



读考研书 找人大社

2009 年考研 数学 经典讲义 (理工类)

主编 黄先开 曹显兵
简怀玉 刘喜波

● 一线名师授课底本 ● 经典讲解全新奉上

全面解析大纲考试内容与考试要求，清晰明确，一目了然
总结重要公式与结论，帮助考生常记不忘
归纳典型题型讲解内容，例题分析、详解、评注环环相扣
每讲配精编习题，有针对性地演练、温习

中国人民大学出版社



2009 年考研数学 经典讲义(理工类)

► 主 编 黄先开 曹显兵
简怀玉 刘喜波

正版
查询及
服务
程序



← 刮 开 涂 层



← 获取 20 位数字编码



← 上 www.1kao.net 注册



← 登录增值服务进免费课堂

2009

图书在版编目(CIP)数据

2009 年考研数学经典讲义. 理工类/黄先开等主编. 3 版
北京: 中国人民大学出版社, 2008
ISBN 978-7-300-07506-8

I. 2…
II. 黄…
III. 高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 010984 号

2009 年考研数学经典讲义(理工类)

主 编 黄先开 曹显兵 简怀玉 刘喜波

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242(总编室)

010-62511398(质管部)

010-82501766(邮购部)

010-62514148(门市部)

010-62515195(发行公司)

010-62515275(盗版举报)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.lkao.net> (中国 1 考网)

经 销 新华书店

印 刷 北京鑫霸印务有限公司

规 格 210mm×285mm 16 开本

版 次 2006 年 7 月第 1 版

2008 年 2 月第 3 版

印 张 42

印 次 2008 年 2 月第 1 次印刷

字 数 1 259 000

定 价 56.00 元

版权所有 侵权必究

印装差错 负责调换

郑重声明

黄先开、曹显兵、简怀玉、刘喜波教授主编的《考研数学经典讲义》系列图书，因其名师的底蕴、全面的内容、权威的解析，名副其实地成为全面、权威、实用的数学考研辅导书。

当前考研图书市场盗印盗销行为猖獗。盗版行为在侵害作者和出版者权益的同时，也因其印装粗劣、错漏百出，使考生蒙受金钱损失、精力损失，甚至误导考生，毁掉考生考研前程。

多年来，我们一直与盗版行为作着艰苦的斗争，并让一些盗版者受到了应有的处罚。今年，我们将进一步加大打击盗版的力度，并利用包括法律在内的一切手段，让盗版者受到严惩。

请广大考生认准以下防盗版特征：(1) 封面防伪标带 20 位密码网上注册查真伪。(2) 封面压有带人大出版社社标的压纹。

在以上措施的基础上，我们奉行以服务打击盗版，让买人大版图书的考生享受到实实在在的服务。今年我们将继续为购书考生提供网上增值服务，详情请及时登录中国 1 考网 (www.1kao.net) 查询。

为保障您和您尊敬的老师的合法权益，请将您掌握的盗版者信息及时提供给我们。

举报电话：010-62515275

编辑电话：010-62511915

电子邮箱：1kao2005@163.com

中国人民大学出版社授权律师

北京市洪范广住律师事务所

徐波

2008 年 2 月

全面提高 获取高分

数学在研究生入学考试中分值之高，使其对于考研的成功与否起着至关重要的作用。对于考生而言，不仅要突破数学关，而且必须获取高分，而要获取高分，就必须下大工夫，全面提高。

黄先开、曹显兵等教授是在考生中广受赞誉的考研辅导名师，他们丰富经验所主编的这套《考研数学经典讲义》，分析考试大纲的内容与要求，总结重要公式与结论，归纳典型题型进行例题精讲，帮助考生理思路、抓重点、得高分。

