

BOOK  
—天下图书—

万试无忧系列丛书



# 高考数学

# 最后一题

主编◎梁训果

突出知识讲解

注重思路分析

讲求技巧点拨

旨在能力提高

重庆出版集团



重庆出版社



责任编辑：吴成忠 封面设计：杨 峰 版式设计：幸 忻

突出知识讲解  
注重思路分析  
讲求技巧点拨  
旨在能力提高

**BOOK**  
—天下图书—

ISBN 978-7-5366-8521-5



9 787536 685215 >

定价：12.00 元

数学(CIP)目录编查计划  
并编出重:重一 万试无忧系列丛书



ISBN 978-7-2388-8831-2  
I. 高... II. 梁... III. 数学—高中—教学参考资料  
W. G634.603  
中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第051421号

# 高考数学最后一题


主 编:梁训果

编写人员:(按音序排列)

陈 刚 黄超骏 梁训果

刘荣和 谭 林 王 辉

吴存林 杨 林 张 琼

重庆出版集团  重庆出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学最后一题/梁训果主编. —重庆:重庆出版社,  
2007. 2

ISBN 978-7-5366-8521-5

I. 高… II. 梁… III. 数学课—高中—升学参考资料  
IV. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 024451 号

高一数学最后一题

高考数学最后一题

GAOKAO SHUXUE ZUIHOU YITI

梁训果 主编

出版人:罗小卫

责任编辑:吴成忠

封面设计:杨峰

版式设计:幸忻



重庆出版集团 出版  
重庆出版社

重庆长江二路 205 号 邮政编码:400016 <http://www.cqph.com>

重庆升光电力印务有限公司印刷

重庆市天下图书有限责任公司发行

重庆市渝中区双钢路 3 号科协大厦 14 楼

邮政编码:400013 电话:023-63658853

全国新华书店经销

开本:890 mm×1 240 mm 1/32 印张:8 字数:175 千

版次:2007 年 2 月第 1 版 印次:2007 年 2 月第 1 次印刷

印数:1~16 000 册

定价:12.00 元

版权所有,侵权必究

# 前言

高考数学最后一题通常用来考查考生综合分析能力,鉴别考生内在潜力,决定考生是否上高考重点线。如何做好高考数学最后一题也就成了每位学生很关心的问题,本书正是为了满足广大考生的需求,特邀特级教师梁训果及长期从事高三教学的精英编写而成。

按照高考最后一题的特点,本书分为数列问题、圆锥曲线问题、函数问题三部分。每一部分选取了最近三年的高考最后一题作为例题进行深入的“知识解析”,在这些解析中作者讲了许多独到的解题技巧。在数列问题中重点讲解了数列七种恒等变形的办法,如“不动点变形”“反向递推变形”等,掌握了这些方法后所有数列问题基本都可以解决;在圆锥曲线问题中,重点讨论了如何进行“条件转化”;在函数问题中,重点讲了“数形结合”与“条件转化”。同时,本书作者对每一道题都进行了“全解”,并力求从不同的角度解答,给我们许多的启示。通过“模拟演练”经典题目的练习,学生定能收到事半功倍的效果。

我们希望通过这本书的出版,能够帮助广大高三考生提高能力,取得好成绩,进入理想的大学。

# 目

# 录

## 第一部分 数列相关问题

1. 2006 · 福建高考	1
2. 2006 · 江西高考	10
3. 2006 · 全国高考 I	16
4. 2006 · 全国高考 II	22
5. 2006 · 江苏高考	27
6. 2006 · 山东高考	31
7. 2006 · 北京高考	35
8. 2004 · 浙江高考	40
9. 2004 · 重庆高考	46
10. 2005 · 江苏高考	52
模拟演练	57

