

全国硕士研究生入学统一考试



笃志图书

2006年

考研数学（理工类） 知识点归纳与总结

构建知识网络 → 精研解题思路 → 提高综合技能

主 编：中国科学院 徐海军

副主编：刘 磊 吴 昊 李虹霏

目标 135 分：

知识点交叉综合练习，熟练基本思路、解法和技巧，多拿“拉距”分！

目标 115 分：

从历年考题中归纳重点专题，精研经典例题和习题，确保大题不丢分！

目标 90 分：

建知识网络体系图，深入理解知识点之间的横向联系，拿住基础分！

大目标，考研复习稳步推进！



航空工业出版社

全国硕士研究生入学统一考试



笃志图书

2006年

考研数学（理工类） 知识点归纳与总结

构建知识网络 → 精研解题思路 → 提高综合技能

主 编：中国科学院 徐海军

副主编：北京邮电大学 刘 磊

清华大学 吴 昊

清华大学 李虹霁

航空工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学知识点归纳与总结. 理工、经济/徐海军等
主编. - 北京: 航空工业出版社, 2004. 8(2005. 7 重印)
ISBN 7-80183-420-8

I. 考… II. 徐… III. 高等数学 - 研究生 - 入学
考试 - 自学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 070808 号

考研数学知识点归纳与总结(理工类)

Kaoyan Shuxue Zhishidian Guina Yu Zongjie (Ligonglei)

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号 100029)

发行电话: 010-64978486 010-84926529

北京市燕山印刷厂

全国各地新华书店经售

2004 年 8 月第 1 版

2005 年 7 月第 2 次印刷

开本: 880 × 1230 1/16

印张: 27

字数: 540 千字

印数: 5001 - 8000

全二册定价: 50.00 元

本社图书如有残缺情况, 请联系 010 - 82742769 或 13501285859

前言

本书定位:

历年考研统计结果表明,数学考试成绩通常会对考研结果造成“决定性”影响。大部分考生数学考研成绩集中在 50 分到 110 分这个区间,考虑到每年数学平均六七十分的现状,如果您的成绩能够达到 120 分以上,那么您显然会在考试竞争中占据“绝对优势”!在我们的教学中已经验证:只要复习与训练方法正确,将一个考生的数学成绩从 70 分提高到 120 分是完全可以做到的事。

考研数学的复习分为三个阶段,一是对基础知识的深化理解,即将分散的知识点、公式定理、解题基本方法进行横向、纵向的联合,归结为一个体系,把单个知识点放到一个体系网络中去消化;二是对重难点的专门训练,这部分主要包括考研的常考知识点和自己复习中发现的弱项;三是整体的综合性测试,这是对知识体系的全面检验。这三个阶段在整个复习过程中是承上启下、环环相扣的。

基于以上两点认识,我们组织了清华大学、北京邮电大学、中国科学院数学所和中国人民大学的数学教师,编写了本书。

本书结构及使用建议:

本书完全按照《2006 全国硕士研究生入学统一考试——数学考试大纲》的要求,共分二十二章。每一章包含“考试要求”、“目标 90 分,深入理解篇”、“目标 115 分,稳步提高篇”、“目标 135 分,综合测试篇”四个部分。

1. 考试要求

考试要求部分包括大纲规定的本章的考试内容、考试要求和知识网络图。考生可以在开始复习前借助知识网络图迅速把握本章脉络,并且可以在反复复习时快速查漏补缺。

2. 目标 90 分,深入理解篇

纵观历年考研数学试题,其特点是博而精、广而专,覆盖了整个大学数学的知识点,同时考察的重点又非常突出,且不时有“新鲜”题目的出现。这就要求考生不仅要打下扎实的基础,而且要能够将基础知识融汇贯通。

“目标 90 分,深入理解篇”以考研大纲要求为基准,目标是为考生建立考研数学的大局观,强调数学整体的内在联系。这部分内容依据教材,结合考研大纲划分了知识块,所有的讲解都结合知识网络图和经典例题展开,每一部分的同步练习为考生准备了难度不大但技巧性强的题目用以巩固。

建议考生将这部分内容与课本结合使用。考生在开始一个知识块前,首先通读课本,花一些时间练习课后习题(为了节省时间,可以在心里想清楚题目的思路,不必全部下笔细算),然后研读本书的对应章节,配合同步练习理清概念间的联系。最后合上书,通过想象将本章梳理一遍。

每位同学根据自己数学基础的情况,可以调节课本和本章时间上的比例分配。整个数学知识体系完整而单个知识点模糊的同学应该加大课本的时间比例,逐个知识点攻读;知识点清楚但体系把握不完整的同学可以提高本书的时间比例,着重搞清楚各个知识点间的关系,做到牵一发而动全身。

