普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学
线性代数

上海交通大学数学系
线性代数课程组 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学数学
线性代数

上海交通大学数学系
线性代数课程组 编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材“大学数学”系列教材之一，秉承上海交通大学数学基础课程“基础厚、要求严、重实践”的特点编写而成。

本书在为学生提供必要的基础知识和基本技能的同时，注重训练和培养学生的思维能力和数学建模能力。在教材编写中，尽可能指出各个概念和理论间的相互联系；从矩阵论的角度，力图体现变换 - 分类 - 标准形 - 不变量这条主线，帮助学生对有关数学思想方法有所领悟。全书语言简练，推导严谨，结构完整，重视与后继课程的联系与衔接，特别对线性空间、线性变换以及矩阵的等价、相似、合同等标准形理论的推导作了认真的探讨和改进。本书共五章，包括矩阵与行列式、线性方程组理论、相似矩阵、二次型与对称矩阵、线性空间与线性变换等内容，各节与各章后分别编选了一定数量的习题。

本书可供对线性代数有较高要求的理工类专业用作教材或教学参考书，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

大学数学. 线性代数/上海交通大学数学系线性代数课程组编. — 北京: 高等教育出版社, 2008. 6

ISBN 978-7-04-023893-8

I. 大… II. 上… III. ①高等数学 - 高等学校 - 教材 ②线性代数 - 高等学校 -教材 IV. 013 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 071730 号

策划编辑 李艳馥 **责任编辑** 宋瑞才 **封面设计** 王凌波 张 楠
责任绘图 郝 林 **版式设计** 马敬茹 **责任校对** 姜国萍
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京东光印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008 年 6 月第 1 版
印　　张	19.75	印　　次	2008 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	370 000	定　　价	22.90 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　23893-00

前　　言

线性代数是大学非数学类各专业的重要基础课，随着科学技术的发展和社会的进步，大学理工类和经济管理类各专业对线性代数课程提出了新的要求。线性代数课程不但承担了为学生提供必要的基础知识和基本技能的任务，而且作为训练和培养学生思维能力和数学建模能力的载体，它也发挥了重要作用。本书就是试图反映这种变化和要求。

本书比较系统地介绍了线性代数的基本概念，基础理论和主要方法。全书共分五章。第一章介绍矩阵和行列式的概念，运算和基本性质，以及重要计算方法，指出矩阵与行列式之间的内在联系。线性方程组理论是线性代数课程中最基本的内容，矩阵与 n 维向量空间是研究线性方程组理论的两个基本工具。本书第二章介绍 n 维向量空间的理论初步。在此基础上，给出了线性方程组的完整理论。第三章介绍相似矩阵的概念以及与之相关的特征值、特征向量、特征多项式与最小多项式等重要概念；给出了矩阵相似于对角矩阵的充分必要条件，还介绍了矩阵相似标准形的简单应用。第四章介绍二次型与对称矩阵的基本理论。首先介绍化二次型为标准形的配方法，证明了实二次型的惯性定理并由此解决了实二次型的分类问题，给出了正定二次型的判别法则。从矩阵的角度来看，我们给出了实对称矩阵合同标准形的基础理论。第五章介绍有限维抽象线性空间理论的基本概念和基本性质，还简要介绍了一类带度量的线性空间 —— 有限维欧氏空间。最后概要介绍线性变换的基本概念以及线性变换与矩阵之间的关系。

在教材编写中，尽可能指出各个概念和理论之间的相互联系。我们为研究线性方程组理论而引入 n 维向量空间的概念。反过来，向量组的线性相关性问题其实就是相应的齐次线性方程非零解的存在性问题。将一个向量用一组向量线性表出的问题可化为相应的线性方程组的求解问题。

从矩阵论的角度来说，线性代数的很多基本内容可表述为研究矩阵在给定类型的变换之下的不变性与分类问题。在本书中，我们力图体现变换 - 分类 - 标准形 - 不变量这条主线。着重介绍了矩阵在初等变换下矩阵的相抵分类与标准形问题。由此引出了矩阵在初等变换下的不变量 —— 秩。这是研究线性方程组理论的核心概念。我们分别介绍了实对称矩阵在合同变换和正交相似变换下的分类与标准形问题。我们还介绍了矩阵的相似变换与相似标准形的有关概念。希望通过这样的处理，让学生对有关的数学思想方法有所领悟。