## 第二部分 平面几何相关问题

1. 2006 · 辽宁高考	66
2. 2006 · 安徽高考	74
3. 2006 · 湖南高考	82

4. 2006 · 重庆高考	89
5. 2005 · 山东高考	96
6. 2005 · 江西高考	101
7. 2004 · 福建高考	107
8. 2004 · 广东高考	114
9. 2005 · 上海高考	120
10. 2005 · 浙江高考	124
模拟演练	130

### 第三部分 函数相关问题

1. 2006 · 辽宁高考	138
2. 2006 · 广东高考	145
3. 2005 · 北京高考	149
4. 2006 · 湖北高考	155
5. 2006 · 陕西高考	159
6. 2006 · 四川高考	165
7. 2006 · 浙江高考	171
8. 2005 · 辽宁高考	175
9. 2006 · 浙江高考	180
10. 2006 · 全国高考 I	184
模拟演练	187

### 参考答案

第一部分	196
第二部分	213
第三部分	232

## 第一部分 数列相关问题

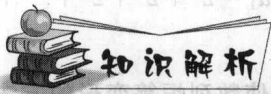
### 1. 2006 · 福建高考



#### 原题再现

- 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1, n \in \mathbf{N}^*$ ,
- (I) 求  $a_n$ ;
- (II) 若数列  $\{b_n\}$  满足:  $4^{b_1-1} \cdot 4^{b_2-1} \cdot 4^{b_3-1} \cdots 4^{b_n-1} = (a_n+1)^b$ ,  
求证:  $\{b_n\}$  是等差数列;

(III) 求证:  $\frac{n}{2} - \frac{1}{3} < \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n}{2}$ .



#### 知识解析

(1) (知识点1) 函数  $f(x)$  满足  $x_0 = f(x_0)$  的解  $x_0$  叫函数  $f(x)$  的一个不动点. 不动点是数列恒等变形的方方法之一.

例如“ $y=2x+1$ ”令  $x=2x+1$ , 解得它的一个不动点  $x_0 = -1$ .



又如“已知  $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1$ , 求通项  $a_n$ ”. 则可设  $y=2x+1$ , 求得不动点  $x_0=-1$ , 于是在  $a_{n+1}=2a_n+1$  的两端同减  $(-1)$ , 得  $a_{n+1}+1=2a_n+1+1 \Rightarrow a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ , 作代换:  $x_{n+1}=a_{n+1}+1$ , 得  $x_{n+1}=2x_n, x_1=2$ , 所以数列  $\{x_n\}$  是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 故  $x_n=x_1 \cdot 2^{n-1}=2^n$ , 即  $a_n=2^n-1$ .

(2)(知识点 2) 反向递推是数列恒等变形的方法之二.

例如“已知  $a_1=1, a_{n+1}=2a_n+1$ , 求通项  $a_n$ ”, 我们将  $a_n$  用它的前一项  $a_{n-1}$  表示, 又将  $a_{n-1}$  用  $a_{n-2}$  表示, 直至用  $a_1$  表示出  $a_n$ . 此即为反向递推.

$$\text{即 } a_n=2a_{n-1}+1=2(2a_{n-2}+1)+1=2^2a_{n-2}+2^0+2^1=\dots$$

$=2^{n-1} \cdot a_{n-(n-1)}+2^0+2^1+2^2+\dots+2^{n-2}=2^n-1$ . (这是等比数列求前  $n$  项和, 直接用公式即可求得.)

(3)(知识点 3) 令  $n=1, 2, 3, \dots, n$ ,  $n$  式相加是数列恒等变形的方法之三.

例如“ $a_1=1, a_2=3, a_{n+1}-a_n=2^n$ , 求通项  $a_n$ ”. 则令  $n$  取  $1, 2, 3, \dots, n$ . 于是有

$$a_2 - a_1 = 2^1,$$

$$a_3 - a_2 = 2^2,$$

.....

$$a_{n+1} - a_n = 2^n.$$

把这  $n$  式相加, 于是错位相消, 得  $a_{n+1}-a_1=2^1+2^2+2^3+\dots+2^n$ , 所以,  $a_{n+1}=2^{n+1}-1$ , 故有  $a_n=2^n-1$ .

