

\wedge Rxz

Rxy \square

$\diamond(\square p \wedge \neg q) \wedge \diamond(\square q \wedge \neg p)$

p \forall

卷 I

逻辑之门——约翰·范本特姆经典著作

逻辑、信息和互动

[荷] 约翰·范本特姆 著
刘奋荣 余俊伟 等 译



科学出版社
www.sciencep.com

NO.15

B815/2

2008

卷I

逻辑之门——约翰·范本特姆经典著作

逻辑、信息和互动

〔荷〕约翰·范本特姆 著
刘奋荣 余俊伟 等译

科学出版社

北京

图书在版编目 (CIP) 数据

逻辑、信息和互动 / [荷] 范本特姆著; 刘奋荣, 余俊伟等译.
—北京: 科学出版社, 2008
(逻辑之门: 约翰·范本特姆经典著作)
ISBN 978-7-03-020525-4

I. 逻… II. ①范…②刘…③余… III. 模态逻辑—文集
IV. B815.1-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 053485 号

责任编辑: 胡升华 郭勇斌 / 责任校对: 钟 洋
责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 无 极

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 6 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2008 年 6 月第一次印刷 印张: 26 1/4

印数: 1—3 000 字数: 508 000

定价: 78.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈双青〉)

逻辑之门——约翰·范本特姆经典著作

顾 问 约翰·范本特姆

主 编 刘奋荣

《逻辑、信息和互动》编译组

组 长 刘奋荣 余俊伟

成 员 (按姓氏笔画排序)

刘新文 张木春 胡义昭 郭佳宏

郭美云 萧 瑶 崔建英 裘江杰

丛 书 序

逻辑学是一门古老的学科，它的历史可以追溯到古希腊、印度和中国。逻辑学发展到今天，已成为一门基础学科，越来越具有交叉性。许多学科，从数学到人文学科、从计算机科学到社会科学，在这里交汇。所以，进入逻辑的世界将会使我们掌握整个学术研究领域的基础、工具和方法。

约翰·范本特姆是当今著名的逻辑学家。他从20世纪70年代开始就活跃在逻辑研究的很多领域，是发展这种现代逻辑观的领军人物。他的学术研究不仅涉及纯粹的数学基础领域，而且还涉及许多其他的应用领域。约翰·范本特姆是著名的阿姆斯特丹大学的逻辑、语言和计算研究所的创始人。他是欧洲逻辑、语言和信息学会的第一任主席。同时，他还是斯坦福大学的哲学教授，是中山大学的客座教授。“逻辑之门”这套丛书的宗旨是让中国的读者更系统地了解他的学术研究及他对逻辑未来发展趋势的一些看法。丛书包括约翰·范本特姆的经典论文和专著的译文。这些著作涉及的主题有：关于信息、进程和智能互动的模态逻辑；自然语言中范畴语法和量词语义的逻辑；逻辑与认识论和科学方法论之间的相互影响。

总之，本丛书将会呈现给读者一个崭新而活跃的研究领域，在这里逻辑、哲学、数学、计算机、语言学、社会科学和认知科学之间互相交叉和渗透。本丛书的译者都是活跃在中国逻辑界从事现代逻辑教学和研究的学者，他们的工作将会为读者开启一扇进入广阔的逻辑世界的学术之门，也将会对进一步开展国际学术交流、全面实现中国的逻辑研究现代化、实现中国的逻辑研究同国际逻辑研究水平的全面接轨起着巨大的促进作用。遵诸位忘年友之嘱，是为译序。