我们在本书中编选了一定数量的习题。习题共分两类，在各节之后的习题用于理解本节内容的基本概念和基础理论及掌握有关的计算方法之用，各章之后的习题具有一定的综合性，用于巩固和提高之用，其中少量习题有一定难度。

本书可供理工类对线性代数有较高要求的专业用作教材或教学参考书。由于各专业的要求不同和教学时数的不同，对本书的内容可作适当取舍。

本书第一、二章由沈灏编写，第三章由辛玉梅编写，第四章由王纪林编写，第五章由辛玉梅和蒋启芬编写。第一、二、三、五章习题由蒋启芬和辛玉梅选编，第四章习题由王纪林选编。全书由沈灏统稿。崔振校阅了本书的第一、二、四章。张媛、孙园两位博士和潘徐敏硕士负责全书电子文档的排版和录入，为本书的出版作出了重要贡献。本书的出版得到高等教育出版社和上海交通大学数学系的关心和支持，谨向他们表示衷心的感谢。

编者

2008 年 4 月

目　　录

第一章　矩阵与行列式

§1.0　预备知识

从现代数学的观点看，代数学的主要研究对象是各种**代数结构** (algebraic structure)，即带有**代数运算** (algebraic operation) 的集合. 为了行文上的方便和表述的严密性，在进入正题之前，我们简要介绍一类常用的代数结构 —— 数域. 为此先引入集合论的一些基本概念和记号.

1.0.1　集合

集合 (set) 的概念是数学中最基本的概念之一，要给出集合的精确定义是十分困难的. 我们将满足于把集合看作是 "由具有一定属性的事物所组成的一个整体" 这样一种朴素的理解，而把组成一个集合的事物叫做这个集合的**元素** (element). 作为例子，我们可以考虑全体正整数的集合、绝对值不大于 5 的全体正整数的集合、能被 7 整除的全体正整数的集合、闭区间 $[a,b]$ 上全体一元连续函数的集合、平面上垂直于已知直线 l 的全体直线的集合、一元 n 次方程 $x^n-1=0$ 的全体复数根的集合等.

若 a 是集合 S 的元素，则称 a 属于 S，记作 $a\in S$. 若 a 不是 S 的元素，则称 a 不属于 S，记作 $a\overline{\in}S$ 或 $a\notin S$.

定义 1.0.1　设 S 与 T 为两个集合，若对任意 $a\in S$，都有 $a\in T$，则称 S 为 T 的**子集** (subset)，记作 $S\subseteq T$ 或 $T\supseteq S$. 若 $S\subseteq T$ 与 $T\subseteq S$ 同时成立，则称集合 S 与 T 相等，记作 $S=T$. 若 $S\subseteq T$ 但 $S\neq T$，则记作 $S\subset T$ 或 $T\supset S$.

不包含任何元素的集合称为**空集** (empty set)，通常用 $\varnothing$ 表示空集. $\varnothing$ 是任意一个集合的子集.

任一非空集合 S 都有两个子集，即 S 本身和空集 $\varnothing$，叫作 S 的**平凡子集** (trivial subset). S 的不同于其自身的子集叫作 S 的**真子集** (proper subset).

表示集合的方法有多种，常用的有以下两种:

枚举法 (enumeration): 这是通过将集合的元素逐个列出以表示集合的方法. 例如 $A=\{2,3,5,7,11\}$ 表示 A 是由 $2,3,5,7$ 和 11 这 5 个素数组成的集合，$B=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$ 表示 B 是由 $\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}$ 这 3 个元素组成的集合.

描述法 (description): 这是通过列出集合中全体元素所共有的性质或应满足的条件来刻画集合的方法. 通常用 $S=\{x:\ P(x)\}$ 这种形式来表示 S 是由所有具有性质 P 的元素所组成的集合, 或用 $S=\{x\in A:\ P(x)\}$ 这种形式来表示 S 是由集合 A 中具有性质 P 的所有元素所组成的集合.