(4)(知识点 4) 通过恒等变形使足标一致使数列恒等变形的方法之四.

例如“ $a_1=1, a_2=3, a_{n+1}-a_n=2^n$ , 求通项  $a_n$ ”, 则可在递推关系式的两端同除以  $2^{n+1}$ , 使与足标一致, 即  $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2}$ , 作代换



$$x_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \text{ 得 } x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{1}{2}.$$

故  $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}$ , 按知识点(1)求得不动点  $x_0 = 1$ , 所以  $x_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2} - 1$ , 作代换  $b_n = x_n - 1$ , 得  $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n, b_1 = x_1 - 1 = \frac{a_1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ , 则  $\{b_n\}$  为等比数列, 故  $b_n = b_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ , 所以  $x_n - 1 = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$ .

$$\text{即 } x_n - 1 = \frac{a_n}{2^n} - 1 = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow a_n = 2^n - 1.$$

这里用到了数列变形的的方法之四:使足标一致. 对本题虽有画蛇添足之感,但在第二题(2006·江西)里,你将会感到它的神妙!

(5)(分析第 II 问) 设  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则所给条件  $4^{b_1-1} \cdot 4^{b_2-1} \cdot 4^{b_3-1} \cdot \dots \cdot 4^{b_n-1} = (a_n + 1)^b$ , 可以转化为  $2S_n - 2n = nb_n$ . 为了证明  $\{b_n\}$  为等差数列, 可先将  $2S_n - 2n = nb_n$  化为  $b_n$  的式子, 再变形为含  $b_n$  且常数项为 0 的式子,  $b_{n+1} - 2b_n + b_{n-1} = 0$  (\*).

(6)(知识点 5) 分裂中项是数列变形的的方法之五.

例如(5)中的(\*)式, 对于相邻三项的递推关系, 其常数项为 0, 且两端的系数和相等时, 可适当分裂中项为两项.

在(5)中相邻三项的递推关系(常数项为 0) 满足两端系数和相等, 故可以用分裂中项之法, 实现换元.

又如“ $x_1 = 2, x_2 = 1$ , 且满足  $2x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ , 求通项  $x_n$ ”. 由于它的常数项为 0, 是相邻三项的递推关系, 且两端的系数和相等. 故将中项分裂为  $2x_{n+1} - x_{n+1}$ , 经化简可实现换元. 所以  $2(x_{n+2} - x_{n+1}) = -(x_{n+1} - x_n)$ , 作代换得  $2A_{n+1} = -A_n$ ,

$$\text{所以 } \frac{A_{n+1}}{A_n} = -\frac{1}{2}, A_1 = x_2 - x_1 = 1,$$



所以数列  $\{A_n\}$  是等比数列. 故  $A_n = A_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ,

即  $x_{n+1} - x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ , 令  $n=1, 2, 3, \dots, n$ . 再  $n$  式相加,

$$\begin{aligned} \text{得 } x_{n+1} - x_1 &= \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow x_n = 2 + \\ &\frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]. \end{aligned}$$

(7)(分析第Ⅲ问)一般数列求前  $n$  项和的思路是先将通项变形, 然后求和.

如在第Ⅲ问中设前  $n$  项和为  $T_n$ , 其通项  $c_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1}$ , 先将通项分离常数, 变形为  $c_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2^{n+1} - 1)} < \frac{1}{2} + 0$ , 然后, 令  $n$  取  $1, 2, 3, \dots, n$ . 再  $n$  式相加, 即证得  $T_n < \frac{n}{2}$ .