3. 目标 115 分,稳步提高篇

“目标 115 分,稳步提高篇”的任务就是针对考研的重要考点专项突破。我们综合分析了过去十五年的考研数学真题,为每一章归纳出若干有代表性的专题,这些专题是最常考的知识点和大题的热点,每个专题都提供经典例题和多

种解法,使考生能够触类旁通、举一反三。

这部分是帮助考生建立考研数学的重点观。虽然课本那么厚,但并不是所有的知识点都会考,事实上有不少知识点从来就没有考过。所以考生要抓住复习重点,把精力集中在这里,就能取得事半功倍的效果,真正把“厚”书读“薄”。

考生在使用这部分时要注意“点睛”部分,学习里面提到的技巧、方法、策略等,然后结合习题,练习这些技巧、方法、策略。时间上要看看个人掌握的程度,到了后期可以只看这一部分内容。

4. 目标 135 分,综合测试篇

这部分着眼于考研拔高,通过练习来消化吸收前面学习的基础知识和专题。我们精选了有代表性的历年考研真题和经典习题,按照填空、选择、计算展开。考生要通过练习来达到熟练,而且要每隔一段时间再拿出来练习,把每一类题目的基本分析思路、基本解法和基本技巧做到烂熟于胸。这样到了考场拿到相同难度的题目就不会慌张,对考试临场保持镇定非常有用。

时间安排上,考生要结合其它科目的复习计划。建议考生练习本书所有的题目,但是如果真的时间不足,考生可以“心算”有讲解的题目,而笔算没有讲解的题目。所谓“心算”,就是看过题目后首先思考它可能考察哪块知识哪个点的问题,然后思考可以有哪些方法解决这种问题,然后具体到本题,思考自己要采用哪些方法,最后对照讲解修正自己的思路。这种方法可以在有空闲的任何时候进行,比如躺在床上时。而笔算要求完全按照考研的答题标准作答,不仅要讲究思路,而且要讲究格式,讲究卷面。

考研策略辅导

想必准备参加考研的同学,在大二大三时看到学校所谓“考研自习室”里师兄师姐起早贪黑的复习,心里早就有点害怕了吧。厚厚的书本背后是大到一天只需要打一次的开水瓶,一张“考研占座”的纸条随时为不速之客准备着,让人不由可气又心酸。没有办法,当社会就业压力的逐年增加,社会对人才的认可仍然与学历挂钩的当代,考研已经成为中国学生一生的第二次炼狱,当然最后“升仙”的还是只有一部分人。不过当你在学业与事业、爱情与友情间抉择,终而决定再次挑战自我的时候,有一句话一定要提醒各位考生:一定要了解自己。

了解自己实际是一种心理上的策略,这也是我们为考生准备的第一条忠告。考研不像高考,不再会有家长的帮助,一切都得靠自己。了解自己不仅包括了解自己希望去的地方、研究方向、报考的导师,还包括对自己实力的了解、自制力的把握,更包括对自己能付出多少有一个大概的认识。下面将逐条为考生解读考研的心理策略。

首先,自信但不盲目。考研过来的同学有一个共同的体会,那就是为合理的目标坚持到底就能胜利。这里讲的合理目标就是不盲目,具体体现在考研上就是学校和专业的选择。大家都知道清华这个好人大那个好,但是你知道的是全国人民都知道的,历年挤破门槛的不是一次两次。其实选择专业本身就是一门很有研究的学问,笔者感觉影响选择专业的因素包括个人爱好、就业情况、学校导师口碑、实验室项目,历年录取分数等等不一而足。其实中国有很多学校在某一方面是很有实力的,但因为学校的名气不大而不被人重视。大家不必过度盲目于若干名校,又不是高中生,何必为个名份挤那个小车?是否有把握是一定要考虑的因素。

其次,知己知彼百战不殆。笔者认识很多同学,在考研前甚至不了解自己报考专业上一年的录取分数,其实就算了解了它也还是远远不够的。考研四门课,别人能考多少自己能考多少要有个大致感觉,不必担心自己考得有多低,要担心的是自己比别人差多少。一般院校的研究生四门课只要都过线,总分达到 300 把握就会比较大,当然具体要因地制宜,还要亲自去了解。问问自己,政治英语能考多少,数学能考多少,专业课有没有十足把握不落于人,往年报考本专业的录取分数线如何,了解了这些就为后面的复习工作指明了方向、扫清了障碍。

再次,计划与变化并举。复习要有计划,同时结合信息引入变化,加上持之以恒的决心,一定可以帮助自己立于不败之地。大家在制定计划时一定要先做到了解自己,然后针对自己的强弱项安排时间,时间安排要结合报的考研班,旁听的专业课等因素,做到循序渐进,切忌一口吃个胖子,就是说不要想着一个月两个月搞定越多就越好。对数学来说,复习前期,要强调基础;复习中期,要强调熟练;复习后期,要强调联系。上述计划的建议不一定适合每个人,只是个大概的框架,大家在具体到个人时可以再作推敲。

