读考研书 找人大社

2009 人大考研

# 2009年考研数学经典讲义(理工类)

主编 黄先开 曹显兵 简怀玉 刘喜波

- 一线名师授课底本
- 经典讲解全新奉上

全面解析大纲考试内容与考试要求，清晰明确，一目了然

总结重要公式与结论，帮助考生常记不忘

归纳典型题型讲解内容，例题分析、详解、评注环环相扣

每讲配精编习题，有针对性地演练、温习

中国人民大学出版社

# 2009年考研数学经典讲义(理工类)

▶主　编　黄先开　曹显兵
简怀玉　刘喜波

| 正版查询及服务程序 | |
| --- | --- |
| | ←—刮　开　涂　层 |
| | ←—获取20位数字编码 |
| | ←—上　www.1kao.net　注　册 |
| | ←—登录增值服务进免费课堂 |

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

2009年考研数学经典讲义．理工类/黄先开等主编．3版
北京：中国人民大学出版社，2008
ISBN 978-7-300-07506-8

Ⅰ．2…
Ⅱ．黄…
Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料
Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第010984号

**2009年考研数学经典讲义(理工类)**

主　编　黄先开　曹显兵　简怀玉　刘喜波

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 中国人民大学出版社 | | |
| 社　　址 | 北京中关村大街31号 | 邮政编码 | 100080 |
| 电　　话 | 010－62511242(总编室) | | 010－62511398(质管部) |
| | 010－82501766(邮购部) | | 010－62514148(门市部) |
| | 010－62515195(发行公司) | | 010－62515275(盗版举报) |
| 网　　址 | http://www.crup.com.cn | | |
| | http://www.1kao.net (中国1考网) | | |
| 经　　销 | 新华书店 | | |
| 印　　刷 | 北京鑫霸印务有限公司 | | |
| 规　　格 | 210mm×285mm　16开本 | 版　　次 | 2006年7月第1版 |
| | | | 2008年2月第3版 |
| 印　　张 | 42 | 印　　次 | 2008年2月第1次印刷 |
| 字　　数 | 1 259 000 | 定　　价 | 56.00元 |

# 郑重声明

黄先开、曹显兵、简怀玉、刘喜波教授主编的《考研数学经典讲义》系列图书，因其名师的底蕴、全面的内容、权威的解析，名副其实地成为全面、权威、实用的数学考研辅导书。

当前考研图书市场盗印盗销行为猖獗。盗版行为在侵害作者和出版者权益的同时，也因其印装粗劣、错漏百出，使考生蒙受金钱损失、精力损失，甚至误导考生，毁掉考生考研前程。

多年来，我们一直与盗版行为作着艰苦的斗争，并让一些盗版者受到了应有的处罚。今年，我们将进一步加大打击盗版的力度，并利用包括法律在内的一切手段，让盗版者受到严惩。

请广大考生认准以下防盗版特征：(1) 封面防伪标带20位密码网上注册查真伪。(2) 封面压有带人大出版社社标的压纹。

在以上措施的基础上，我们奉行以服务打击盗版，让买人大版图书的考生享受到实实在在的服务。今年我们将继续为购书考生提供网上增值服务，详情请及时登录中国1考网（www.1kao.net）查询。

为保障您和您尊敬的老师的合法权益，请将您掌握的盗版者信息及时提供给我们。

举报电话：010-62515275
编辑电话：010-62511915
电子邮箱：1kao2005@163.com

中国人民大学出版社授权律师
北京市洪范广住律师事务所
徐 波
2008年2月

# 全面提高　获取高分

数学在研究生入学考试中分值之高，使其对于考研的成功与否起着至关重要的作用。对于考生而言，不仅要突破数学关，而且必须获取高分，而要获取高分，就必须下大工夫，全面提高。

黄先开、曹显兵等教授是在考生中广受赞誉的考研辅导名师，他们积丰富经验所主编的这套《考研数学经典讲义》，分析考试大纲的内容与要求，总结重要公式与结论，归纳典型题型进行例题精讲，帮助考生理思路、抓重点、得高分。