同理, 欲证左端,  $T_n > \frac{n}{2} - \frac{1}{3}$ , 仍然先分析通项  $c_n$ . 记分母为  $y = 2(2^{n+1} - 1)$ , 则在  $n > 1$  时,  $y$  递增, 所以  $c_n$  在  $n > 1$  时递增, 所以  $c_n \geq c_1 = \frac{1}{3}$ , 针对求证式的左端还需继续变形,  $c_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \cdot 2^n - 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^n + 2^n - 2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^n}$ , 然后令  $n$  取  $1, 2, 3, \dots, n$ , 把  $n$  式相加, 得

$$T_n > \frac{n}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2} - \frac{1}{3} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}, \text{ 所以有}$$

$$T_n > \frac{n}{2} - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) > \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, \text{ 故 } \frac{n}{2} - \frac{1}{3} < T_n < \frac{n}{2}.$$

$$\text{即 } \frac{n}{2} - \frac{1}{3} < \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n}{2}.$$

(8)(补讲知识). 例如



## 第一部分 数列相关问题

① 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1=1, \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+2}{n+1}$ , 求数列  $\{a_n\}$  的通项;

② 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1=3, a_{n+1}=4-\frac{4}{a_n}$ , 求  $\{a_n\}$  的通项.

下面分析这两个问题: ① 令  $n$  取  $1, 2, 3, \dots, n$ , 然后  $n$  式相乘,

$$\text{得 } \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+2}{n+1}, \text{ 错位相消得 } a_{n+1} = \frac{n+2}{2}.$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{n+1}{2}.$$

② 求得不动点  $x_0=2, \Rightarrow a_{n+1}-2=4-\frac{4}{a_n}-2$ .

两端同时颠倒  $\frac{1}{a_{n+1}-2} = \frac{a_n-2+2}{2(a_n-2)} = \frac{1}{a_n-2} + \frac{1}{2}$ , 所以

$\left\{ \frac{1}{a_{n+1}-2} \right\}$  是等差数列,

$$\text{所以 } \frac{1}{a_n-2} = \frac{1}{3-2} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{2n+4}{4+1}.$$

在补讲知识中,  $n$  式相乘是数列恒等变形的方法之六.

两端同时颠倒, 是数列恒等变形的方法之七.



(I) 因为  $a_{n+1}=2a_n+1 (n \in \mathbb{N}^*)$ , 由前面的分析, 可以转化为求它的不动点.

易求得不动点为  $-1$ ,

$$\text{所以 } a_{n+1}+1=2(a_n+1),$$

所以  $\{a_n+1\}$  是以  $a_1+1=2$  为首项,  $2$  为公比的等比数列.

故  $a_n + 1 = 2^n$ .

即  $a_n = 2^2 - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(II)(方法1)

因  $4^{b_1-1} 4^{b_2-1} \cdots 4^{b_n-1} = (a_n + 1)^{b_n}$ .

即  $4^{(b_1+b_2+\cdots+b_n)-n} = 2^{nb_n}$ .

所以  $2[(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - n] = nb_n$ , ①

$2[(b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_{n+1}) - (n+1)] = (n+1)b_{n+1}$ . ②

② - ①, 得  $2(b_{n+1} - 1) = (n+1)b_{n+1} - nb_n$ ,

即  $(n-1)b_{n+1} - nb_n + 2 = 0$ , ③

$nb_{n+2} - (n+1)b_{n+1} + 2 = 0$ . ④

④ - ③, 得  $nb_{n+2} - 2nb_{n+1} + nb_n = 0$ ,

即  $b_{n+2} - 2b_{n+1} + b_n = 0$ ,

所以  $b_{n+2} - b_{n+1} = b_{n+1} - b_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ,

故  $\{b_n\}$  是等差数列.

(方法2) 由前面的证明有

$(n-1)b_{n+1} - nb_n + 2 = 0$ .

令  $n=1$ , 得  $b_1 = 2$ .

设  $b_2 = 2 + d (d \in \mathbf{R})$ , 下面用数学归纳法证明  $b_n = 2 + (n-1)d$ .

(1) 当  $n=1, 2$  时, 等式成立.