最后,规律的作息和平和的心态至关重要。身体是革命的本钱,谁都不想考之前突然身心垮掉吧。我的一个学生

考研时每天的作息甚至精确到了分钟,早上七点五十起床,洗漱早饭后八点半到自习室,上午英语夹杂一会杂志(调剂一下)到十二点半,午饭后一点准时午休到两点半,下午三点开始政治,一般到六点整,然后晚饭加回宿舍娱乐,七点十五分晚上数学或专业课,直到十一点,十一点半准时睡觉。而制定的计划就按照各门课的内容安排到每一天的每一个小时。这样规律的作息就可以保证不会太累,而且效率很高,严格按照计划更有助于保持平和的心态。试想如果能一步步按计算好的进度向考研复习,心中有数,那对考研不会是害怕,只会是期待了。

时间安排表

时间安排因人而异,太过具体,作为面向广大考生的考研辅导书,我们不可能为所有人制定一个通用的方案,但是一个大概的思路框架会很有帮助,也能为考生省些时间,指明方向。

本书按复习梯度分成了不同的“目标级”,考生朋友们可以根据自己的情况进行重点学习。我们结合自身的辅导经验,为考生准备了一份复习进度安排表,供考生参阅借鉴。

时间	复习阶段	复习方法
七月——九月	第一轮:夯实基础阶段	认真掌握基础知识,以本书每章的第一部分和第二部分为起点,对书中讲解还不是很清楚的地方,一定要翻看课本。避免急功近利的想法,为后期复习扫清障碍。
九月——十一月	第二轮:强化提高阶段	快速复习本书每章的第一部分,回顾知识网络图,然后深入学习本书第二部分,并结合习题集练习。不仅要理解每道题,还要融会贯通“点睛”的内容。建议考生在复习过程中结合自己的特点做好笔记,以备后期扫除盲点。
十一月——十二月中旬	第三轮:巩固强化阶段	从本书每章第二部分和笔记看起,练习第三部分考研真题和经典习题,将知识体系提高到考试水平,做到对考试心中有数。
考前	第四轮:心态调整阶段	围绕本书每章第一部分和第二部分以及笔记展开最后复习,同时反复练习考研真题,尤其是最近几年的真题。培养遇事不慌乱的能力,为考试做好准备。

本书由北京邮电大学刘磊老师负责总体规化,并编写了高等数学一、二、三、四,概率论与数理统计一、二、三、四共八章内容;清华大学吴昊老师负责编写了高等数学五、六、七、八,概率论与数理统计五、六、七、八共八章内容;清华大学李虹霏老师负责编写线性代数全部共六章内容。另外非常感谢孙存学、费轶群、傅幼金和张海波在本书成书过程中给予的无私帮助和艰苦努力。希望我们的努力能够为考研路上奋斗的朋友们提供帮助,最终马到成功,人生更上一层楼!能力所限,书中疏漏不足之处恳请读者朋友们批评指正,也能为后来的考研战友们提供些许帮助。

目 录

第一部分 高等数学

第一章 函数 极限 连续	(1)
目标 90 分 深入理解篇	(1)
一、函数/1	二、极限/5
三、连续/8	
目标 115 分 稳步提高篇	(11)
专题一:函数的概念和基本性质/11	专题二:求极限的方法/12
专题三:闭区间上连续函数的性质/16	
目标 135 分 综合测试篇	(17)
第二章 一元函数微分学	(21)
目标 90 分 深入理解篇	(22)
一、导数/22	二、微分/26
目标 115 分 稳步提高篇	(30)
专题一:导数的定义/30	专题二:求导的方法/32
专题三:微分中值定理/34	专题四:导数的应用/36
专题五:不等式/39	
目标 135 分 综合测试篇	(40)
第三章 一元函数积分学	(45)
目标 90 分 深入理解篇	(46)
一、不定积分/46	二、定积分/48
目标 115 分 稳步提高篇	(53)
专题一:不定积分和定积分的计算/53	专题二:定积分的计算/56
专题三:变上限积分/58	专题四:定积分的应用/59
目标 135 分 综合测试篇	(63)
第四章 向量代数和空间解析几何	(68)
目标 90 分 深入理解篇	(69)
一、向量代数/69	二、空间解析几何/71
目标 115 分 稳步提高篇	(75)
专题一:向量三个积的性质/75	专题二:空间直线与空间平面/76
目标 135 分 综合测试篇	(81)
第五章 多元函数微分学	(83)
目标 90 分 深入理解篇	(84)
一、多元函数的极限与连续/84	二、多元函数的偏导数和全微分/85