数学复习是一项系统工程，在全面复习的同时，考生还需要根据不同阶段的不同需求有针对性地选用辅导书。可供选择的辅导图书有：

- 《考研历届数学真题题型解析（数学一）》
- 《考研历届数学真题题型解析（数学二）》
- 《考研历届数学真题题型解析（数学三）》
- 《考研历届数学真题题型解析（数学四）》
- 《2009 年考研数学最新精选 600 题（理工类）》
- 《2009 年考研数学最新精选 600 题（经济类）》
- 《2009 年考研数学经典冲刺 5 套卷（数学一）》
- 《2009 年考研数学经典冲刺 5 套卷（数学二）》
- 《2009 年考研数学经典冲刺 5 套卷（数学三）》
- 《2009 年考研数学经典冲刺 5 套卷（数学四）》

以上图书均由黄先开、曹显兵等教授主编。经过认真复习，我们相信您定可以轻松上阵，考取高分，圆考研名校梦。

新 翁

民 8 年 8002

前言

本书是作者根据最新全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编著的一本系统复习考研数学的参考书。它是以作者多年考研辅导讲稿为基础,结合作者对历年考题、命题趋势的研究以及数学的内在规律倾心编写而成的,目的是帮助广大考生在较短时间内系统复习好考研数学内容,取得优异成绩,并为今后研究生学习阶段打下坚实的数学基础,让数学伴随同学们走向人生的辉煌。

本书编写特点如下:

一、考试内容提要——对照最直接

明确考试内容与要求,才能有的放矢。本书在每章的第一节对最新考研大纲要求的基本概念、基本原理和基本方法都做了详尽的讲解,并指出注意事项。作者认为这对于考前进行全面、系统的复习是非常必要的。

二、重要公式与结论(补充注释与重要结论)——总结最完善

针对每一章中的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释,并归纳总结每一章的重要定理、公式和结论,特别是对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳总结。目的在于希望考生通过系统复习后,一见到此类问题,就能立刻联想到考题实际期望考查的是哪一方面的知识点,从而使考生站在一个更高的层次上去分析问题、解决问题,达到认识和理解的新境界。考生是否具备了这种能力,对考研能否取得成功和获得高分是至关重要的。

三、典型题型与例题分析——题型最丰富

对数学课程来说,题目是无穷的,但题型是有限的。作者通过精心编制和设计许多新题型,使得本书几乎囊括了考研数学所涉及的所有题型,并逐一进行分析,给出了解题方法和规律。另外,借助于许多重要经典例题的评注,本书能够帮助读者更好地把握典型例题的典型处理方法和各种可能的延伸,从而使读者能够举一反三、触类旁通。

四、习题精选与参考答案——选题最典型

要想真正掌握一门课程内容并通过相关考试,做一定数量的习题是必不可少的。为此,作者按照填空题、选择题和解答题的顺序对应各种题型选编了相当数量的习题,供读者模拟练习之用,希望读者尽可能独立地完成习题。

五、本书带“*”的内容,数学二考生不作要求

在成书过程中,作者参考了众多著作和教材,由于篇幅所限不能一一列出,在此谨向有关作者表示衷心感谢!

由于作者水平所限,书中一定还存在许多不足之处,敬请广大读者、同行专家批评指正。

作者

2008年2月于北京

目 录

第一部分

第一章 函数、极限与连续	3
§ 1 知识要点精讲	3
§ 2 重要公式与结论	16
§ 3 典型题型与例题分析	18
题型一 函数关系的建立	18
题型二 考查函数的特性	19
题型三 求函数极限	20
题型四 求数列极限	28
题型五 求解含参变量的极限	32
题型六 已知极限,求待定参数、函数值、 导数及函数	33
题型七 无穷小比较	35
题型八 判断函数的连续性与间断点的 类型	36
题型九 确定方程 $f(x) = 0$ 的根	38
题型十 综合题	39
习题精选一	41
习题精选一参考答案与提示	43
第二章 导数与微分	44
§ 1 知识要点精讲	44
§ 2 重要公式与结论	50
§ 3 典型题型与例题分析	51
题型一 利用导数定义解题	51
题型二 求分段函数的导数	54
题型三 导数在几何上的应用	56
题型四 变限积分求导	59
题型五 利用导数公式与运算法则 求导	62
题型六 综合题	65
习题精选二	67
习题精选二参考答案与提示	69