(2) 假设当  $n=k (k \geq 2)$  时,  $b_k = 2 + (k-1)d$ , 那么

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= \frac{k}{k-1}b_k - \frac{2}{k-1} = \frac{k}{k-1}[2 + (k-1)d] - \frac{2}{k-1} \\ &= 2 + [(k+1) - 1]d. \end{aligned}$$

这就是说, 当  $n=k+1$  时, 等式也成立.

根据(1)和(2), 可知  $b_n = 2 + (n-1)d$  对任何  $n \in \mathbf{N}^*$  都成立.

因为  $b_{n+1} - b_n = d$ ,

所以  $\{b_n\}$  是等差数列.



## 第一部分 数列相关问题

$$(III) \text{ 因为 } \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{2^k - 1}{2^{k+1} - 1} = \frac{2^k - 1}{2(2^k - \frac{1}{2})} < \frac{1}{2}, k=1, 2, \dots, n.$$

$$\text{所以 } \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \frac{a_k}{a_{k+1}} &= \frac{2^k - 1}{2^{k+1} - 1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2^{k+1} - 1)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^k + 2^k - 2} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^k}, k=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} &\geq \frac{n}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) \\ &= \frac{n}{2} - \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right) > \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{n}{2} - \frac{1}{3} < \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n}{2} \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$



### 补充例题

数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1=1$  且  $8a_{n+1}a_n - 16a_{n+1} + 2a_n + 5=0 (n \geq 1)$ .

(I) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(II) 求  $\left\{ \frac{a_n}{a_n - \frac{1}{2}} \right\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

分析: (1) 题目给出的递推关系形如  $c \cdot a_{n+1} \cdot a_n + d \cdot a_{n+1} + e \cdot$

$a_n + f = 0$ , 我们可以变形为  $a_{n+1} = \frac{c' \cdot a_n + d'}{e' \cdot a_n + f'}$ , 然后利用不动点的办法

把它变成一个比较特殊的递推关系, 就可以求出通项. 先求出  $a_{n+1}$

$= \frac{-2a_n - 5}{8a_n - 16}$ , 再考虑函数  $y = \frac{-2x - 5}{8x - 16}$ , 令  $y = x$ , 求出不动点为  $x = \frac{1}{2}$

或  $x = \frac{5}{4}$ , 我们随便取一个都可以, 比如取  $x = \frac{1}{2}$ , 于是, 原等式可变为

$$\text{形为 } a_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{-2a_n - 5}{8a_n - 16} - \frac{1}{2}, \text{ 整理得 } a_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{-6\left(a_n - \frac{1}{2}\right)}{8a_n - 16}, \text{ 现}$$

在对等式两边同时颠倒, 再分离变量, 有  $\frac{1}{a_{n+1} - \frac{1}{2}} = -\frac{4}{3} + \frac{2}{a_n - \frac{1}{2}}$ ,

作代换  $b_n = a_n - \frac{1}{2}$ , 得  $b_{n+1} = 2b_n - \frac{4}{3}$ , 求出它的不动点  $x_0 = \frac{4}{3}$ , 这时

有  $b_{n+1} - \frac{4}{3} = 2\left(b_n - \frac{4}{3}\right)$ , 这是一个等比数列, 问题一也就解决了.

(2) 先对通项变形再求和.

$$\text{由 } \frac{a_n}{a_n - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{4}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{4}{3}} = \frac{5}{3} + \frac{1}{6} \cdot 2^n,$$

$$\text{得 } S_n = \frac{5}{3} + \frac{1}{6} \cdot 2^1 + \frac{5}{3} + \frac{1}{6} \cdot 2^2 + \dots + \frac{5}{3} + \frac{1}{6} \cdot 2^n,$$

这是一个特殊数列求和, 直接利用公式即可.

