Kailath(1980)[70]，McClamroch(1980)[98]，Chen(1984)[33]，DeCarlo(1989)[46]，Sontag(1990)[132]，Antoulas(1991)[3]，Callier 和 Desoer(1991)[16]，Rugh(1996)[114]，Antsaklis 和 Michel(1997)[4]，DeRusso(1998)[48]，Sontag(1998)[133]，Bay(1999)[10]，Chen(1999)[34]，Aplevich(2000)[5] 和 Trentelman 等(2001)[141]。

这些书采用不同的方法呈现了线性系统理论的基本要素和反映该领域的最新进展，而本书是采用结构分解的方法研究线性时不变系统。结构分解并不是一个新的概念，在现有的许多线性系统理论教科书中都可以找到多种结构分解。状态空间表示下的线性时不变系统的基本特性都可以用系数矩阵来表述，如稳定性、可控性和可观性。对于一个可控的系统，控制信号在内部如何到达系统的不同部分，就可用可控性指数来表示。可控性指数是一个在状态变换下保持不变的结构特性。选择适当的状态变换，就可以把系统表示成所谓的可控规范形。在此规范形下，可控性指数便一目了然，镇定的反馈控制律的设计也相当直截了当。可控规范形的表示就是一种结构分解，它揭示了系统的可控性指数。

在线性系统理论教科书中还能找到其他的结构分解的例子，包括可观规范形（揭示了可观性指数）和 Kalman 分解（揭示系统可控和可观模态）。

上面的结构化分解方法在状态观测和镇定方面显示了很好的功效。然而，当对控制问题的研究不局限在镇定和状态观测时，我们需要更深入地了解比可控性和可观性更加精细的结构特性，如有限零点结构、无限零点结构及系统可逆性结构等。此类精细特性和 H_2 与 H_∞ 的最优控制理论密切相关，所以线性系统的各种结构化特性以及它们在控制系统分析和设计中的应用必然引起人们的很大研究兴趣。正因如此，我们有必要简单回顾一下线性系统结构分解技术的发展历史。就我们所知，首先在动态系统中应用结构分解概念解决除稳定性以外问题的是研究高增益和低成本（Cheap）控制问题（见 Sannuti[121]）。Sannuti[121] 在讨论高增益和低成本控制的重要特性时，通过分离我们所知道的一致秩（uniform rank）及系统的有限和无限零点结构，证明了利用特殊坐标基（SCB）这样一种分解方法的优越性。后来，Sannuti 和 Wason[123] 把特殊坐标基（SCB）的概念推广到了一般的可逆系统，并建立了和多变量根轨迹理论的重要联系。通过利用并改进 Silverman[131] 的结构算法，Sannuti 和 Saberi[122]，Saberi 和 Sannuti[119] 奠定了一般线性多变量系统特殊坐标基（SCB）的概念。特殊坐标基（SCB）在结构上与 Aling 和 Schùmacher[2] 的九重规范分解十分相似，两者都可辨别出系统的重要特性，如几何控制理论中的子空间及其相关的特性以及 Morse[100] 指数。然而，在文献[122,119]的原文中，关于特殊坐标基（SCB）的所有特性并没有给出详细的证明。Chen[21] 最近完善了该理论，在一般严格和非严格正则系统特殊坐标基（SCB）的框架下，文献[21]对所有特殊坐标基（SCB）的特性都进行了严格的证明。最近，He 和 Chen[64]，He、Chen 和 Lin[65] 进一步把该技术推广到奇异系统。在过去的几年中，我们和我们的合作者一起对结构特性进行了系统的研究，并且展示了结构分解在解决大量控制问题中的应用。我们在线性系统和控制理论方面的研究结果虽已自成一体，但大多散落在诸多不同的文献之中，本书的目的是把这些成果聚集在一起，统一在同一框架之下。

1.2 各章预览

本书共分 12 章，可以划分为 3 个部分。第 1 部分是第 1 章～第 3 章，涉及本书所需的背景材料，即线性系统理论的基础内容。第 1 章是本书的导论，同时也给出本书所用的符号和术语，第 2 章汇集了矩阵理论的一些基本结果，第 3 章总结了线性系统理论的基本结论。第 2 章和第 3 章一起构成了本书所需的背景材料。