高等数学

第三章 微分中值定理与导数的应用	71
§ 1 知识要点精讲	71
§ 2 典型题型与例题分析	80
题型一 证明存在 ξ ,使 $f(\xi) = 0$	80
题型二 证明存在 ξ ,使 $f^{(n)}(\xi) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$)	82
题型三 证明存在 ξ ,使 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi), \dots) = 0$	84
题型四 直接用拉格朗日中值定理或 柯西中值定理证明	87
题型五 双介值问题,要证存在 ξ, η 使 $G(f'(\xi), f'(\eta), \dots) = 0$	89
题型六 证明存在 ξ ,使得 $f^{(n)}(\xi) = k(k \neq 0)$	90
题型七 有关介值的不等式证明	91
题型八 隐含介值问题	92
题型九 不等式的证明	94
题型十 利用导数证明函数恒 等式	104
题型十一 利用导数判别函数的 单调性	105
题型十二 利用导数研究函数的极值与 最值	106
题型十三 曲线的凹凸性与拐点	107
题型十四 求曲线的渐近线	108
题型十五 函数作图	108
题型十六 求曲率与曲率半径	110
题型十七 综合题	110
习题精选三	112
习题精选三参考答案与提示	114
第四章 一元函数积分学	116
§ 1 知识要点精讲	116

§ 2 重要公式与结论	134
§ 3 典型题型与例题分析	135
题型一 计算不定积分	135
题型二 不定积分综合题	139
题型三 有关定积分的概念与性质的 问题	143
题型四 利用基本方法(牛顿-莱布尼茨 公式,换元积分法,分部积分法) 计算定积分	145
题型五 对称区间上的积分	149
题型六 涉及变限积分的问题	150
题型七 定积分循环计算法	154
题型八 几类特殊积分问题	154
题型九 反常(广义)积分的计算	158
题型十 定积分等式的证明	161
题型十一 定积分不等式的证明	163
题型十二 定积分的几何(物理)应用 ..	166
题型十三 综合题	170
习题精选四	175
习题精选四参考答案	178

* 第五章 向量代数与空间解析

几何

§ 1 知识要点精讲及主要公式 与结论	180
§ 2 典型题型与例题分析	185
题型一 与向量代数有关的计算 问题	185
题型二 求平面与直线方程	185
题型三 讨论平面与直线的位置 关系	187
题型四 求对称点、投影点及投影 曲线	188
题型五 综合题	189
习题精选五	190
习题精选五参考答案	190

第六章 多元函数微分学

§ 1 知识要点精讲及主要公式 与结论	191
§ 2 典型题型与例题分析	198
题型一 基本概念题	198
题型二 求复合函数的偏导数或	

全微分	201
题型三 求隐函数的偏导数或 全微分	202
题型四 已知偏导数,反求函数 关系	205
题型五 多元函数的极值和最值 问题	206
* 题型六 求多元函数的梯度或 方向导数	211
* 题型七 多元函数微分学的几何 应用	212
题型八 综合题	213
习题精选六	214
习题精选六参考答案	216

第七章 重积分

§ 1 知识要点精讲	217
§ 2 重要公式与结论	223
§ 3 典型题型与例题分析	224
题型一 考查二重积分的基本概念与 性质	224
题型二 二重积分的基本计算方法	225
题型三 利用重积分的对称性 简化计算	228
题型四 交换积分次序	229
题型五 分区域函数的二重积分	230
题型六 反常(广义)二重积分	232
* 题型七 直角坐标系下计算三重积分 (适用于方形区域)	233
* 题型八 利用“先二后一”法(适用于 旋转体类型的区域)	233
* 题型九 利用柱面坐标(适用于区域 含柱形体的情形)	234
* 题型十 利用球面坐标(适用于区域 含球形的情形)	234
题型十一 综合题	234
习题精选七	238
习题精选七参考答案与提示	240