我们用描述法给出由已知集合构造新集合的几个常用方法.

定义 1.0.2 设 A 与 B 为两个集合, 令

$$A\bigcap B=\{x:\ x\in A \text{ 且 } x\in B\},$$

$$A\bigcup B=\{x:\ x\in A \text{ 或 } x\in B\},$$

$$A-B=\{x\in A:\ x\overline{\in} B\},$$

$A\bigcap B$, $A\bigcup B$ 与 $A-B$ 依次叫作 A 与 B 的**交** (intersection), **并** (union) 和**差** (difference). A 与 B 的差 $A-B$ 也常表示成 $A\setminus B$.

集合 A 与 B 的交、并和差可用图 1.0.1 所示的 Venn 图直观表示:

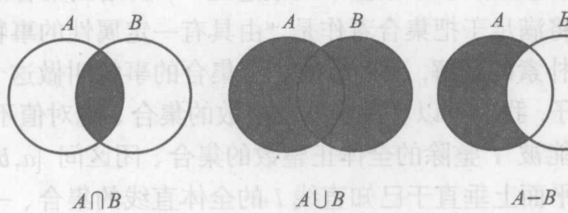

图 1.0.1

定义 1.0.3 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 为 k 个集合, $k\geqslant 1$. 令

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_k=\{(a_1,a_2,\cdots,a_k):\ a_i\in A_i,\ 1\leqslant i\leqslant k\},$$

并规定对 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_k$ 中两个元素 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 与 $(b_1,b_2,\cdots,b_k)$, 当且仅当对所有 i, $1\leqslant i\leqslant k$, 都有 $a_i=b_i$ 时称这两个元素**相等**, 记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)=(b_1,b_2,\cdots,b_k)$, 则称 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_k$ 为 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 的**直积** (direct product) 或**笛卡儿积** (Cartesian product). 当 $A_1=A_2=\cdots=A_k=A$ 时, 令

$$A^k=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{k\text{ 个 }A},$$

A^k 叫作 A 的 k **次幂** (k-th power).

定义 1.0.4 设 S 为集合, 令

$$2^S = \{X:\ X \subseteq S\},$$

即 2^S 是以集合 S 的所有子集作为元素所组成的集合, 叫作 S 的**幂集合**.

例 1.0.1 设 $S = \{a, b, c\}$, 则

$$2^S = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

元素个数有限的集合叫作**有限集** (finite set). 下面给出有限集的基数的定义.

定义 1.0.5 设 S 为有限集, 则称 S 中所包含元素的个数为 S 的**基数** (cardinality), 记作 $|S|$.

例 1.0.2 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是有限集, $|A_i| = n_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, 则 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ 也是有限集, 且

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = \prod_{i=1}^{k} n_i = n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_k.$$

若 S 为有限集, 则 S 的幂集合 2^S 也是有限集, 且

$$|2^S| = 2^{|S|}.$$

1.0.2 数集

由全体复数组成的集合叫作**复数集**, 复数集的非空子集叫作**数集**. 为了叙述的简洁和方便, 我们将一些常用的数集用特定的记号表示:

$\mathbf{Z}^+$: 全体正整数的集合;

$\mathbf{Z}$: 全体整数的集合;

$\mathbf{Q}$: 全体有理数的集合;

$\mathbf{R}$: 全体实数的集合;

$\mathbf{C}$: 全体复数的集合.

利用描述法, 由上述数集还可构造出新的重要数集.

例 1.0.3 令

$$\mathbf{Z}[i] = \{a + bi:\ a, b \in \mathbf{Z}\},$$

此处 $i = \sqrt{-1}$. $\mathbf{Z}[i]$ 中的元素叫 **Gauss 整数**. 一般地, 对给定的整数 d, 令

$$\mathbf{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d}:\ a, b \in Z\},$$

即 $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ 是由所有形如 $a + b\sqrt{d}$ 的复数所组成的数集, 此处 a 与 b 为任意整数.