本书的第 2 部分是第 4 章～第 7 章，我们给出了连续时间和离散时间线性系统的各种结构分解，在结构分解的基础上研究了系统各种复杂的特性。具体地说，第 4 章给出了无驱动和/或无检测系统的结构分解。对于既无驱动又无检测的系统，即自治系统，结构

特性主要集中在系统稳定性上，它包括了稳定性结构分解(SSD)，即系统被分解成稳定和不稳定动态以及和虚轴极点相关联的动态，和实 Jordan 分解(RJD)。和书中其他的分解一样，我们始终突出分解方法的数值稳定性。对于无驱动系统，将给出两种结构分解，即可观结构分解(OSD)和块对角可观结构分解(BDOSD)。对于无检测系统，我们也可以对偶地给出两种分解，即可控性结构分解(CSD)和块对角可控性结构分解(BDCSD)。无驱动和/或无检测系统的这些分解在控制系统中得到了许多应用，包括在第 9 章中讨论的传感器/执行器的配置问题。

第 5 章和第 6 章分别是对正则线性系统和奇异系统的结构分解。正则线性系统结构分解的核心是由 Sannuti 和 Saberi[122]提出的特殊坐标基(SCB)。对于严格正则系统，特殊坐标基(SCB)与 Aling 和 Schumacher[2]提出的九重规范分解基本类似。这些结构分解展示了线性系统的各种结构特性，包括有限和无限零点结构、系统可逆性和几何子空间。正则系统的结构分解在解决许多控制问题中发挥了很大的作用，包括在第 8 章～第 11 章提出的一些控制问题。同样，我们相信，第 6 章有关奇异系统的结构分解，在奇异系统的控制问题中也将发挥相似的作用。

第 7 章研究了在双线性变换下的系统结构特性。双线性和逆双线性变换被广泛应用在数字控制和信号处理中，在解决 H_∞ 控制问题时也发挥了重要作用。实际上，工程中的许多问题，包括采样控制系统设计和数字信号处理，都需要进行连续时间到离散时间模型的转换。因此有大量离散化方法，包括零阶和一阶保持器的输入近似、脉冲不变变换和双线性变换。在这一章中，我们将以清晰和易于理解的方式给出在双线性(逆双线性)变换下，一般的连续时间系统(离散时间系统)的结构特性是如何变换到离散时间系统(连续时间系统)下的，即有限和无限零点结构、可逆结构以及几何子空间之间的变换。

本书的余下部分是第 4 章～第 7 章中的结构分解在线性控制系统分析和设计中的几个应用。

第 8 章给出了一般线性系统的两种系统因子分解的算法，一个是最小相位和全通串级因子分解，众所周知的内外因子分解是它的一个特例；另一个是广义串级因子分解。这些因子分解在电气工程的许多领域都有重要的应用，包括系统和控制分析与设计。特别是最小相位和全通串级因子分解，把一个非最小相位和非左可逆的系统分解成一个具有最小相位左可逆的系统与一个具有单位增益的、稳定的全通系统的串联。我们的算法表明，对于一个给定系统，一旦对它采用了第 5 章的结构分解，就可以轻而易举地得到这些串级因子分解，其中包括内外因子分解。

第 9 章研究了对于一个给定的线性系统进行结构特性配置的可能性，导出了可以产生各种结构特性的传感器矩阵集合。众所周知，把 H_2 和 H_∞ 这些多变量控制系统综合技术应用到实际中去的一个主要困难，是对控制性能和实际实施之间的联系缺乏研究，包括硬件的选配，如选择能够满足鲁棒性和控制性能要求的传感器。这种联系提供了在控制对象设计初始阶段就可以进行各种权衡的基础，因此人们可以尽早地把精心的控制设

计融合到全面的工程设计中。

第 10 章研究了渐进时标配置问题。基于一个给定系统的结构分解，我们给出一个系统化的反馈律设计方法，使得闭环系统具有预先设定的特征结构。这个时标配置的关键在于充分利用了系统结构分解所得到的各种子系统，正如结构分解所揭示的那样，这些子系统代表了系统的有限和无限零点结构，以及可逆结构。诸多成果表明，时标配置技术对许多现代控制问题，如 H_∞ 控制、H_2 控制、回路传递函数恢复和干扰解耦问题起着至关重要的作用。