数学复习是一项系统工程，在全面复习的同时，考生还需要根据不同阶段的不同需求有针对性地选用辅导书。可供选择的辅导图书有：

《考研历届数学真题题型解析（数学一）》
《考研历届数学真题题型解析（数学二）》
《考研历届数学真题题型解析（数学三）》
《考研历届数学真题题型解析（数学四）》
《2009年考研数学最新精选600题（理工类）》
《2009年考研数学最新精选600题（经济类）》
《2009年考研数学经典冲刺5套卷（数学一）》
《2009年考研数学经典冲刺5套卷（数学二）》
《2009年考研数学经典冲刺5套卷（数学三）》
《2009年考研数学经典冲刺5套卷（数学四）》

以上图书均由黄先开、曹显兵等教授主编。经过认真复习，我们相信您一定可以轻松上阵，考取高分，圆考研名校梦。

# 前 言

本书是作者根据最新全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编著的一本系统复习考研数学的参考书。它是以作者多年考研辅导讲稿为基础，结合作者对历年考题、命题趋势的研究以及数学的内在规律倾心编写而成的，目的是帮助广大考生在较短时间内系统复习好考研数学内容，取得优异成绩，并为今后研究生学习阶段打下坚实的数学基础，让数学伴随同学们走向人生的辉煌。

本书编写特点如下：

一、考试内容提要——对照最直接

明确考试内容与要求，才能有的放矢。本书在每章的第一节对最新考研大纲要求的基本概念、基本原理和基本方法都做了详尽的讲解，并指出注意事项。作者认为这对于考前进行全面、系统的复习是非常必要的。

二、重要公式与结论（补充注释与重要结论）——总结最完善

针对每一章中的重点、难点以及容易混淆的概念进行诠释，并归纳总结每一章的重要定理、公式和结论，特别是对一些重要的中间结论或者隐含条件进行了归纳总结。目的在于希望考生通过系统复习后，一见到此类问题，就能立刻联想到考题实际期望考查的是哪一方面的知识点，从而使考生站在一个更高的层次上去分析问题、解决问题，达到认识和理解的新境界。考生是否具备了这种能力，对考研能否取得成功和获得高分是至关重要的。

三、典型题型与例题分析——题型最丰富

对数学课程来说，题目是无穷的，但题型是有限的。作者通过精心编制和设计许多新题型，使得本书几乎囊括了考研数学所涉及的所有题型，并逐一进行分析，给出了解题方法和规律。另外，借助于许多重要经典例题的评注，本书能够帮助读者更好地把握典型例题的典型处理方法和各种可能的延伸，从而使读者能够举一反三、触类旁通。

四、习题精选与参考答案——选题最典型

要想真正掌握一门课程内容并通过相关考试，做一定数量的习题是必不可少的。为此，作者按照填空题、选择题和解答题的顺序对应各种题型选编了相当数量的习题，供读者模拟练习之用，希望读者尽可能独立地完成习题。

五、本书带“*”的内容，数学二考生不作要求

在成书过程中，作者参考了众多著作和教材，由于篇幅所限不能一一列出，在此谨向有关作者表示衷心感谢！

由于作者水平所限，书中一定还存在许多不足之处，敬请广大读者、同行专家批评指正。

作者

2008年2月于北京

# 目　录

## 第一部分　高等数学

# 第二部分　线性代数

PART ONE

# 第一部分 PART ONE

# 高等数学

# 第一章　函数、极限与连续

## §1　知识要点精讲

**考试内容**

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　复合函数、反函数、分段函数和隐函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　函数关系的建立　数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限和右极限　无穷小量和无穷大量的概念及其关系　无穷小量的性质及无穷小量的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$　函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

### 一　函数

**1. 函数的概念及表示法**

设 $x$ 和 $y$ 是两个变量(均在实数 $\mathbf{R}$ 内取值)，$D$ 是一个给定的非空数集，如果对于每个数 $x\in D$，按照一定的法则，变量 $y$ 总有一个确定的值和它对应，则称变量 $y$ 是变量 $x$ 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 $D$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域，$x$ 叫做自变量，$y$ 叫做因变量，函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 $f$ 的值域. 表示法有：公式法、表格法、图形法等.