三、多元函数微分法/87	四、多元函数微分的应用/89
目标 115 分 稳步提高篇	(95)
专题一:二元函数的极限、连续、偏导数和全微分/95	专题二:多元函数微分法/97
专题三:多元函数微分的应用/98	
目标 135 分 综合测试篇	(101)
第六章 多元函数积分学	(106)
目标 90 分 深入理解篇	(108)
一、二重积分/108	二、三重积分/111
三、第一类曲线积分(对弧长)/114	四、第二类曲线积分(对坐标)/115
五、两类曲线积分之间的关系/117	六、第一类曲面积分(对面积)/117
七、第二类曲面积分(对坐标)/119	八、两类曲面积分之间的关系/121
九、场论/122	
目标 115 分 稳步提高篇	(123)
专题一:二重积分/123	专题二:三重积分/127
专题三:曲线积分/130	专题四:曲面积分/136
专题五:场论/143	
目标 135 分 综合测试篇	(144)
第七章 无穷级数	(150)
目标 90 分 深入理解篇	(152)
一、数项级数/152	二、函数项级数/157
三、傅里叶级数/161	
目标 115 分 稳步提高篇	(164)
专题一:正项级数的判敛/164	专题二:任意项级数的判敛/166
专题三:幂级数/167	专题四:级数求和/169
专题五:傅里叶级数/171	
目标 135 分 综合测试篇	(172)
第八章 常微分方程	(178)
目标 90 分 深入理解篇	(179)
一、微分方程的有关概念/179	二、一阶微分方程/179
三、线性微分方程/182	四、二阶微分方程/184
目标 115 分 稳步提高篇	(187)
专题一:一阶微分方程/187	专题二:二阶及高阶微分方程/191
专题三:微分方程的简单应用/194	
目标 135 分 综合测试篇	(195)

第二部分 线性代数

第一章 行列式	(199)
目标 90 分 深入理解篇	(200)
一、行列式/200	二、克拉默法则/203
目标 115 分 稳步提高篇	(204)

专题一:行列式的性质应用/204	专题二:行列式的计算/205
专题三:克拉默法则的应用/207	
目标 135 分 综合测试篇	(208)
第二章 矩阵	(212)
目标 90 分 深入理解篇	(213)
一、矩阵的概念和一些特殊矩阵/213	二、矩阵的逆/215
三、初等变换/217	四、分块矩阵/219
目标 115 分 稳步提高篇	(221)
专题一:方阵的 n 次幂/221	专题二:矩阵的行列式计算/223
专题三:矩阵的逆和伴随矩阵/224	
目标 135 分 综合测试篇	(225)
第三章 向量	(230)
目标 90 分 深入理解篇	(231)
一、向量/231	二、线性相关性/231
三、向量组的秩/233	四、矩阵的秩/235
五、向量空间/236	六、Schmidt 正交化/236
目标 115 分 稳步提高篇	(237)
专题一:线性相关和线性无关/237	专题二:关于 $AB=0$ 题型处理方法/239
专题三:矩阵的秩/240	专题四:向量组的线性表出和秩/241
目标 135 分 综合测试篇	(242)
第四章 线性方程组	(246)
目标 90 分 深入理解篇	(247)
一、齐次线性方程组/247	二、非齐次线性方程组/250
目标 115 分 稳步提高篇	(253)
专题一:利用解的性质求线性方程组的通解/253	专题二:由 $B \neq 0, AB=0$ 条件求方程组的通解/254
专题三:两组线性方程组的解的问题/255	专题四:线性方程组的解与解析几何/256
目标 135 分 综合测试篇	(257)
第五章 矩阵的特征值和特征向量	(262)
目标 90 分 深入理解篇	(263)
一、特征值和特征向量/263	二、相似矩阵/266
三、矩阵的对角化/267	
目标 115 分 稳步提高篇	(271)
专题一:特征值、特征向量性质的应用/271	专题二:相似矩阵性质的应用/272
专题三:伴随矩阵的特征值和特征向量/274	专题四:实对称矩阵性质的应用/274
目标 135 分 综合测试篇	(276)
第六章 二次型	(278)
目标 90 分 深入理解篇	(279)
一、二次型/279	二、二次型的标准形/280
三、二次型的规范形/281	四、实二次型的正定性/282
目标 115 分 稳步提高篇	(285)
专题一:二次型的标准形和规范形/285	专题二:矩阵正定性质相关/286

专题三:矩阵正定性的有关证明/287

目标 135 分 综合测试篇 (288)

第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件与概率 (291)

目标 90 分 深入理解篇 (292)

一、随机事件/292

二、事件间的关系与运算/293

三、事件的概率/294

四、条件概率/296

五、独立性和独立重复试验/297

目标 115 分 稳步提高篇 (300)