张家龙

2007年7月24日

译者序

约翰·范本特姆是当今最著名的逻辑学家之一。他的学术研究涉及模态逻辑、语言逻辑及逻辑哲学等领域。从20世纪70年代到现在，他撰写了6部专著和约300篇学术论文，主编了4部具有权威性的逻辑手册，其影响从学术界对他著作的引用频率可见一斑。本项目得到了阿姆斯特丹大学的支持，旨在将约翰·范本特姆的著作翻译成中文，使其在中国内地、香港和台湾等华语地区得到更为广泛的传播。本书收录的是关于模态逻辑的13篇经典论文。可以说，每篇论文都包含着作者深邃的思想和精妙的逻辑技巧。按照研究主题的不同，我们把13篇论文进一步分为4个部分。幸运的是，范本特姆教授为本书的每一部分专门撰写了新的导读。我们相信，这些导读对于读者更好地把握论文的精髓会十分有帮助。在我们看来，很多研究成果最初都是以论文的形式发表的。学术论文往往包含对具体问题的来龙去脉更为详尽的阐述，同时也包含一些尚未解决的开放问题。因此，通过阅读论文，读者不仅可以直接了解当下的问题、作者的解决方案及逻辑技巧在其中发挥的作用，而且能够直接进入对开放问题的继续研究阶段。

参与这一项目的翻译和校对人员都是国内年轻的逻辑学家，他们都是在大学和研究机构任职的骨干力量。他们的逻辑技术基础扎实，英语运用能力强，并且具有高度的责任感。这里是关于他们的一个情况简介（按姓氏笔画排序）。

- 刘奋荣 清华大学人文学院哲学系 副教授
刘新文 中国社会科学院哲学所 副研究员
余俊伟 中国人民大学哲学院 副教授
胡义昭 中国社会科学院哲学所 助理研究员
郭美云 西南大学逻辑与智能中心 副教授
郭佳宏 北京师范大学哲学与社会学学院 讲师
裘江杰 浙江大学人文学院 博士后

关于翻译和一校的分工情况，可见每篇文章的首页。为确保翻译的准确性，我们进行了第二次校对工作。余俊伟同志对前两部分做了校对，刘奋荣同志对后两部分做了校对。裘江杰和郭美云同志也参与了二校的部分工作。但是，我们仍

然希望广大读者对我们的翻译工作予以进一步的指正。还有，郭美云同志在西南大学开设对所翻译论文的讨论班，效果喜人。三位逻辑研究生张木春、萧瑶和崔建英因此也加入了我们的工作，在此表示欢迎和衷心的感谢。另外，为了便于读者查阅，我们在本书的结尾附加了英-汉专业术语对照表和英-汉人名对照表。事实上，这两个对照表涉及的术语较本书所涉及的更为广泛，可供读者做一般的使用。刘新文同志和余俊伟同志为此做了大量的工作，在此表示感谢。我们主要采取音译的方法来翻译外国的人名，感谢我在荷兰的同事帕奎特 (E. Pacuit) 帮忙朗读这些英文的名字。此外，为了本书前后体例的一致，我们对文中的定义、定理等进行了编号，结尾处的参考文献做了一些调整。最后，十分感谢所有参与这个项目的人员能够在百忙之中抽出时间来完成此项工作。

受益于现代网络技术的发展，在翻译过程中，我们的译者和作者之间进行了无数的电子邮件联系，探讨翻译过程中碰到的理解方面的问题。这大大提高了我们翻译的效率和质量。为了进一步加强译者和作者之间的联系，我们将于2007年8月1日在中国人民大学举行关于模态逻辑的会议，主要的发言人是参与本项目的译者和约翰·范本特姆教授。这个会议对所有的观众开放，我们希望通过具体问题的研讨，加深大家对模态逻辑的理解，进一步寻求合作的空间。这次会议得到了北京市逻辑学会的赞助，在此表示感谢。

