面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

高等数学题解（下册）

COLLEGE MATHEMATICS

廖玉麟 赵艳辉 张艳 编

湖南大学出版社

面向21世纪高等学校数学系列辅导教材

高等数学题解

下册

廖玉麟　赵艳辉　张　艳　编

湖南大学出版社
2002年·长沙

内 容 简 介

本书是面向21世纪课程教材，普通高等教育"九五"国家级重点教材的习题解. 习题分A、B两类，A类习题侧重于使读者搞清概念，掌握基本理论与技能；B类习题着重于培养读者拓宽教材内容的创新能力，培养读者自学、独立思考与建模能力. 本书集趣味、应用与逻辑思维于一体，并收入了具有启发性的硕士研究生入学考试试题.

本书解题详细，对比较难的题先给出了解题思路分析. 不少题给出了多种解法.

全书分上、下册出版. 上册内容包含函数、极限、连续函数；导数与微分；微分中值定理及函数性态研究；一元函数积分学及其应用；向量代数与空间解析几何. 下册内容包括多元函数微分学及其应用；多元数值函数积分及其应用；多元向量值函数积分和场论；无穷级数和常微分方程.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学题解(下册)/廖玉麟等编. —长沙：湖南大学出版社，2002.7

ISBN 7—81053—499—8

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①廖… ②赵… ③张… Ⅲ. 高等数学—高等学校—解题 Ⅳ. 013—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第040966号

高等数学题解(下册)

Gaodeng Shuxue Tijie (Xia Ce)

廖玉麟 赵艳辉 张 艳 编

□责任编辑 李立鹏 俞 涛

□出版发行 湖南大学出版社

社址 长沙市岳麓山 邮码 410082

电话 0731-8821691 0731-8821315

□经 销 湖南省新华书店

□印 装 长沙环境保护学校印刷厂

□开本 850×1168 32开 □印张 14.75 □字数 383千

□版次 2002年7月第1版 □2002年7月第1次印刷

□印数 1～5 000册

□书号 ISBN 7—81053—499—8/O・40

□定价 35.00元(上下册)

前言

现今通用的《高等数学》教材内容与现代科学技术中数学的广泛应用之间的差距，已越来越大. 为培养 21 世纪的人才，近两年出版了几种版本的面向 21 世纪《高等数学》或微积分课程教材，侯云畅主编的《高等数学》就是其中之一.

该教材的习题分 A，B 两类依次排列. 具有下列主要特点：

1. A 类习题为使读者搞清概念，熟练掌握教材内容（当然也包括现在常用的任何版本的高等数学教材的内容）.

2. B 类习题则是为拓宽教材内容. 并配备了有一定难度且富有新意的习题，其中包含一些定理与性质的证明，这对引导、培养读者创新与灵活应用能力将有推动作用.

3. 具有较多的经济、管理、人口、军事等多方面的应用题. 这些题，不但对培养读者自学能力、独立思考能力、建模能力与解决实际问题的能力有一定好处，而且可以使读者获得不少实际知识. 解应用题历来是大多数读者感到困难之处，也是许多版本高等数学教材习题配备相对不足的地方.

4. 两类习题中均有一些极具启发性、技巧性、趣味性的习题，并加入了一些富有启发性的研究生入学考试试题.

总之，其习题的配备集基本、趣味、新颖、灵活、综合与应用性于一体. 根据作者数十年长期连续讲授高等数学、数学分析课程的经验，认为该教材习题配备较好. 这就是我们编写本题解的原因.

本书解题详细，对较难的习题，在解题前均给了解题思路分析、理论根据，对有些习题还给出了多种解法. 目的在于使读者的数学素质得到不断提高，增强灵活应用所学知识与分析解题能力.

当我们第一遍读一本好书的时候,我们仿佛觉得找到了一个朋友;当我们再次读这本书的时候,仿佛又和老朋友重逢.

——伏尔泰(法国哲学家)

我们希望本书能给读者这种感觉.