* 第八章 曲线、曲面积分

§ 1 知识要点精讲	241
§ 2 重要公式与结论	247
§ 3 典型题型与例题分析	249

题型一	对弧长的曲线积分的计算	
	方法	249
题型二	对坐标的曲线积分的计算	
	方法	250
题型三	对面积的曲面积分的计算	
	方法	254
题型四	对坐标的曲面积分的计算	
	方法	255
题型五	求曲面的面积	259
题型六	求向量场的散度及旋度	260
题型七	综合题	261
	习题精选八	263
	习题精选八参考答案与提示	265
*第九章	无穷级数	267
§1	知识要点精讲	267
§2	重要公式与结论	274
§3	典型题型与例题分析	275
题型一	判定常数项级数的收敛性	275
题型二	求函数项级数的收敛域、幂级数的收敛半径和收敛区间	278
题型三	求常数项级数的和及函数项	

第二部分

第一章	行列式	319
§1	知识要点精讲	319
§2	难点、疑点解析及重要公式与结论	322
§3	典型题型与例题分析	325
题型一	利用行列式的性质与行(列)展开定理计算行列式	325
题型二	按行(列)展开公式求代数余子式	326
题型三	利用多项式分解因式计算行列式	327
题型四	抽象行列式的计算或证明	327
题型五	n 阶行列式的计算	329
题型六	利用特征值计算行列式	334
题型七	综合题	335
	习题精选一	336
	习题精选一参考答案	338

	级数的和函数	281
题型四	幂级数的展开	282
题型五	傅里叶级数的展开	284
题型六	综合题	285
	习题精选九	287
	习题精选九参考答案与提示	289
第十章	常微分方程	290
§1	知识要点精讲	290
§2	基本方法	298
§3	典型题型与例题分析	300
题型一	可化为一阶线性微分方程的求解及全微分方程求解	300
题型二	可化为变量可分离微分方程的求解	302
题型三	可降阶的高阶微分方程	304
题型四	高阶线性微分方程和可化为二阶常系数线性微分方程的求解	305
题型五	综合题与应用题	307
	习题精选十	312
	习题精选十参考答案与提示	314

线性代数

第二章	矩阵	342
§1	知识要点精讲	342
§2	难点、疑点解析及重要公式与结论	349
§3	典型题型与例题分析	352
题型一	求数值型矩阵的逆矩阵	352
题型二	A 为抽象矩阵,讨论 A 的可逆性	355
题型三	考查矩阵运算的特殊性	356
题型四	解矩阵方程	358
题型五	求方阵 A 的高次幂 A^n	360
题型六	利用伴随矩阵 A^* 进行计算或证明	361
题型七	有关初等矩阵的问题	363
题型八	求矩阵的秩	364
题型九	综合题	366
	习题精选二	367

习题精选二参考答案	369
第三章 向量	373
§1 知识要点精讲	373
§2 难点、疑点解析及重要公式与结论	382
§3 典型题型与例题分析	384
题型一 判定向量组的线性相关性	384
题型二 把一个向量用一组向量线性表示	389
题型三 求向量组的秩	394
题型四 有关矩阵秩的命题	396
* 题型五 有关向量空间的基本概念题	397
题型六 综合题	398
习题精选三	400
习题精选三参考答案	402
第四章 线性方程组	404
§1 知识要点精讲	404
§2 难点、疑点解析及重要公式与结论	409
§3 典型题型与例题分析	410
题型一 基本概念题(解的判定、性质、结构)	410
题型二 含有参数的线性方程组的求解	412
题型三 抽象线性方程组求解	419
题型四 讨论两个方程组的公共解	421
题型五 讨论两个方程组解之间的关系	424
题型六 已知方程组的解,反求系数矩阵或系数矩阵中的参数	425
题型七 有关基础解系的讨论	427
题型八 有关 $AB = 0$ 的应用	429
题型九 综合题	430