最后，感谢阿姆斯特丹大学对本项目在资金方面的赞助。感谢科学出版社科学人文分社胡升华社长和郭勇斌编辑为本书的出版付出的艰辛劳动。

刘奋荣

2007年7月

前 言

本书是关于当今模态逻辑所研究的主要问题的一个论文集。这一论文集展示了模态逻辑的发展历程，将这一领域的研究放在了一个更为广阔的历史背景中。

模态逻辑这门学科有着十分有趣的历史，充满着令人惊讶的曲折故事。它的历史至少可以追溯到古代亚里士多德的模态三段论。即便是这样，正如我在拙作《内涵逻辑指南》(Manual of Intensional Logic)中阐述的那样，现代逻辑之父弗雷格驳斥了康德在1780年左右总结的逻辑范畴表。然后，他把传统的内涵概念，例如，必然或可能，也从他的分析数学证明的“外延的”议程中剔除出去。但是，内涵概念在20世纪重新回到逻辑中来。模态逻辑可以看做是在经典逻辑中加入必然、可能、时间、空间、行动、知识、信念、义务和其他内涵概念的扩展。要了解关于这些内涵概念的研究，可以参阅《哲学逻辑手册》(Handbook of Philosophical Logic)。大家对这一观点都很熟悉，所以我不准备在此做进一步的讨论。

但是，“增加内涵概念”只是述说模态逻辑发展历史和描述其现状的一个线索。在新近出版的《模态逻辑手册》(Handbook of Modal Logic)的导论中，特别是在范本特姆(van Benthem)和白垒本(Blackburn)写的“模态逻辑，一个语义视角”那一章节中，我们给模态逻辑描绘了一个更为多样化的图景。要寻找具有同样精神的现代教科书，白磊本、德莱克(de Rijke)和维尼玛(Venema)合著的《模态逻辑》(Modal Logic)一书似乎仍然是最为包罗万象的参考书。这些材料表明，模态逻辑当今的研究至少包括了两个进一步的研究领域，这不仅反映了模态逻辑受哲学和数学的影响，而且也有来自计算机甚至博弈论对其的影响。

其中有一个问题似乎是一种令人惊讶的颠倒！一方面模态逻辑常常被认为是经典逻辑的更大扩展，但是，另一方面，它们只是模态模型更为丰富的一阶或高阶语言的一个小片段。这种观点最初出现在20世纪70年代，之后一直影响很大。它强调的是一些相互关联的问题。第一，我们可以探讨从模态语言到经典语言的翻译，从而也把二者的模型论联系起来。一般而言，在这样的翻译下，模态算子变成了局部的“安保”量词。这种翻译可以在模型层面上做，也可以在框架层面上做，后者就是所谓的模态对应理论。这样，我们就可以有模态的和经典的两种看待问题的方法：没有任何理由偏爱其中一种而丢弃另外一种。我的拙作

《模态逻辑和经典逻辑》(Modal Logic and Classical Logic)就是对这种方法的一个全面发展。特别是,依据这种观点,模态语言能够描述经典逻辑的微细-结构。从基本的模态语言继续发展,到一阶谓词逻辑,或甚至可以超越它(如果我们加入不动点算子的话)。要设计一个好的模态语言(也许甚至是任何逻辑系统)就是要寻求语言表达力和计算复杂性之间适当的平衡。模态语言就是有限的表达力、高度的清晰性及可判定性的一个完美结合。甚至我们还可以利用模态逻辑来找寻经典逻辑中那些大的仍然是未知的可判定部分,譬如[Andréka, van Benthem & Némethi. 1998]发现的安保片段。最后,由强调可定义性和语言表达力引发了对另一个数学问题的兴趣。与模态语言匹配的是模型之间自然的结构不变性,互模拟的进程等价是众所周知的例子。最终的范例仍在发展当中,最新的研究成果可见[van Benthem. 2006; van Benthem, ten Cate & Väänänen. 2007]中关于林斯特龙(Lindström)定理和经典逻辑片断的抽象模型论的研究。