在使用本题解时,我们建议读者先独立思考,作出自己的解答,然后与题解对照.对较难的习题,也要勤思考,设计出自己的解题方案,再对照题解进行分析.这样才会学到真实的东西。以下名言请读者牢记:

虚假的学问比无知更糟糕.无知好比一块空地,可以耕耘和播种;虚假的学问就像一块长满杂草的荒地,几乎无法把草拔尽.

——康图(意大利作家)

希望读者切莫只是抄袭而不求理解.

由于时间仓促,疏漏与不足之处在所难免,欢迎批评指正.

编者

2002年3月

目　　次

第六章　多元函数微分学及其应用

一、内容提要

1. n 维欧氏空间

1）设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$；

$X+Y\triangleq(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$；

$kX\triangleq(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)$；

$\mathbf{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$；

则称 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维向量空间，简称为 n 维空间.

2）n 维欧几里得空间

定义了内积 $(X,Y)\triangleq\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$ 的 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$，称为 n 维欧几里得空间

3）$\mathbf{R}^n$ 中两点距离的性质

距离　$\rho(X,Y)=\|X-Y\|=\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

非负定性　$\rho(X,Y)\geqslant0$ 且 $\rho(X,Y)=0\Longleftrightarrow X=Y$.

对称性　$\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$.

三角不等式　$\rho(X,Y)\leqslant\rho(X,Z)+\rho(Z,Y)$.

4）n 维欧氏空间中的点集

邻域　$U_\delta(P_0)=\{P\in\mathbf{R}^n\mid\rho(P_1,P_0)<\delta\}$.

内点　设 $E\subseteq\mathbf{R}^n$，$P\in E$，若 $\exists\,\delta>0$，使 $U_P(\delta)\subseteq E$，则称 P 为 E 的内点.

存在

边界点　若 $\forall\,U_\delta(P)$ 既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点.

开集　若点集 $E \subseteq \mathbf{R}^n$ 的每一点都是 E 的内点.

闭集　若点集 $E \subseteq \mathbf{R}^n$ 包含它的全部内点和边界点.

连通集　$E \subseteq \mathbf{R}^n, \forall P, Q \in E$,总可用完全含在 E 内的折线连接起来.

开区域　连通的开集.

闭区域　区域及其边界点的并.

2. 矩阵初步

1)　定义

$$A \triangleq \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m\times n} \text{ 或} (a_{ij}).$$

2)　$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$,若 $a_{ij} = b_{ij}$　$(i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,n)$

3)　矩阵运算

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$,则

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \triangleq \begin{bmatrix} a_n + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m+1} + b_{m+1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 为同型矩阵,则

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}, (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}),$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \triangleq \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}),$$

$$\lambda A \triangleq \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

$$(\mu\lambda)A = \mu(\lambda A),$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \lambda(A + \boldsymbol{B}) = \lambda A + \lambda \boldsymbol{B}.$$

$AB = C$,其中 $A = (a_{ik})_{m\times s}$,$B = (b_{kj})_{s\times n}$,$C = (c_{ij})_{m\times n}$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n).$$

矩阵乘法运算满足

$$(AB)C = A(BC), A(B + C) = AB + AC,$$

$$(B + C)A = BA + CA,$$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

注意 $AB \neq BA$(一般).

4) 转置矩阵

将矩阵 A 的行换成同序数的列得到的矩阵,记为 A^{T}.

若 A 为 n 阶方阵,且有 $A^{\mathrm{T}} = A$,而 $a_{ij} = a_{ji} \quad (i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,n)$,则称 A 为对称矩阵.

5) $\det A$:方阵 A 的行列式

6) 矩阵的正定性

(1) 二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_1x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1}a_nx_{n-1}x_n.$$

取 $a_{ij} = a_{ji} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$,

则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{i\cdot j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$,

$$A = (a_{ij})_{n\times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, f(X) = X^{\mathrm{T}}AX.$$

(2) A 为正定矩阵,若 $f(X) = X^{-\mathrm{T}}AX > 0, \forall X \neq 0$,称 $f(X)$ 为正二次型,A 为正定矩阵,记为 $A > 0$ 反之称为负定二次型与负

定矩阵.