解答: (I) 因为数列  $\{a_n\}$  满足  $8a_{n+1}a_n - 16a_{n+1} + 2a_n + 5 = 0 (n \geq 1)$ ,

所以有  $a_{n+1} = \frac{-2a_n - 5}{8a_n - 16}$ . 考虑函数  $y = \frac{-2x - 5}{8x - 16}$ , 令  $y = x$ ,

可以求得  $x = \frac{1}{2}$  或  $x = \frac{5}{4}$ . 所以在  $a_{n+1} = \frac{-2a_n - 5}{8a_n - 16}$  的两边同时减

去  $\frac{1}{2}$ , 则有  $a_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{-2a_n - 5}{8a_n - 16} - \frac{1}{2} \Rightarrow a_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{-6\left(a_n - \frac{1}{2}\right)}{8a_n - 16}$ , 两

边同时颠倒, 有  $\frac{1}{a_{n+1} - \frac{1}{2}} = \frac{8a_n - 16}{-6\left(a_n - \frac{1}{2}\right)}$ , 分离变量得  $\frac{1}{a_{n+1} - \frac{1}{2}} =$

## 第一部分 数列相关问题

$-\frac{4}{3} + \frac{2}{a_n - \frac{1}{2}}$ , 令  $b_n = \frac{1}{a_n - \frac{1}{2}}$ , 则有  $b_{n+1} = 2b_n - \frac{4}{3}$ , 在它的两端同时

减去  $\frac{4}{3}$ , (大家思考一下为什么要减去  $\frac{4}{3}$ ?) 得  $b_{n+1} - \frac{4}{3} = 2(b_n - \frac{4}{3})$ ,

显然  $\{b_n - \frac{4}{3}\}$  是以  $\frac{2}{3}$  为首项, 公比为 2 的等比数列, 所以,  $b_n - \frac{4}{3} =$

$$\frac{1}{3} \cdot 2^n \Rightarrow b_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{4}{3}.$$

$$a_n = \frac{1}{b_n} + \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{4}{3}} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 1)$$

$$= \frac{3}{2^n + 4} + \frac{1}{2}.$$

$$(II) \frac{a_n}{a_n - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{4}{3}} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{\frac{1}{3} \cdot 2^n + \frac{4}{3}}} = \frac{5}{3} + \frac{1}{6} \cdot 2^n,$$

$$S_n = \frac{5}{3} + \frac{1}{6} \cdot 2^1 + \frac{5}{3} + \frac{1}{6} \cdot 2^2 + \dots + \frac{5}{3} + \frac{1}{6} \cdot 2^n$$

$$= \frac{5n}{3} + \frac{1}{6} \cdot (2^1 + 2^2 + \dots + 2^n)$$

$$= \frac{5n}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2}$$

$$= \frac{1}{3} (2^n + 5n - 1).$$



## 2. 2006 · 江西高考



已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{3}{2}$ , 且  $a_n = \frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1} + n - 1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$ ,

(I) 求  $a_n$ ;

(II) 求证: 对于  $n \in \mathbf{N}^*$ , 有不等式  $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n < 2 \cdot n!$ .



(1) (分析第 I 问) 注意到递推关系的右端. 两端同时颠倒, 得

$\frac{1}{a_n} = \frac{n-1}{3na_{n-1}} + \frac{2}{3n}$ , 认真观察发现足标之间有联系. 为了使足标一致,

两端同乘  $n$ , 得  $\frac{n}{a_n} = \frac{n-1}{3a_{n-1}} + \frac{2}{3}$ . 为了提出  $\frac{1}{3}$ , 变为  $-\frac{n}{a_n} = -\frac{n-1}{3a_{n-1}} -$

$\frac{2}{3}$ , 所以有  $1 - \frac{n}{a_n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{n-1}{a_{n-1}}$ , 作代换得  $x_n = \frac{1}{3}x_{n-1}$ ,

$$\text{所以 } x_n = x_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

$$\text{即 } 1 - \frac{n}{a_n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{n \cdot 3^n}{3^n - 1}, \text{ 即 } a_n = \frac{n}{1 - \frac{1}{3^n}}.$$