然而,还有看待模态逻辑的第三种角度。似乎可以公正地说,模态逻辑的现代研究受到了计算机科学,或“信息学”出现的影响(很多诱人的欧洲命名中都包含这个词)。这使得人们对信息、计算及分析人类和机器的任何类型的序列进程或分布式的进程产生了浓厚的兴趣。模态逻辑可以看做是下面的一些互相关联的主题的基本理论。我们研究信息结构和信息流的动态变化,行为的一般逻辑和进程理论。还有,当把人和机器主体放在一起时,我们考虑他们共有的信息结构和互动,这一现象出现在博弈和其他目标-趋向的社会行为中。我把这一纲要写在了我的拙作《探索逻辑的动态性》(Exploring Logical Dynamics)一书中。事实上,这一想法确实是当时的人们在脑子里所思考的。这里,传统的哲学逻辑不仅与数理逻辑、计算逻辑、泛代数等碰面,还与信息学、经济博弈论、甚至当今的社会科学会合。在阿姆斯特丹的ILLC关于博弈和互动的研究(www.illc.uva.nl)是对这一现代模式的印证。不过,我们必须说,所有早先提到的在模态逻辑研究中出现的问题都在此再次出现。事实上,中国的学者也许读过我为2004年中文《逻辑增刊》写的论文“行动逻辑的迷你导引”,那里阐述了我关于以上研究纲领的一些主要想法。

上面提到的所有问题都出现在过去几十年里我写的书和论文中。具有代表性的是本书精选的13篇论文。这些论文分为4个部分,即,关于一般的模态逻辑及其方法论;关于模态逻辑和计算,重点强调进程理论;关于模态逻辑和信息,描述知识和信念的静态和动态特征;最后,关于模态逻辑和博弈,反映了目前关于智能的互动逻辑研究的兴趣。在每一部分,我新增加了对每篇论文的进一步介绍。总的来说,我希望本书能够为读者提供一个关于现代模态逻辑鲜活的视角。想要对相关主题做更多研究的读者,可以在本书的基础上进一步阅读文献,包括

上面提到的我自己的一些专著。

当然, 还有一些主题可以加到本书中来, 例如, 关于时间和空间的著作 (参见拙作《时间的逻辑》 (The Logic of Time) 和即将出版的《空间逻辑手册》 (Handbook of Spatial Logics)。但是, 为本书挑选的论文似乎更为连贯, 并且它们打开了通往其他专题研究的道路。

最后, 感谢刘奋荣女士发起了这个翻译项目。也感谢所有的出版社允许我在这里使用这些论文。更重要的是, 非常感谢参与这个项目的译者, 感谢他们慷慨地花费时间和精力使得中国和亚洲的更广大群体能够了解我的工作。我很高兴, 也很荣幸能够参与这一项目。

约翰·范本特姆

2007年3月

参 考 文 献

- Aiello M, Pratt-Hartmann I, van Benthem J, eds. 2007. *Handbook of Spatial Logics*. Dordrecht: Springer Academic Publishers
- Andréka H, van Benthem J, Németi I. 1998. Modal logics and bounded fragments of predicate logic. *Journal of Philosophical Logic*, 27: 217 ~ 274
- Blackburn P, de Rijke M, Venema Y. 2001. *Modal Logic*. Cambridge: Cambridge University Press
- Blackburn P, van Benthem J, Wolter F, eds. 2006. *Handbook of Modal Logic*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers
- Gabbay D, Guenther F, eds. 1998. *Handbook of Philosophical Logic*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers
- van Benthem J. 1983. *The Logic of Time*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers
- van Benthem J. 1985. *Modal Logic and Classical Logic*. Napoli: Bibliopolis
- van Benthem J. 1988. *Manual of Intensional Logic*. Stanford: CSLI Publications
- van Benthem J. 1996. *Exploring Logical Dynamics*. Stanford: CSLI Publications
- van Benthem J. 2007. A new modal Lindström theorem. *Logica Universalis*, 1: 125 ~ 138
- van Benthem J, Cate ten B, Väänänen J. 2007. Lindström theorems for fragments of first-order logic. // *Proceedings LICS 2007*: 280 ~ 292