(3) A 为正定$\Leftrightarrow a_{11}>0,\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}>0.$

3. 多元函数的基本概念

1) 多元函数的定义

设 $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ 且 $\Omega\neq\varnothing$,则称 $f:\Omega\to\mathbf{R}^m$ 或 $f:P\to z,P\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ 为 n 元函数 $z=f(P)$.

特别地,当 $m=1$ 时有 $z=f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

当 $m\geqslant 2$ 时,有

$$z=f(P)=(f_1(P),f_2(P),\cdots,f_m(P)),$$

其中 $P=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$,称为 n 元向量函数.

2) 多元数值函数的极限

设 $f:\Omega\to\mathbf{R}^1,P\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^2,P_0(x_0,y_0)$ 是 Ω 的聚点($\forall\ U^0_\delta(P_0)$ 都含有 Ω 的无穷多个点).A 是常数.$\forall\ U_\varepsilon(A),\exists\ U^0_\delta(P_0),\forall\ P\in U^0_\delta(P_0)\cap\Omega,f(P)\in U_\varepsilon(A)$,则称二元函数 f 当 $P\to P_0$ 时以 A 为极限,记为

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A\quad 或 \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A.$$

3) 多元向量值函数的极限

设 $f:\Omega\to\mathbf{R}^m,P\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^n,P_0$ 是 Ω 的聚点 $f(P)=(f_1(P),f_2(P),\cdots f_m(P)),A=(A_1,A_2,\cdots,A_m)$ 是常向量,若 $\forall\ U_\varepsilon(A)$,$\exists\ U^0_\delta(P_0),\forall\ P\in U^0_\delta(P_0)\cap\Omega,f(P)\in U_\varepsilon(A)$,则称向量值函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时以 A 为极限记为 $\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=A$.

4) 多元函数的连续性

设 $f:\Omega\to\mathbf{R}^m,P_0\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^n,\forall\ U_\varepsilon(f(P_0)),\exists\ U_\delta(P_0),\forall\ P\in$

$U_\delta(P_0) \cap \Omega, f(P) \in U_\varepsilon(f(P_0))$，则称 $f(P)$ 在点 P_0 连续，记为

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

多元初等函数在定义区域内也都连续.

在闭区域上连续函数具有：有界性、取得最大、最小值，介值定理和一致连续性.

5）多元数值函数的微分法

（1）偏导数

$$\frac{\partial f(P)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} [f(x_1, x_2, \cdots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n) - f(x_1, x_2, \cdots, x_n)]/\Delta x_i.$$

如果 $f(P)$ 在点 P 的偏导数 $\frac{\partial f(P)}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都存在，则称 f 在点 P 可导，记作

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f(P)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(P)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(P)}{\partial x_n} \right).$$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ 称为那勒拉(Nabla)算子.

（2）偏导数的几何意义

$z = f(x, y), (x, y) \in \Omega$，它表示 $\mathbf{R}^3$ 中的一张曲面.

$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}$ 表示空间曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线 M_0T 关于 x 轴的斜率. $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)}$ 有类似的几何解释.

（3）偏导数的求法与一元函数同

（4）全微分

若 $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A_1 \Delta x + A_2 \Delta y + o(\rho)$，$A_1, A_2$ 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$，仅与 P 有关，

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

则称 f 在点 P 可微. 可证 $A_1 = \frac{\partial z}{\partial x}, A_2 = \frac{\partial z}{\partial y}$.

故有 $$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

一阶全微分形式的不变性.

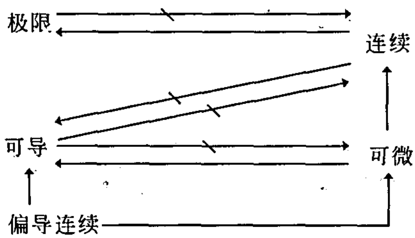
$z=f(u,v)$，无论 u,v 是变量还是 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 均有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

函数可微的必要条件：所有偏导数存在.