例 1.0.4 设 n 为正整数, 令

$$S=\{x\in\mathbf{C}:\ x^n-1=0\},$$

即 S 是由方程 $x^n-1=0$ 的全体复数根 (即 n 次**单位根**) 组成的数集, 显然有 $|S|=n$.

1.0.3 数域

在复数集 $\mathbf{C}$ 上定义有加法、减法、乘法和除法四种代数运算, 统称四则运算. 在四则运算中, 加法和乘法这两种运算是基本的, 减法和除法分别是加法和乘法的逆运算. 对任意 $a,b\in\mathbf{C}$, 都有 $a+b\in\mathbf{C}$, $a-b\in\mathbf{C}$ 及 $a\cdot b\in\mathbf{C}$, 并且当 $b\neq 0$ 时还有 $a\div b\in\mathbf{C}$, 即复数集 $\mathbf{C}$ 关于数的加法、乘法及它们的逆运算都**封闭** (closed). 由此引出下述定义.

定义 1.0.6 设 K 为至少包含两个元素的数集, 若 K 关于数的加法、乘法及其逆运算都封闭, 则称数集 K 关于加法和乘法组成的**代数结构** $(K,+,\cdot)$ 为一个**数域** (number field), 在不致引起混淆的情况下, 常简单地称 K 为一个数域.

例 1.0.5 有理数集 $\mathbf{Q}$, 实数集 $\mathbf{R}$ 与复数集 $\mathbf{C}$ 关于四则运算都封闭, 因此 $(\mathbf{Q},+,\cdot)$, $(\mathbf{R},+,\cdot)$ 与 $(\mathbf{C},+,\cdot)$ 都是数域, 或者说 $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{C}$ 都是数域, 依次叫作**有理数域** (field of rational numbers), **实数域** (field of real numbers) 和**复数域** (field of complex numbers).

例 1.0.6 令 $\mathbf{Q}(i)=\{a+bi:\ a,b\in\mathbf{Q}\}$, 则对 a_1+b_1i, $a_2+b_2i\in\mathbf{Q}(i)$, 有

$$(a_1+b_1i)\pm(a_2+b_2i)=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)i\in\mathbf{Q}(i),$$
$$(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i\in\mathbf{Q}(i),$$

当 $a_2+b_2i\neq 0$ 时有

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i\in\mathbf{Q}(i),$$

因此 $\mathbf{Q}(i)$ 是一个数域, 叫作**Gauss 数域** (Gaussian number field).

定义 1.0.7 设 K_1 与 K_2 为数域, 若 $K_1\subseteq K_2$, 则称 K_1 为 K_2 的一个**子域** (subfield).

我们来证明下述关于数域的有趣结论.

定理 1.0.1 任意一个数域都包含有理数域 $\mathbf{Q}$ 作为子域.

证 设 K 为数域, 则 K 至少包含两个元素, 因此必有某个非零复数 $a \in K$. 于是由 K 关于减法与除法运算的封闭性得

$$0 = a - a \in K, \qquad 1 = \frac{a}{a} \in K.$$

从而对任意正整数 n, 都有

$$n = 1 + 1 + \cdots + 1 \in K, \qquad -n = 0 - n \in K.$$

因此 K 包含全体整数, 即 $\mathbf{Z} \subseteq K$. 设 a 为有理数, 则存在 $m, n \in \mathbf{Z}$, $m \neq 0$, 使 $a = \dfrac{n}{m} \in K$, 因此 $\mathbf{Q} \subseteq K$, 即得结论. □

1.0.4 求和号 $\sum$

为了行文上的简洁与方便, 我们常用求和号表示由多项连加所得到的和式,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

这里的 $\sum$ 叫作**求和号**, i 叫作**求和指标**, a_i 叫作**一般项**或**通项**. 求和指标 i 不一定从 1 开始, 也可以从 0 或别的某个整数开始.

例 1.0.7 前 n 个正整数的平方和可表示为 $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2$, 即

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

例 1.0.8 n 次多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 可表示为 $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, 即

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

不难验证, 若 s 与 t 为两个与 i 无关的常数, 则

$$\sum_{i=1}^{n} (s a_i + t b_i) = s \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i + t \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

在某些较为复杂的场合, 我们也使用二重求和.