专题一:古典概型和几何概型/300

专题二:概率、条件概率和全概率/301

专题三:事件的独立性和独立重复试验/305

目标 135 分 综合测试篇 (306)

第二章 随机变量及其分布 (308)

目标 90 分 深入理解篇 (309)

一、随机变量/309

二、分布函数/309

三、离散型随机变量/310

四、连续型随机变量/312

五、随机变量函数的分布/314

目标 115 分 稳步提高篇 (316)

专题一:随机变量的分布函数/316

专题二:离散型随机变量的概率分布/318

专题三:连续型随机变量的密度函数/320

专题四:随机变量函数的概率分布/322

第三章 二维随机变量的分布 (325)

目标 90 分 深入理解篇 (326)

一、二维随机变量及其概率分布/326

二、二维离散型随机变量/326

三、二维连续型随机变量/328

四、二维随机变量的独立性/329

五、常见二维随机变量的分布/329

六、随机变量简单函数的分布/331

目标 115 分 稳步提高篇 (333)

专题一:二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布/333

专题二:二维连续型随机变量的概率密度、边缘密度和条件密度/336

专题三:二维随机变量的独立性/337

专题四:随机变量简单函数的分布/338

目标 135 分 综合测试篇 (341)

第四章 随机变量的数字特征 (344)

目标 90 分 深入理解篇 (345)

一、离散型随机变量的数字特征/345

二、连续型随机变量的数字特征/346

三、二维随机变量的数字特征/347

目标 115 分 稳步提高篇 (349)

专题一:随机变量的数字特征/349

专题二:随机变量函数的数字特征/353

目标 135 分 综合测试篇 (356)

第五章 大数定律和中心极限定理 (359)

目标 90 分 深入理解篇	(360)
一、切比雪夫不等式/360	二、大数定律/360
三、中心极限定理/362	
目标 115 分 稳步提高篇	(363)
专题一:切比雪夫不等式/363	专题二:中心极限定理/363
目标 135 分 综合测试篇	(365)
第六章 数理统计的基本概念	(366)
目标 90 分 深入理解篇	(367)
一、总体和样本/367	二、常见抽样分布及分位数/367
三、正态总体的几个常用分布转化/369	
目标 115 分 稳步提高篇	(372)
专题一:常用统计量和常见抽样分布/372	专题二:正态总体的几个常用分布转化/374
目标 135 分 综合测试篇	(375)
第七章 参数估计	(378)
目标 90 分 深入理解篇	(379)
一、点估计/379	二、区间估计/381
目标 115 分 稳步提高篇	(386)
专题一:矩估计和最大似然估计/386	专题二:单个正态总体的区间估计/389
专题三:两个正态总体的区间估计/389	
目标 135 分 综合测试篇	(391)
第八章 假设检验	(395)
目标 90 分 深入理解篇	(396)
一、假设检验的一些重要概念/396	二、正态总体均值和方差的假设检验/397
目标 115 分 稳步提高篇	(399)
专题一:单个正态总体均值和方差的假设检验/399	专题二:两个正态总体均值和方差的假设检验/399
目标 135 分 综合测试篇	(400)

第一部分 高等数学

第一章 函数 极限 连续

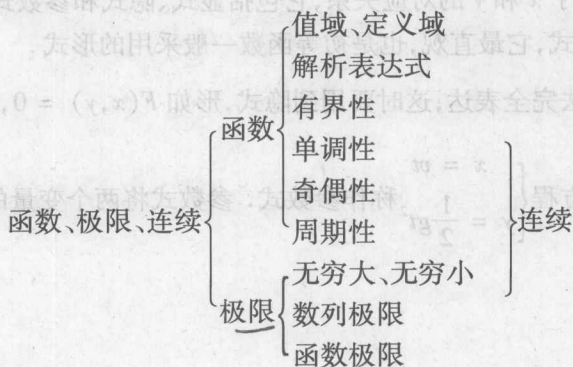
【考试内容】

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 简单应用问题函数关系的建立 数列极限与函数极限的定义及其性质 函数的左极限和右极限 无穷小和无穷大的概念及其关系 无穷小的性质及无穷小的比较 极限的四则运算 极限存在的两个准则 两个重要极限 函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质

【考试要求】

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立简单应用问题的函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念,以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限.
9. 理解函数的连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

【知识网络图】





目标 90 分 · 深入理解篇

一、函数

1. 函数

设变量 x, y 分别属于集合 X, Y , 对于 X 中的每一个元素 x , 通过一定法则 f 总可以在 Y 中找到对应的唯一元素 y , 那么称 f 为定义在 X 上的一个函数, 称变量 y 为变量 x 的函数, 记作 $y = f(x)$. 函数就是一种对应关系.

例 1.1.1: 判断函数 $\lg x^2$ 和 $2\lg x$ 是否相同.