第 11 章论证了在静态测量输出反馈下的干扰解耦问题(包括有或没有内稳定的情况)。过去 30 年来，很多学者对干扰解耦问题已经有了很深入的研究，也由此推动了几何方法在线性系统和控制理论中的应用，在一些重要问题中，如分散(decentralized)控制、非交互(noninteracting)控制、模型参考跟踪控制和 H_∞ 控制中扮演了关键的角色。对于定常或静态测量输出反馈下的干扰解耦问题，文献所载甚少。借助于系统的结构分解，这一章推导了在静态测量输出反馈下，干扰解耦问题的可解性条件，对于从控制输入到被控输出具有左可逆传递函数的一类系统，我们给出了所有可能的解。对于一般的系统，根据第 5 章的结构分解技术，我们先从给定的系统得到不可简约的降阶系统，然后再导出静态测量输出反馈下干扰解耦问题的解。

第 12 章包括了实现本书所有分析和设计算法的 MATLAB 工具箱。该工具箱的 beta 版本可在 http://linearsystemskit.net 或 http://hdd.ece.nus.edu.sg/～bmchen/上免费下载。

1.3 符号和术语

全书将采用以下符号和术语：

$\mathbb{R}$:=实数集合，

$\mathbb{R}_+$:=非负实数的集合，

$\mathbb{N}$:=自然数的集合，即 0,1,2,…

$\mathbb{C}$:=整个复平面，

$\mathbb{K}$:=和一个矢量空间相关联的标量域，

$\mathbb{C}^\circ$:=复平面上的单位圆，

$\mathbb{C}^\odot$:=在单位圆内的复数集合，

$\mathbb{C}^\otimes$:=在单位圆外的复数集合，

$\mathbb{C}^0$:=复平面上的虚轴，

$\mathbb{C}^-$:=开左半复平面，

$\mathbb{C}^+$:=开右半复平面,

$\operatorname{Re}\alpha$:=标量 $\alpha\in\mathbb{C}$ 的实部,

$\operatorname{Im}\alpha$:=标量 $\alpha\in\mathbb{C}$ 的虚部,

α^* :=标量 $\alpha\in\mathbb{C}$ 的复共轭,

0 :=零标量、零矢量或零矩阵,

$\varnothing$:=空集合,

I :=具有一定维数的单位矩阵,

I_k :=$k\times k$ 的单位矩阵,

$\operatorname{diag}\{\cdots\}$:=对角矩阵,

$\operatorname{blkdiag}\{\cdots\}$:=块对角矩阵,

$X=[x_{ij}]$:=元素为 x_{ij} 的矩阵 X,

X' :=矩阵 X 的转置,

X^{H} :=矩阵 X 的共轭转置,

$\det(X)$:=矩阵 X 的行列式,

$\operatorname{rank}(X)$:=矩阵 X 的秩,

$\operatorname{normrank}(X)$:=有理矩阵 X 的常态秩,

$\operatorname{trace}(X)$:=矩阵 X 的迹,

$\operatorname{cond}(X)$:=矩阵 X 的条件数,

$X^\dagger$:=矩阵 X 的 Moore-Penrose(伪)逆,

$\lambda_i(X)$:=矩阵 X 的第 i 个特征值,

$\lambda_{\min}(X)$:=$\lambda(X)\subset\mathbb{R}$ 的矩阵 X 的最小特征值,

$\lambda_{\max}(X)$:=$\lambda(X)\subset\mathbb{R}$ 的矩阵 X 的最大特征值,

$\lambda(X)$:=矩阵 X 的特征值集合,

$\rho(X)$:=矩阵 X 的谱半径,

$\sigma_i(X)$:=矩阵 X 的第 i 个奇异值,

$\sigma_{\min}(X)$:=矩阵 X 的最小奇异值,

$\sigma_{\max}(X)$:=矩阵 X 的最大奇异值,

$\operatorname{im}(X)$:=矩阵 X 的像或值域空间,

$\ker(X)$:=矩阵 X 的核或零空间,

$\mathcal{X}$:=矢量空间或子空间,

$\dim(\mathcal{X})$:=子空间 $\mathcal{X}$ 的维数,

$\mathcal{X}^\perp$:=子空间 $\mathcal{X}$ 的正交补空间,

$C^{-1}\{\mathcal{X}\}$:=子空间 $\mathcal{X}$ 在映射 C 下的逆像,