目 录

丛书序	i
译者序	iii
前言	v

第 1 部分 模态逻辑基本理论

1 对应理论	4
2 两个格式塔中的模态逻辑	82
3 安保、界限和广义语义学	107

第 2 部分 模态逻辑和计算

4 动态箭号逻辑笔记	126
5 谓词逻辑的模态基础	141
6 使互模拟安全的程序构造	173

第 3 部分 模态逻辑和信息

7 “人的存在并非是孤立的”: 逻辑与交流	194
8 信念修正的动态逻辑	227
9 偏好升级的动态逻辑	254

第 4 部分 模态逻辑和博弈

10 动态认知逻辑中的博弈	282
11 作为进程模型的扩展博弈	309
12 逻辑博弈对博弈逻辑是完全的	334
13 博弈中的理性动态和认知逻辑	353

附 录

附录一 英-汉专业术语对照表	390
附录二 英-汉人名对照表	399
致 谢	402

第 1 部分

模态逻辑基本理论



这一部分包括 3 篇基本的模型论论文，主要讨论可定义性和语言的表达力。它们是对前言中提到的许多主要的技术动向的进一步阐述。

第一篇论文是收录于《哲学逻辑手册》中的“模态对应理论”一章，最初写于 1984 年，在 1998 年进行了增订。它从著名的模态公理和语义性质之间的对应开始讨论。这里是一个典型的例子：著名的模态“K4-公理” $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ 说的是可能世界之间二元可及关系的传递性。本章从这里出发展开了关于模态公理和语义框架的关系属性之间的整个对应理论，把模态和经典逻辑联系起来。一个重要的贡献是，我们说明了在什么情况下模态公理有一阶对应物，在什么情况下一阶属性是模态可定义的。这里的一般技巧可以运用到更多的模态语言中去，这一点可见于当今的很多领域——甚至是一些意料不到的领域（参见最新一些例子，[van Benthem. 2008]）。最近，这些技巧被推广到带不动点的非一阶语言中去，尽管那里还有许多开放的问题（参见一前一后的方法，[van Benthem. 2005; 2006]）。

第二，上面提到的一前一后的方法，微细结构，语言表达力和计算复杂性之间的平衡，互模拟不变性，以及一阶逻辑下的模态语言等问题在“两个格式塔中的模态逻辑”中得到了充分的研究。这是我为 1998 年在乌普萨拉举行的第一次“模态逻辑进展”大会做的基调讲座。本文除了推广 1980 年代保加利亚的“索菲亚学派”的想法和 20 世纪 90 年代计算机科学界的后继工作，还阐述了如何设计模态语言和经典语言，使得可以把二者放在一起研究。这进一步增进了我们对这两种语言的理解。文中很多内容如今已经变成一般的练习了。特别地，这种思考方式与当今活跃的研究介于基本模态语言和一阶逻辑之间的“混合逻辑”不谋而合。

最后，论文“安保、界限和广义语义学”发表在 2005 年的《逻辑、语言和信息杂志》(Journal of Logic, Language and Information) 上，这是为纪念“十年的安保片段”而写的。这篇论文首先回顾了由 [Andréka, van Benthem & Némethi. 1998] 提出的作为一阶逻辑最大的模态可判定部分的安保片段。文章进一步阐明，令人惊讶的是，两种不同的语义策略，即“用片断工作”和不同于普通的整个一阶语言的塔斯基语义的“广义模型”，有时等同于一件事情。而且，文章解释了如何使用现代模态技巧来理解一阶谓词逻辑，这一现代逻辑卓越的工作系统。特别地，模态分析为一阶逻辑揭示了新的进程模型。最为显著的是，安保片段成为可以回避不可判定问题的可判定子逻辑的一个新源泉。

参 考 文 献

- Andréka H, van Benthem J, Németi I. 1998. Modal logics and bounded fragments of predicate logic. *Journal of Philosophical Logic*, 27: 217 ~ 274
- van Benthem J. 2005. Minimal predicates, fixed-points, and definability. *Journal of Symbolic Logic*, 70: 696 ~ 712
- van Benthem J. 2006. Modal frame correspondences and fixed-points. *Studia Logica*, 83: 133 ~ 155
- van Benthem J. 2008. Man muss immer umkehren. To appear in Dégrémont C, Keif L, eds. *Festschrift for Shahid Rahman*, University of Lille/Springer Publishers