要注意函数定义中的两个要素：

(1) 定义域 $D$：它表示 $x$ 的取值范围，由函数对应法则或实际问题的要求来确定.

(2) 对应法则 $f$：它表示给定 $x$ 值，求 $y$ 值的方法.

因此：① 对于两个给定的函数，当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时，才能说它们是相同的函数，否则它们就是不同的函数. ② 求函数 $f$ 的定义域，就是求使 $y$ 的取值和运算有意义的自变量 $x$ 的取值范围.

**2. 函数的性态 —— 有界性，单调性，周期性，奇偶性**

**(Ⅰ) 有界性**

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义，如果存在正数 $M$，对于任意 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上有界；如果这样的 $M$ 不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 $I$ 上无界. 如果存在正数 $M_1$，对于任意 $x\in I$，恒有 $f(x)\leqslant M_1$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上有上界；如果存在正数 $M_2$，对于任意 $x\in I$，恒有 $f(x)\geqslant M_2$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上有下界. 易知函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上有界的充分必要条件是它在 $I$ 上既有上界又有下界.

(1) 几个常见的有界函数.

在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，有

$$|\sin x|\leqslant 1,\ |\cos x|\leqslant 1,\ |\arctan x|<\frac{\pi}{2},\ |\operatorname{arccot}x|<\pi(\text{或 } 0<\operatorname{arccot}x<\pi).$$

因此，$y=\sin x, y=\cos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot}x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上有界.

在区间$[-1,1]$上，有 $|\arcsin x|\leqslant\frac{\pi}{2}$，$|\arccos x|\leqslant\pi$(或 $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$).

因此，$y=\arcsin x, y=\arccos x$ 在区间$[-1,1]$上有界.

**注**：① 函数 $y=f(x)$ 有界或无界是相对于某个区间而言的，例如 $y=\frac{1}{x}$ 在区间$(0,1)$内无界，但在区间$\left[\frac{1}{8},1\right]$上是有界的.

② 区分无界函数和无穷大：在某一变化过程中，若 $f(x)$ 为无穷大，则存在对应的区间使 $f(x)$ 无界；但是若 $f(x)$ 在某个区间上无界，则 $f(x)$ 不一定为无穷大. 例如 $y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 在区间$(0,1]$上无界，但在 $x\to 0^+$ 时并不是无穷大.

③ 若函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上有界，则 $f(x)$ 的导函数和原函数在区间 $I$ 上不一定有界. 例如 $y=\sqrt{x}$ 在$[0,1]$上有界，但其导函数 $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在$(0,1]$上是无界的；$y=1+\cos x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界，但其原函数 $F(x)=x+\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是无界的.

(2) 判别方法：

**方法一**　直接法：定义本身就是判定 $f(x)$ 是否有界的一种有效方法，即对 $f(x)$，若存在 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M$，则 $f(x)$ 有界，否则无界.

**方法二**　若存在区间 $I$ 内序列 $x_n$，使得 $f(x_n)\to\infty(n\to\infty)$，则 $f(x)$ 在 $I$ 内无界.

**方法三**　间接法：① 若 $f(x)$ 在$[a,b]$连续，则 $f(x)$ 在$[a,b]$有界. ② 若 $f(x)$ 在$(a,b)$连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在$(a,b)$有界.

**【例 1.1】**　$x\to 0$ 时，$y=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是

(A) 无穷大.　(B) 无穷小.　(C) 非无穷大且在$(0,1]$上无界.　(D) 在$(0,1]$上有界.

【　】

**【详解】**　取 $x=\frac{1}{2n\pi}\to 0(n\to\infty)$，有 $y=2n\pi\sin 2n\pi=0$.

取 $x=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\to 0(n\to\infty)$ 时，有 $y=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to\infty$.