* 第三部分

第一章 随机事件与概率	503
§1 知识要点精讲	503

习题精选四	436
习题精选四参考答案	438
第五章 特征值与特征向量	442
§1 知识要点精讲	442
§2 难点、疑点解析及重要公式与结论	447
§3 典型题型与例题分析	449
题型一 数值型矩阵特征值、特征向量的计算	449
题型二 计算抽象矩阵的特征值	451
题型三 特征值、特征向量的逆问题	454
题型四 矩形相似与对角化的讨论	457
题型五 有关实对称矩阵的命题	462
题型六 特征值、特征向量与相似矩阵的应用问题	464
题型七 有关特征值、特征向量的证明问题	468
题型八 综合题	469
习题精选五	474
习题精选五参考答案	476

第六章 二次型

§1 知识要点精讲	479
§2 难点、疑点解析及重要公式与结论	485
§3 典型题型与例题分析	486
题型一 基本概念题(二次型的矩阵、秩、正负惯性指数)	486
题型二 化二次型为标准形	487
题型三 有关正定二次型(正定矩阵)命题的证明	491
题型四 综合题	495
习题精选六	498
习题精选六参考答案	499

概率论与数理统计

§2 补充注释与重要结论	507
§3 典型题型与例题分析	510
题型一 事件的表示和运算	510

题型二	有关概率基本性质的命题	511
题型三	古典概型与几何概型的概率 计算	513
题型四	事件独立性的命题	516
题型五	条件概率与积事件概率的 计算	519
题型六	全概率公式和贝叶斯公式 概型	522
题型七	伯努利试验	525
题型八	综合题	526
习题精选一		528
习题精选一参考答案		530

第二章 随机变量及其分布 533

§1	知识要点精讲	533
§2	补充注释与重要结论	536
§3	典型题型与例题分析	538
题型一	有关随机变量与分布的基本 概念题	538
题型二	求随机变量的分布律与 分布函数	541
题型三	已知事件发生的概率,反求 事件中的未知参数	547
题型四	利用常见分布求相关事件的 概率	548
题型五	求随机变量函数的分布	550
题型六	综合题	554
习题精选二		556
习题精选二参考答案		558

第三章 多维随机变量及其分布 560

§1	知识要点精讲	560
§2	补充注释与重要结论	564
§3	典型题型与例题分析	566
题型一	联合分布、边缘分布与条件 分布的计算	566
题型二	已知部分分布律或边缘分布, 求联合分布律或相关参数	572
题型三	利用已知分布求相关事件的 概率	573
题型四	随机变量函数的分布	574
题型五	随机变量的独立性的讨论	580
题型六	综合题	581

习题精选三	583
习题精选三参考答案	585

第四章 随机变量的数字特征 588

§1	知识要点精讲	588
§2	补充注释与重要结论	591
§3	典型题型与例题分析	592
题型一	期望和方差的计算	592
题型二	随机变量函数的数学期望与 方差	595
题型三	有关协方差、相关系数、独立性 与相关性的命题	601
题型四	有关数字特征的应用题	606
题型五	综合题	608
习题精选四		610
习题精选四参考答案		611

第五章 大数定律和中心极限定理 613

§1	知识要点精讲	613
§2	典型题型与例题分析	615
题型一	有关切比雪夫不等式的 命题	615
题型二	有关大数定律的命题	616
题型三	有关中心极限定理的命题	617
题型四	综合题	621
习题精选五		621
习题精选五参考答案		623

第六章 数理统计的基本概念 624

§1	知识要点精讲	624
§2	补充注释与重要结论	629
§3	典型题型与例题分析	630
题型一	求样本容量 n , 或与样本均值 $\bar{X}$ 和样本方差 S^2 有关的概率	630
题型二	求统计量的数字特征	631
题型三	求统计量的分布	633
习题精选六		635
习题精选六参考答案		636

第七章 参数估计 637

§1	知识要点精讲	637
§2	补充注释与重要结论	640
§3	典型题型与例题分析	640

882	题型一 求矩法估计和最大似然估计	640
883	题型二 估计量评选标准的讨论	646
884	题型三 参数的区间估计	650
885	题型四 综合题	651
100	习题精选七	652
886	习题精选七参考答案	654