1 对应理论*

余俊伟/译 刘新文/校

1.1 主题引论

1.1.1 对应

1960年前后,当可能世界语义学出现时,其最迷人的特征之一就是揭示了在已有的内涵公理和世界之间可及关系的一些普通性质之间的简单联系。几十年句法上的耕耘已经产生了众多的内涵公理理论,而现在这些理论可获得一种清晰的语义处理。为这些理论提供一个清晰的语义处理现在已经非常有用了。例如,典型的完全性定理以如下方式出现:

一个模态公式是 **S4** 的定理,当且仅当它在所有自返的、传递的克里普克框架上为真。

确实也可以证明 **S4** 是偏序的模态逻辑;它将最著名的模态逻辑与也许是最基本的经典关系结构相匹配起来。这样的匹配关系扩展到 **S4**-谱系中更高位置的逻辑。例如,再加上公理

$$\diamond \Box p \rightarrow \Box \diamond p$$

所得的 **S4.2** 对于具有下面性质的那些框架是完全的:自返的、传递的和有向的 (directed) 或相汇的 (confluent):

$$\forall xyz((Rxy \wedge Rxz) \rightarrow \exists u(Ryu \wedge Rzu))$$

这后一条件就是经典框架的一种“菱形性质”。

像这样一些完全性结论已经激起了一个繁荣的内涵完全性理论领域,如经典

* Gabbay D. Modal Correspondence Theory//Gabbay D and Guentner F eds. *Handbook of Philosophical Logic*. Vol. III. second edition. Dordrecht: Springer Science, 1999. 325 ~ 408.

著作 [Seegerberg, 1971] 所示。然而，模态逻辑学家费了一段时间后才意识到，这里也涉及直接的语义等价，而它与模态逻辑中的演绎毫不相关。的确，整个对应理论所呈现的都是出于在 20 世纪 70 年代早期做的一些如下的简单观察。

例 1 T -公理 $\Box p \rightarrow p$ 在一个克里普克框架 $\langle W, R \rangle$ 上为真当且仅当 R 是自返的。这里，“在一个框架上为真”意指在所有命题变元指派下在所有的世界中为真。

证明：“ \Rightarrow ”：考虑任意一个 $w \in W$ 。如果 $\Box p \rightarrow p$ 在 $\langle W, R \rangle$ 中为真，那么，特别地，它在满足下列要求的指派 V 下为真。

$$V(p) = \{v \in W \mid Rww\}$$

这样，根据定义， $\Box p$ 将在 w 上为真——因此， p 也在 w 上为真：即 Rww 。

“ \Leftarrow ”：根据自返性，在所有 R -可及（的世界上）为真蕴涵着在现实（世界）上为真。 ■

例 2 $S4$ 公理 $\Box p \rightarrow \Box \Box p$ 与传递性等价。

证明：类似可证。 ■

例 3 $S4.2$ 公理 $\Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$ 定义有向性。

证明：“ \Rightarrow ”：考虑任意的 $w, v, u \in W$ 满足 Rww, Rwu 。令指派 V 为：

$$V(p) = \{s \in W \mid Rvs\}$$

由此立即得到 $\Box p$ 在 v 上为真。因此， $\Diamond \Box p$ 在 w 上为真。所以 $\Box \Diamond p$ 也一定为真。这推出 $\Diamond p$ 在 u 上为真；即， u 在 $V(p)$ 中有一个 R -后继——因此， v, u 有一个共同的 R -后继。

“ \Leftarrow ”：如果 $\Diamond \Box p$ 在 w 中真，^① 比如说，因某个满足 Rww 且验证了 $\Box p$ 的 v ，那么， $\Diamond p$ 将在 w 的所有 R -后继中为真。因为，根据有向性，所有这些后继都与 v 至少有一个共同的后继。 ■