故函数无界且非无穷大量，即选(C).

**【例 1.2】**　$f(x)=\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在以下哪个区间有界？

(A)$(-1,0)$.　(B)$(0,1)$.　(C)$(1,2)$.　(D)$(2,3)$.　【　】

**【详解】**　本题要讨论的是开区间的有界性. 易知 $f(x)$ 的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$，在$(-1,0)$连续，且在 $x=-1$ 的右极限、$x=0$ 的左极限为

$$\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-\sin 3}{2\cdot 9}=\frac{\sin 3}{18},$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 2}{4}.$$

故 $f(x)$ 在$(-1,0)$有界，选(A).

另外，也可由

$$\lim_{x\to 1}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty,$$

排除(B),(C),以及由

$$\lim_{x\to 2}\frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty,$$

排除(D),从而选(A).

**(Ⅱ)单调性**

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上有定义,如果对于 $\forall x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上是单调增加(或单调减小)的. 若 $\forall x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称 $f(x)$ 在区间 $I$ 上单调不减(单调不增).

判别方法:

**方法一**　利用定义:设 $x_1>x_2$,计算 $f(x_1)-f(x_2)$,若它大于零,则单调增加;若它小于零,则单调减小.

**方法二**　利用导数:对可导函数 $y=f(x)$,若 $y'>0$,则 $y$ 单调增加;若 $y'<0$,则 $y$ 单调减小.

**注**:单调函数的导函数和原函数都不一定仍为单调函数. 例如 $y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加,而其导函数 $y'=1$ 与原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内都不单调.

**(Ⅲ)周期性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$,如果存在一个不为零的常数 $T$,使得对于任一 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,$T$ 称为 $f(x)$ 的周期. 通常把满足上式的最小正数 $T$ 称为函数 $f(x)$ 的周期.

判别方法:

**方法一**　利用定义:计算 $f(x+T)=\cdots=f(x)$,则 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的函数.

**方法二**　间接法:利用常见周期函数的周期进行判别和计算. 例如,由 $\sin x,\cos x$ 的周期为 $2\pi$,推知 $|\sin x|,|\cos x|,\sin 2x,\cos 2x$ 的周期为 $\pi$;由 $\tan x,\cot x$ 的周期为 $\pi$,推知 $|\tan x|,|\cot x|$ 的周期为 $\pi$,$\tan\frac{x}{2}$,$\cot\frac{x}{2}$ 的周期为 $2\pi$.

**注**:若 $f(x)$ 是可导的周期函数,则它的导函数仍是周期函数,且周期不变,但它的原函数不一定仍为周期函数. 例如 $f(x)=1+\sin x$ 是周期为 $2\pi$ 的函数,其导函数 $f'(x)=\cos x$ 仍是周期为 $2\pi$ 的函数,但其原函数 $F(x)=x-\cos x$ 不是周期函数.

**(Ⅳ)奇偶性**

设函数 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称,如果对任一 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$(或 $-f(x)$),则称函数 $f(x)$ 为偶函数(或奇函数). 偶函数的图形关于 $y$ 轴对称,奇函数的图形关于坐标原点对称.

判别方法:

**方法一**　利用定义:通过计算 $f(-x)=\cdots=f(x)$　$(-f(x))$,则 $f(x)$ 是偶(奇)函数.

**方法二**　利用运算性质:

奇函数 ± 奇函数 = 奇函数　　偶函数 ± 偶函数 = 偶函数

奇函数 × 偶函数 = 奇函数　　偶函数 × 偶函数 = 偶函数　　奇函数 × 奇函数 = 偶函数

**方法三**　利用导函数与原函数奇偶性:

可导的奇函数的导函数是偶函数,例如 $(x^3)'=3x^2$.

可导的偶函数的导函数是奇函数,例如 $(x^2)'=2x$.

连续的奇函数的任何一个原函数都是偶函数,例如 $f(x)=\sin x$,$F(x)=-\cos x+C$.