解: 函数由定义域和对应法则决定, 只有这两个都相等才能称两个函数相同.

第一个函数的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 第二个函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 所以这两个函数不相同.

例 1.1.2: 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$, 则 _____.

$$(A) f(-x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ -x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$$

$$(B) f(-x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x > 0 \\ -x^2, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$(C) f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$$

$$(D) f(-x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

解: 选(D). 代 x 为 $-x$, 则 $f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^2 - x, & x < 0 \end{cases}$.

【同步练习】

1. 求 $\frac{x-1}{x^2-5x+6} + \frac{1}{\sqrt{\ln x}}$ 的定义域.

2. 求 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ 的定义域.

函数有它的解析表达式和基本的四个性质, 有界性、单调性、周期性和奇偶性.

2. 函数的解析表达式表达了 x 和 y 的对应关系, 它包括显式、隐式和参数式三种形式.

显式: 形如 $y = f(x)$ 的称作显式, 它最直观, 也是初等函数一般采用的形式.

隐式: 有时有些关系用显式无法完全表达, 这时要用到隐式, 形如 $F(x, y) = 0$, 如椭圆函数 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

参数式: 形如平抛运动的轨迹方程 $\begin{cases} x = vt \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$ 称作参数式. 参数式将两个变量的问题转化为一个变量的问题, 从而

使很多难以处理的问题简化.

【同步练习】

$$\frac{1}{x} = t \quad x = \frac{1}{t}$$

$$f(t) = \frac{1}{t} + \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t} + \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t}$$

3. 设 $f(\frac{1}{x}) = x + \sqrt{1+x^2}, x < 0$, 求 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

4. 已知参数方程 $\begin{cases} x(t) = 1 + t \\ y(t) = 1 + t^2 \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$, 求 $y = y(x)$ 的表达式及值域.

$$y = x^2 - 2x + 2$$

3. 有界性: 若函数 $y = f(x)$ 定义在 X 上, 且存在常数 $M > 0$, 使得对于任意 x 属于 X , 都有 $|f(x)| \leq M$, 称 $f(x)$ 在区间 X 上有界. 注意有界函数是同时有上下界, 而只有上界或只有下界都不能称之为有界函数.

4. 单调性: 设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 对于任意 x_1, x_2 属于 X , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在区间 X 上单调增加, 若 $f(x_1) < f(x_2)$, 称 $f(x)$ 严格单调增加;

当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 称 $f(x)$ 在区间 X 上单调减少, 若 $f(x_1) > f(x_2)$, 称 $f(x)$ 严格单调减少.

如图 1.1.1 和 1.1.2 所示为严格单调增函数和严格单调减函数的两种情况.

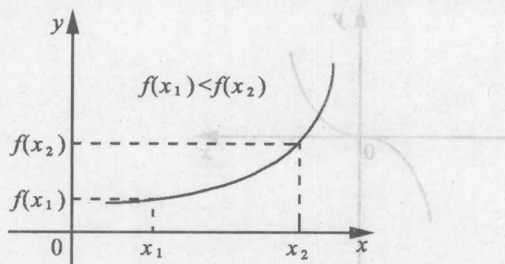


图 1.1.1 严格单调递增

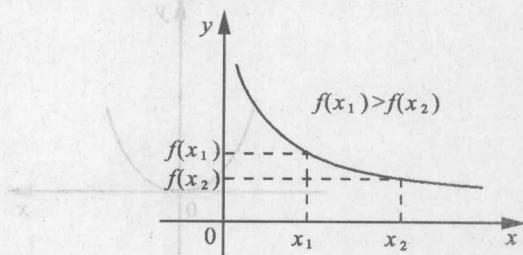


图 1.1.2 严格单调递减

例 1.1.3: 说明下列函数在指定区间上的单调性.

(1) $y = \frac{x}{1-x}, x \in (-\infty, 1)$

解: 根据定义设 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1), x_1 < x_2$,

$$y(x_2) - y(x_1) = \frac{x_2}{1-x_2} - \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2 - x_1}{(1-x_2)(1-x_1)} > 0$$

故 $y = \frac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty, 1)$ 内单调增加.

(2) $y = x + \ln x, x \in (0, +\infty)$

解: 根据定义设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 < x_2, y(x_2) - y(x_1) = (x_2 - x_1) + \ln \frac{x_2}{x_1} > 0$ 故 $y = x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加.

例 1.1.4: 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, 且 $a > 0, b > 0$. 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调减少, 证明 $f(a) + f(b) \geq f(a+b)$.

解: 从已知推未知, 就要特别注意题设已知条件的内涵, 以及已知条件和所求问题的关系.