第八章 假设检验 655

202	§1 知识要点精讲	655
100	§2 补充注释与重要结论	656
887	§3 典型题型与例题分析	657

第五章 多元统计分析 657

810	§1 多元正态分布	657
811	§2 多元正态分布的性质	657
812	§3 多元正态分布的判别	657
813	§4 多元正态分布的回归	657
814	§5 多元正态分布的方差分析	657
815	§6 多元正态分布的因子分析	657
816	§7 多元正态分布的聚类分析	657
817	§8 多元正态分布的判别分析	657
818	§9 多元正态分布的判别分析	657
819	§10 多元正态分布的判别分析	657

第六章 多元统计分析 657

820	§1 多元正态分布	657
821	§2 多元正态分布的性质	657
822	§3 多元正态分布的判别	657
823	§4 多元正态分布的回归	657
824	§5 多元正态分布的方差分析	657
825	§6 多元正态分布的因子分析	657
826	§7 多元正态分布的聚类分析	657
827	§8 多元正态分布的判别分析	657
828	§9 多元正态分布的判别分析	657
829	§10 多元正态分布的判别分析	657

第七章 多元统计分析 657

830	§1 多元正态分布	657
831	§2 多元正态分布的性质	657
832	§3 多元正态分布的判别	657
833	§4 多元正态分布的回归	657
834	§5 多元正态分布的方差分析	657
835	§6 多元正态分布的因子分析	657
836	§7 多元正态分布的聚类分析	657
837	§8 多元正态分布的判别分析	657
838	§9 多元正态分布的判别分析	657
839	§10 多元正态分布的判别分析	657

112	§2 补充注释与重要结论	656
812	§3 典型题型与例题分析	657
813	题型一 正态总体未知参数的假设检验	657
814	题型二 有关两类错误的命题	658
815	习题精选八	659
816	习题精选八参考答案	660

第八章 多元统计分析 657

820	§1 多元正态分布	657
821	§2 多元正态分布的性质	657
822	§3 多元正态分布的判别	657
823	§4 多元正态分布的回归	657
824	§5 多元正态分布的方差分析	657
825	§6 多元正态分布的因子分析	657
826	§7 多元正态分布的聚类分析	657
827	§8 多元正态分布的判别分析	657
828	§9 多元正态分布的判别分析	657
829	§10 多元正态分布的判别分析	657

第九章 多元统计分析 657

830	§1 多元正态分布	657
831	§2 多元正态分布的性质	657
832	§3 多元正态分布的判别	657
833	§4 多元正态分布的回归	657
834	§5 多元正态分布的方差分析	657
835	§6 多元正态分布的因子分析	657
836	§7 多元正态分布的聚类分析	657
837	§8 多元正态分布的判别分析	657
838	§9 多元正态分布的判别分析	657
839	§10 多元正态分布的判别分析	657

第十章 多元统计分析 657

840	§1 多元正态分布	657
841	§2 多元正态分布的性质	657
842	§3 多元正态分布的判别	657
843	§4 多元正态分布的回归	657
844	§5 多元正态分布的方差分析	657
845	§6 多元正态分布的因子分析	657
846	§7 多元正态分布的聚类分析	657
847	§8 多元正态分布的判别分析	657
848	§9 多元正态分布的判别分析	657
849	§10 多元正态分布的判别分析	657

第十一章 多元统计分析 657

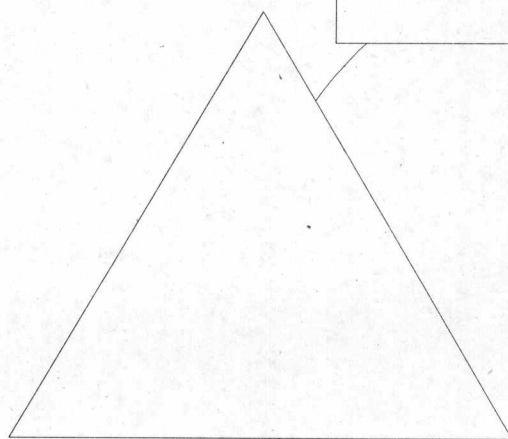
850	§1 多元正态分布	657
851	§2 多元正态分布的性质	657
852	§3 多元正态分布的判别	657
853	§4 多元正态分布的回归	657
854	§5 多元正态分布的方差分析	657
855	§6 多元正态分布的因子分析	657
856	§7 多元正态分布的聚类分析	657
857	§8 多元正态分布的判别分析	657
858	§9 多元正态分布的判别分析	657
859	§10 多元正态分布的判别分析	657