并不是所有的对应都同样简单。例如， $S4.2$ 有一同伴 $S4.1$ ，它是由 $S4$ 增加“麦肯西 (McKinsey) 公理” $\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$ 而获得。已经证明这一 $S4.2$ 公理的逆要复杂得多。一个众所周知的完全性定理认为， $S4.1$ 是那些自返、传递且原子的

$$\forall x \exists y (Rxy \wedge \forall z (Ryz \rightarrow z = y))$$

克里普克框架的模态理论的公理化。

（注意，除了谓词常项 R 外，我们在这里还需要等词）我们以后将在 1.2.2

① 其中的“ w ”原文误为“ W ”——译者注。

看到, S4.1 的所有公理 (只有) 一起 (才) 设法定义了上述三种关系条件, 但是麦肯西公理本身并不定义原子性 (它要更弱一些)。的确, 这个简单的模态原则根本就不拥有等价的一阶关系式——这是 1975 年前后由几个人独立发现的。

1.1.2 作为可及关系上的条件的模态公式

此处呈现出了一般的图画: 模态公式表达了它们在其上有效的那些框架上的可及关系的某些“经典”限制。事后看来, 这一观察毫不奇怪。毕竟, 给定了某个赋值, 基本的克里普克真值定义的条件其实就是将模态公式翻译为含 R 的经典逻辑公式。因此, 如:

$$\Box p \rightarrow p \quad \text{变成} \quad \forall y(Rxy \rightarrow Py) \rightarrow Px$$

$$\Box p \rightarrow \Box \Box p \quad \text{变成} \quad \forall y(Rxy \rightarrow Py) \rightarrow \forall y(Rxy \rightarrow \forall z(Ryz \rightarrow Pz))$$

而麦肯西公理 $\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$ 就是

$$\forall y(Rxy \rightarrow \exists z(Ryz \wedge Pz)) \rightarrow \exists y(Rxy \wedge \forall z(Ryz \rightarrow Pz))$$

这里的参数“ x ”指进行赋值的当前世界, 而一元谓词 $P(Q, \dots)$ 表示相应的命题字母 $p(q, \dots)$ 在其上成立的那些世界的集合。

我们暂时打住, 而来看看, 仅根据这一简单观察, 一些已有的有关经典谓词逻辑的结果如何可直接迁移到模态逻辑上来。例如, 对于克里普克框架加上一固定的指派 (1.2.1 的模态“模型”), 立即有紧致性和骆文汉姆-斯科伦 (Löwenheim-Skolem) 结果。如果 (比方说) 一个模态公式集在 (给定了适当指派的) 克里普克模型中是有穷可满足的, 那么其经典的翻译将也是有穷可满足的。因此, 根据通常的紧致性, 后一个集合将同时在某个结构 $\langle W, R; P, Q, \dots \rangle$ 中被满足: 它构成了一个克里普克框架并带有验证了原来那个集合的指派。

但是, 这一观点并不就是我们所需要的。

在根据上面真值定义对模态公式进行赋值时, 有两个因素相互交织在一起: 世界的关系模式和特定的“事实”, 即指派。但是, 后者——常项 P, Q, \dots 的特定所指——与作为关系限制的模态公式的角色没有关联。的确, 这些甚至可能还会模糊问题。例如, 当 $V(p)$ 等于 W 时, $\Box p \rightarrow p$ 在所有的可能世界中成立——但是这种观察完全不能给予任何跟这个公理的真实内容 (即自返性) 相关的信息。

为了达到恰当的观点, 人们可以简单地通过对先前翻译中的一元谓词进行全称量化, 而从特定指派的结果中进一步抽象。因此, 如

$$\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$$

现在就成了

$$\forall P \forall Q (\forall y(Rxy \rightarrow (Py \vee Qy)) \rightarrow (\forall y(Rxy \rightarrow Py) \vee \forall y(Rxy \rightarrow Qy)))$$