根据单调减少定义, $\frac{f(a)}{a} \geq \frac{f(a+b)}{a+b}, \frac{f(b)}{b} \geq \frac{f(a+b)}{a+b}$, 化简得

$$(a+b)f(a) \geq af(a+b) \quad (1)$$

$$(a+b)f(b) \geq bf(a+b) \quad (2)$$

(1) + (2) 并化简, 就得到 $f(a) + f(b) \geq f(a+b)$.

【同步练习】

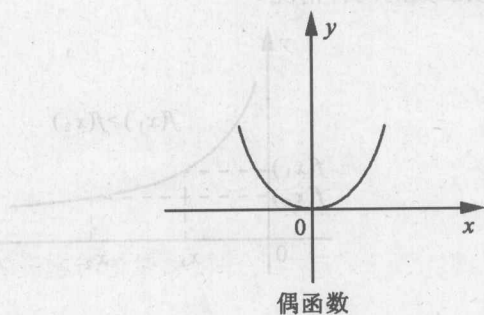
5. 求 $y = \frac{|x-1|}{x}$ 的单调区间.

6. 判断 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在其定义域内的有界性.

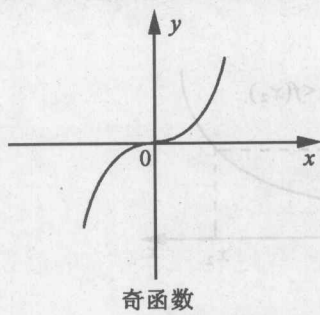
5. 周期性: 函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若存在一个正数 T , 使得对于定义域内的每个 x 都满足 $x + T$ 仍在定义域内, 且 $f(x + T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期. 实际上如果 T 为 $f(x)$ 的周期, 那么对任意非零整数 k , kT 仍是 $f(x)$ 的周期, 一般我们习惯称最小的 T 为 $f(x)$ 的最小正周期. 注意周期函数不一定有最小正周期, 比如函数 $f(x) = C$.

例 1.1.5: $\sin \frac{1}{x}, \sin \sqrt{x}, \sin x^2$ 等不是周期函数.

6. 奇偶性: 函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 如果对于定义域内任意 x , 都满足 $f(x) = f(-x)$, 那么称 $f(x)$ 为偶函数, 如 $f(x)$ 为常数, $f(x) = x^2, f(x) = \cos x$; 相同条件下如果满足 $f(x) = -f(-x)$, 那么称 $f(x)$ 为奇函数, 如 $f(x) = x, f(x) = \sin x$. 奇偶性概念中定义域对称是重要的前提条件. $f(x) = 0$ 既是奇函数, 又是偶函数.



偶函数



奇函数

图 1.1.3

例 1.1.6: 证明 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 是奇函数, $x \in (-\infty, +\infty)$.

解: 首先判断定义域是否关于原点对称, 然后根据定义对函数原形式变形

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x)$$

所以 $f(x) = \ln x + \sqrt{1+x^2} (x \in (-\infty, +\infty))$ 是奇函数.

【同步练习】

7. 判断函数 $f(x) = (x - \log_3 \frac{2+x}{2-x}) \log_2 \frac{x+1}{x-1}$ 的奇偶性.

8. 把 $y = \frac{1}{x^2 - x + 1}$ 表示为一个偶函数和一个奇函数之和.

7. 复合函数: 简单的讲, 复合函数就是若干个函数的嵌套, 这样最简单的复合函数就是两个函数的嵌套. 已知函数 $y = f(u)$ 定义在 M 上, $u = g(x)$ 定义在 X 上, 其值域为 N . 如果 $M \cap N \neq \emptyset$, 那么称 $f(g(x)) = y$ 为 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合而成的函数. 复合函数最基本的条件是 $f(u)$ 的定义域和 $g(x)$ 的值域的交集不为空.

例 1.1.7: 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f(f(f(x)))$ _____.

解: 虽然复合了三层, 但是只要一层一层从内向外, 注意端点就可以.

$$|f(x)| \leq 1, \text{ 则 } f(f(x)) = 1, \text{ 最后 } f(f(f(x))) = 1$$

8. 分段函数: 若函数在定义域的不同区间上表达式不同, 则称之为分段函数.

9. 反函数: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 X , 值域为 Y . 若把 y 作为自变量, x 作为因变量, 可以得到另一个函数 $x = g(y)$, 且满足 $f[g(y)] = y$, 则称 $x = g(y)$ 为 $y = f(x)$ 的反函数.

例 1.1.8: 求 $y = \frac{1 + \sqrt{1+x}}{1 - \sqrt{1-x}}$ 的反函数.