设 $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, 我们要求 $m \times n$ 个数 a_{ij} 的和 S. 将这 $m \times n$ 个数排列成如下 m 行 n 列的长方形阵列

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}. \end{array} \tag{1.0.1}$$

为了求出和 S, 我们可以先按行相加, 求出同一行上 n 个数的和 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$, 然后再将各行的和相加, 则得

$$S=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right). \tag{1.0.2}$$

我们也可先按列相加, 求出同一列上 m 个数的和 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$, 然后再将这些和相加, 则得

$$S=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right). \tag{1.0.3}$$

比较 (1.0.2) 与 (1.0.3) 两式得

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right), \tag{1.0.4}$$

即二重求和可以交换求和次序.

有时在讨论二重求和时, 还会对求和指标再加上某些限制条件. 例如下面两种情形常会遇到.

例 1.0.9

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}=a_{11}+(a_{21}+a_{22})+(a_{31}+a_{32}+a_{33})+\cdots+(a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn}),$$

即求和指标 i 可以自由地取遍从 1 到 n 的整数, 而对取定的 i, 求和指标 j 只能取从 1 到 i 的全体整数.

例 1.0.10

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}=(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})+(a_{22}+a_{23}+\cdots+a_{2n})+\cdots+a_{nn},$$

这里, 求和指标 j 可以自由地取遍从 1 到 n 的整数, 而对取定的 j, 求和指标 i 必须从 j 到 n 的全体整数. 事实上, 可以验证下述等式,

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}. \tag{1.0.5}$$

例 1.0.11 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为如下两个多项式:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$
$$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m,$$

则它们的积为

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{t=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=t} a_ib_j \right) x^t.$$

习 题 1.0

1. 令 $Q(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbf{Q}\}$. 试证 $Q(\sqrt{2})$ 是一个数域.
2. 若数域 $V \supset \mathbf{R}$, 试证 $V = \mathbf{C}$.
3. 试证任一数集若对减法封闭, 则必对加法封闭.
4. 试用集合的记号表示下列集合:
   (1) 偶数集; (2) 以 7 除余 5 的自然数;
   (3) 不等式 $ax + b > 0$ 的解集; (4) $\{x : \sin x > 1\}$;
   (5) 在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中每次取两个构成的集合.
5. 设 $A = \{a, b, c\}$, 试写出 A 的幂集 $P(A)$, 并计算它的元的个数.
6. 说出下列各集的意义:
   $\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, b\}, \{\{a, b\}\}, \{A\}, \{A, B\} \{\{A\}, \{B\}\}$.
7. 试讨论下述关系是否成立:
   (1) $\{\varnothing\} \subset A$; (2) $\varnothing \in A$;
   (3) $\varnothing \subset A$; (4) $\{\varnothing\} \in A$;
   (5) $\{\varnothing\} \in P(A)$; (6) $\{\varnothing\} \subset P(A)$;
   (7) $A \in P(A)$; (8) $A \subset P(A)$.
8. (1) 若对任意集合 M, 都有 $A \bigcup M \subset B \bigcup M$, 则 $A \subset B$.
   (2) 若对任意集合 M, 都有 $A \bigcap M \subset B \bigcap M$, 则 $A \subset B$.
   (3) 若 $A \bigcup B \subset A \bigcap B$, 则 $A = B$.
   (4) 若 $A \subset B, C$ 为任一集合, 则必有 $A \bigcup C \subset B \bigcup C; A \bigcap C \subset B \bigcap C$.
9. 举例指出下列各结果的逆式不成立:
   (1) 若 $B = C$, 则 $A \bigcup B = A \bigcup C$;
   (2) 若 $B = C$, 则 $A \bigcap B = A \bigcap C$;
   (3) 若 $B = C$, 则 $A - B = A - C$.
10. 若 $A \bigcup B = M \bigcup N, A \bigcap N = \varnothing, B \bigcap M = \varnothing$, 则 $A = M, B = N$.