第一部分 **P**ART ONE

高等数学

PART

ONE



第一章 函数、极限与连续

§ 1 知识要点精讲

考试内容

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 函数关系的建立 数列极限与函数极限的定义及其性质 函数的左极限和右极限 无穷小量和无穷大量的概念及其关系 无穷小量的性质及无穷小量的比较 极限的四则运算 极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则 两个重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质

一 函数

1. 函数的概念及表示法

设 x 和 y 是两个变量(均在实数 $\mathbf{R}$ 内取值), D 是一个给定的非空数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 按照一定的法则, 变量 y 总有一个确定的值和它对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, 其中 D 叫做函数 $y = f(x)$ 的定义域, x 叫做自变量, y 叫做因变量, 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域. 表示法有: 公式法、表格法、图形法等.

要注意函数定义中的两个要素:

- (1) 定义域 D : 它表示 x 的取值范围, 由函数对应法则或实际问题的要求来确定.
- (2) 对应法则 f : 它表示给定 x 值, 求 y 值的方法.

因此: ① 对于两个给定的函数, 当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时, 才能说它们是相同的函数, 否则它们就是不同的函数. ② 求函数 f 的定义域, 就是求使 y 的取值和运算有意义的自变量 x 的取值范围.

2. 函数的性态 —— 有界性, 单调性, 周期性, 奇偶性

(I) 有界性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果存在正数 M , 对于任意 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界; 如果这样的 M 不存在, 则称函数 $y = f(x)$ 在 I 上无界. 如果存在正数 M_1 , 对于任意 $x \in I$, 恒有 $f(x) \leq M_1$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有上界; 如果存在正数 M_2 , 对于任意 $x \in I$, 恒有 $f(x) \geq M_2$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有下界. 易知函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在 I 上既有上界又有下界.

- (1) 几个常见的有界函数.

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上, 有

$$|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1, |\arctan x| < \frac{\pi}{2}, |\operatorname{arccot} x| < \pi (\text{或 } 0 < \operatorname{arccot} x < \pi).$$

因此, $y = \sin x, y = \cos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

在区间 $[-1, 1]$ 上, 有 $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}, |\arccos x| \leq \pi (\text{或 } 0 \leq \arccos x \leq \pi).$

因此, $y = \arcsin x, y = \arccos x$ 在区间 $[-1, 1]$ 上有界.

注: ① 函数 $y = f(x)$ 有界或无界是相对于某个区间而言的, 例如 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内无界, 但在区间 $[\frac{1}{8}, 1]$ 上是有界的.

② 区分无界函数和无穷大: 在某一变化过程中, 若 $f(x)$ 为无穷大, 则存在对应的区间使 $f(x)$ 无界; 但是若 $f(x)$ 在某个区间上无界, 则 $f(x)$ 不一定为无穷大. 例如 $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上无界, 但在 $x \rightarrow 0^+$ 时并不是无穷大.

③ 若函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界, 则 $f(x)$ 的导函数和原函数在区间 I 上不一定有界. 例如 $y = \sqrt{x}$ 在 $[0, 1]$ 上有界, 但其导函数 $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, 1]$ 上无界的; $y = 1 + \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界, 但其原函数 $F(x) = x + \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界的.

(2) 判别方法:

方法一 直接法: 定义本身就是判定 $f(x)$ 是否有界的一种有效方法, 即对 $f(x)$, 若存在 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \leq M$, 则 $f(x)$ 有界, 否则无界.