解: 令 $t = \sqrt{1-x}$, 则 $y = \frac{1+t}{1-t}$

$$\therefore t = \frac{y-1}{y+1}, \text{ 即 } \sqrt{1-x} = \frac{y-1}{y+1}$$

$$\therefore x = 1 - \left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2 = \frac{4y}{(y+1)^2}$$

可见所求反函数为 $x = \frac{4y}{(y+1)^2}$, 通常表示为 $y = \frac{4x}{(x+1)^2}$.

10. 初等函数: 由常数和基本初等函数经过有限次有理运算与复合产生的, 且能用一个解析式表达的函数称为初等函数. 基本初等函数包括幂函数、对数函数、指数函数、三角函数、反三角函数.

函数作为高等数学的基本概念, 有一些问题需要在一开始就澄清:

1. 函数具有三个要素, 定义域、值域、对应法则, 两个函数只有这三者完全一致, 才能说它们相等;
2. 函数定义域有以下规则: 零不能做除数, 负数不能开平方, 正数才能求对数, 如果函数表达式由几项组成, 那么其定义域应是各项自变量取值集合的交集, 同时还要符合实际条件.

另外这一部分的题目基本上都是考查最基本的概念, 在学习和练习的过程中要注意概念与题设的转化, 尤其小心像区间边界、正负号的细节.

【同步练习】

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = 2^x$, 求 $f(g(x))$, $g(f(x))$.

10. 求满足 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x$ 的 $f(x)$, $x \in (-1, 1)$.

二、极限

1. 极限

极限是一种变化趋势, 虽然其定义颇为拗口, 但实际上它可以理解为一种有尽头的函数关系, 比如世界人口随时间变化, 理论上讲人口会无止境的增长, 但实际上由于自然界的限制, 人口对于时间的函数应该是, 时间无限长, 但人口有一个上限(只考虑居住在地球上、太阳寿命无限的理想情况). 这里顺便为考生提供一种复习的方法, 就是举例的方法, 比如把函数的概念用到人口随时间增长的关系上, 大家在复习时, 可以尝试把有关函数的所有概念和方法都往这个关系上套, 比如单调性, 比如极限, 这样会更好理解, 更容易记忆.

2. 数列极限: 如果对于任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正整数 N , 使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n , 不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 都成立, 那么就称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 如果数列没有极限, 则称数列是发散的. 注意收敛的数列, 它的极限是唯一的, 而且它一定是有界的.

例 1.1.9: “对任意的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ ” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 _____.

(A) 充分但非必要条件

(B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既非必要也非充分条件

解: 将题干与数列极限定义相比较, 发现多出来的一个是 $n \geq N$ 的等于号, 显然若取一个 $N_0 = n - 1$, 则 $n > N_0$, 另一个多出来的是 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ 中的 2 倍和等号, 若取一个 $\varepsilon_0 = 3\varepsilon$, 则 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon < \varepsilon_0$, 这样就将 $\varepsilon - N$

定义转化为 $\varepsilon_0 - N_0$ 定义, 实际上是等价的. 答案为 C.

【同步练习】

11. 证明: 数列 $a_n = (-1)^n$ 没有极限.

3. 函数极限: 自变量趋近一个值, 如果对应的函数值也无限趋近于某一个确定的值, 那么这个确定的数就叫做这一变化过程中函数的极限. 具体的定义同学们可以参考课本.

极限定义的等价命题:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow -\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - A] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

利用极限的等价可以解决一些难以计算的问题.

例 1.1.10: 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

解: 这种证明就是在题目和定义之间寻找共同点. 这里 $|f(x) - A| = |x - x_0|$, 因此对于任意给定的正数 ε , 总可取 $\delta = \varepsilon$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta = \varepsilon$ 时, 能使得不等式 $|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon$ 成立, 所以 $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

【同步练习】

12. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, g(x) = x^2 + 1$, 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$.

4. 左极限、右极限: 函数从点 x_0 的左侧无穷趋近于 x_0 时所得的极限称为 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$ 或 $f(x_0 - 0) = a$; 同理函数从点 x_0 的右侧无穷趋近于 x_0 时所得的极限称为 $f(x)$ 在 x_0 处的右极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$ 或 $f(x_0 + 0) = a$.

注意: 极限存在 $\Leftrightarrow$ 左右极限都存在且相等. 对于分段函数的间断点, 一定要讨论它的左右极限, 而且左右极限的关系也确定了这个间断点的分类.

例 1.1.11: 函数 $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

解: $f(0 - 0) = -1, f(0) = 0, f(0 + 0) = 1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

【同步练习】

13. 设 $f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x-1}, & x > 1 \\ ax, & x \leq 1 \end{cases}$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 求 a .

5. 无穷小: 如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的极限为零, 则称 $f(x)$ 为 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时的无穷小. 由于一个无穷小可能比另一个无穷小还要“小”, 所以比较无穷小时就存在四种关系: 高阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小和低阶无穷小.

设 $\alpha(x), \beta(x)$ 为 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小, 则