函数可微的充分条件：偏导数存在且连续.

(5) 极限、连续、可导、可微的关系.



(6) 复合函数与隐函数求导法则

复合函数　设 $z=f(u,v)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x};\\[2ex]\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}.\end{cases}$$

对于 n 元函数亦有类似的结果

设 $z=f(\boldsymbol{u})=f(u_1,u_2,\cdots,u_m)$　$\boldsymbol{u}(u_1,u_2,\cdots,u_m)\in\sigma\subseteq\mathbf{R}^m$，$u_j=u_j(P)=u_j(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$j=1,2,\cdots,m$，$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x_i}&=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_j}\cdot\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\\&=\nabla f\cdot\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i},\frac{\partial u_2}{\partial x_i},\cdots,\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)\quad(i=1,2,\cdots,n),\end{aligned}$$

写成矩阵的形式为

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\ \frac{\partial z}{\partial x_2}\cdots\ \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\ \frac{\partial f}{\partial u_2}\cdots\ \frac{\partial f}{\partial u_m}\right)\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & \frac{\partial u_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}.$$

隐函数　设 $F(x,y)\in C^1(U_\delta(P_0))$，$P_0=(x_0,y_0)$ 且 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$. 则 $F(x,y)=0$ 确定 $y=f(x)$，$y_0=f(x_0)$ 及有 $F(x,f(x))\equiv 0$，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

对于 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)=0$ 确定 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，有

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{F'_{x_i}}{F'_u}\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

方程组确定的隐函数　设 $F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,u_2,\cdots,u_m)\in C^1$. $(i=1,2,\cdots,m)$ 如果

$$F_i(P_0)=F_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,u_1^0,u_2^0,\cdots,u_m^0)=0,\ i=1,2,\cdots,m.$$

在 P_0 点

$$J=\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_m)}\neq 0.$$

则方程组 $F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n.u_1,u_2,\cdots,u_m)=0,i=1,2,\cdots,m$ 确定

$$u_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad i=1,2,\cdots,m$$

有
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_m)}{\partial(u_1,\cdots,u_{i-1},x_j,u_{i+1},\cdots,u_m)}.$$

(7) 雅可比行列式的简单性质

性质 1　设 $u_i=g_i(\boldsymbol{x})=g_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$i=1,2,\cdots,n$ 在 $\boldsymbol{x}$

处有连续导数. $z_i = f_i(\boldsymbol{u}) = f_i(u_1, u_2, \cdots, u_n)$, $(i = 1, \cdots, n)$ 在 $\boldsymbol{u}$ 处有连续导数，则有

$$\frac{\partial(z_1, z_2, \cdots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} = \frac{\partial(z_1, z_2, \cdots, z_n)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)} \cdot \frac{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

性质 2

$$\frac{\partial(z_1, z_2, \cdots, z_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(z_1, z_2, \cdots, z_n)} = 1.$$

性质 3 设 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 在 uv 平面上的区域 σ' 内有连续偏导，且 $J \neq 0$, σ' 经变换对应于 xy 平面上的 σ，则 $|J|$ 为 σ' 与 σ 之间对应面积微元的放大系数.

(8) 方向导数和梯度

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{P})}{\partial \boldsymbol{l}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(\boldsymbol{P} + t\boldsymbol{e}_l) - f(\boldsymbol{P})}{t},$$

其中 $\boldsymbol{l}$ 是 $\Omega \in \mathbf{R}^n$ 内某一向量，$\boldsymbol{e}_l$ 是其单位向量，点 $\boldsymbol{P} + t\boldsymbol{e}_l (0 \leqslant t < +\infty)$ 在过点 $\boldsymbol{P}$ 沿 $\boldsymbol{e}_l$ 方向的射线上.