方法二 若存在区间 I 内序列 x_n , 使得 $f(x_n) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$, 则 $f(x)$ 在 I 内无界.

方法三 间接法: ① 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有界. ② 若 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 有界.

【例 1.1】 $x \rightarrow 0$ 时, $y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 是
(A) 无穷大. (B) 无穷小. (C) 非无穷大且在 $(0, 1]$ 上无界. (D) 在 $(0, 1]$ 上有界.

【详解】 取 $x = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 有 $y = 2n\pi \sin 2n\pi = 0$.

取 $x = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 时, 有 $y = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty$.

故函数无界且非无穷大量, 即选(C).

【例 1.2】 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在以下哪个区间有界?

(A) $(-1, 0)$. (B) $(0, 1)$. (C) $(1, 2)$. (D) $(2, 3)$.

【详解】 本题要讨论的是开区间的有界性. 易知 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$, 在 $(-1, 0)$ 连续, 且在 $x = -1$ 的右极限、 $x = 0$ 的左极限为

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \frac{-\sin 3}{2 \cdot 9} = -\frac{\sin 3}{18},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = -\frac{\sin 2}{4}.$$

故 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 有界, 选(A).

另外, 也可由

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty,$$

排除(B),(C),以及由

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty,$$

排除(D),从而选(A).

(II) 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义,如果对于 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$), 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或单调减小)的. 若 $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ (或 $f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调不减(单调不减).

判别方法:

方法一 利用定义: 设 $x_1 > x_2$, 计算 $f(x_1) - f(x_2)$, 若它大于零, 则单调增加; 若它小于零, 则单调减小.

方法二 利用导数: 对可导函数 $y = f(x)$, 若 $y' > 0$, 则 y 单调增加; 若 $y' < 0$, 则 y 单调减小.

注: 单调函数的导函数和原函数都不一定仍为单调函数. 例如 $y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加, 而其导函数 $y' = 1$ 与原函数 $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内都不单调.

(III) 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个不为零的常数 T , 使得对于任一 $x \in D$, 有 $x \pm T \in D$ 且 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

判别方法:

方法一 利用定义: 计算 $f(x+T) = \dots = f(x)$, 则 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数.

方法二 间接法: 利用常见周期函数的周期进行判别和计算. 例如, 由 $\sin x, \cos x$ 的周期为 2π , 推知 $|\sin x|, |\cos x|, \sin 2x, \cos 2x$ 的周期为 π ; 由 $\tan x, \cot x$ 的周期为 π , 推知 $|\tan x|, |\cot x|$ 的周期为 π , $\tan \frac{x}{2}, \cot \frac{x}{2}$ 的周期为 2π .

注: 若 $f(x)$ 是可导的周期函数, 则它的导函数仍是周期函数, 且周期不变, 但它的原函数不一定仍为周期函数. 例如 $f(x) = 1 + \sin x$ 是周期为 2π 的函数, 其导函数 $f'(x) = \cos x$ 仍是周期为 2π 的函数, 但其原函数 $F(x) = x - \cos x$ 不是周期函数.

(IV) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 如果对任一 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$ (或 $-f(x)$), 则称函数 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数). 偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于坐标原点对称.

判别方法:

方法一 利用定义: 通过计算 $f(-x) = \dots = f(x)$ ($-f(x)$), 则 $f(x)$ 是偶(奇)函数.

方法二 利用运算性质:

奇函数 $\pm$ 奇函数 = 奇函数 偶函数 $\pm$ 偶函数 = 偶函数

奇函数 $\times$ 偶函数 = 奇函数 偶函数 $\times$ 偶函数 = 偶函数 奇函数 $\times$ 奇函数 = 偶函数

方法三 利用导函数与原函数奇偶性:

可导的奇函数的导函数是偶函数, 例如 $(x^3)' = 3x^2$.

可导的偶函数的导函数是奇函数, 例如 $(x^2)' = 2x$.

连续的奇函数的任何一个原函数都是偶函数, 例如 $f(x) = \sin x, F(x) = -\cos x + C$.