设 f 在点 $\boldsymbol{P}$ 可微，则沿任意方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在. 且有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{e}_l = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cos\theta_i, \quad \boldsymbol{e}_l = (\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cdots, \cos\theta_n).$$

梯度 $\quad \operatorname{grad} f(\boldsymbol{P}) = \nabla f(\boldsymbol{P}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$

$$|\operatorname{gread} f| = \max \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2}.$$

方向导数与梯度的关系

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}} = \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{e}_l = |\operatorname{grad} f| \cos(\operatorname{grad} f, \boldsymbol{e}_l)$$

$$= \operatorname{Prj}_l \operatorname{grad} f.$$

(9) 高阶偏导数、高阶全微分

高阶偏导数 如果函数 $z = f(\boldsymbol{P})$ 的 $(k-1)$ 阶偏导数存在求

k 阶偏导数，则称其为 $f(P)$ 的 $k(k\geqslant 2)$ 阶偏导数.

$$\frac{\partial^k z}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\left(\frac{\partial^{k-1}z}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_{k-1}}}\right).$$

高阶全微分 在 $\mathrm{d}z=\nabla f\cdot\mathrm{d}\vec{P}$ 中，固定 $\mathrm{d}\vec{P}$，若 $\mathrm{d}z$ 可微，则 $\mathrm{d}z$ 的全微分称为 f 的二阶全微分，记作 d^2z，一般地，$\mathrm{d}^kf=\mathrm{d}(\mathrm{d}^{k-1}f)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2z&=\mathrm{d}(\mathrm{d}z)=\nabla\left(\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\\&=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\mathrm{d}y,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2.\end{aligned}$$

6）多元向量值函数的导数

多元向量值函数导数的概念与数值函数导数的概念相似. 主要讨论一元向量值函数的导数.

设 $\boldsymbol{f}(t)$ 为一元实变量 t 的向量值函数，在点 t_0 的某一邻域内有定义.

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{f}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{f}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{f}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{f}(t_0)}{\Delta t}.$$

这个导数是向量，故称为导向量，它满足以下的运算法则

(1) $(\boldsymbol{f}(t)+\boldsymbol{g}(t))'=\boldsymbol{f}'(t)+\boldsymbol{g}'(t)$；

(2) $(c\boldsymbol{f}(t))'=c\boldsymbol{f}'(t)$　其中 c 为常数；

(3) $(\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}(t))'=\boldsymbol{f}'(t)\cdot\boldsymbol{g}(t)+\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{g}'(t)$；

(4) $(\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}(t))'=\boldsymbol{f}'(t)\times\boldsymbol{g}(t)+\boldsymbol{f}(t)\times\boldsymbol{g}'(t)$；

(5) $(u(t)\boldsymbol{f}(t))'=u'(t)\boldsymbol{f}(t)+u(t)\boldsymbol{f}'(t)$，$u(t)$ 为数值函数；

(6) $(\boldsymbol{f}[u(t)])'=\boldsymbol{f}'(u)\cdot u'(t)$.

一元向量值函数的导数的几何意义：表示矢端曲线在该点处的切线向量.

7）向量值函数的导数的几何应用

（1）空间曲线的切线与法平面

设 $\Gamma: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$. 它由向量值函数 $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ 所确定.

切线方程 $\dfrac{x - x_0}{x'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{y'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{z'(t_0)}$.

法平面方程

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

若
$$\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

则切线方程

$$\frac{x - x_0}{\left.\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}\right|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}\right|_{P_0}} = \frac{z - z_0}{\left.\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}\right|_{P_0}}.$$

（2）曲面的切平面与法线

设曲面方程为 $z = f(x, y)$，则

切平面方程

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0);$$

法线方程 $\dfrac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \dfrac{z - z_0}{-1}$;

设曲面方程为 $F(x, y, z) = 0$，则

切平面方程 $F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$;

法线方程 $\dfrac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$;

若曲面由参数方程表示

$$\begin{cases} x = x(u, v); \\ y = y(u, v); \\ z = z(u, v). \end{cases}$$