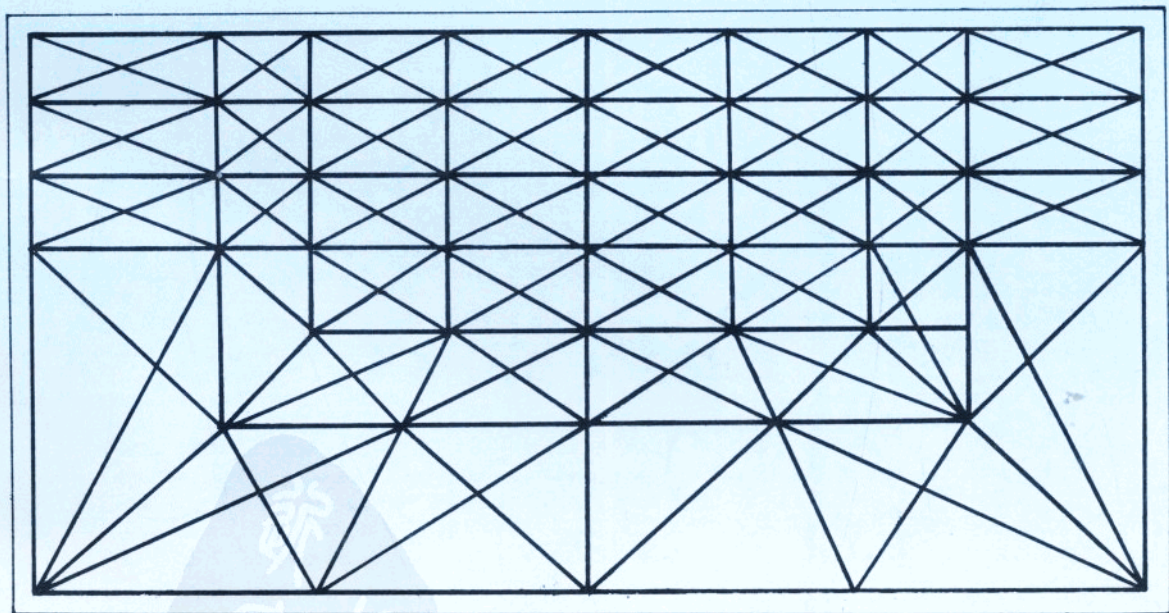


应用地球物理数值模拟 的迭代有限元法

杨进著



地质出版社

PDG

前 言

本书讨论的主要内容是应用地球物理数值模拟。关于数值模拟，以往国内、外不少学者曾进行了系统地研究，取得了有意义的成果。在前人工作的基础上，我们提出了应用地球物理数值模拟的迭代有限元法。这种方法的基本思想是把应用地球物理数值模拟的区域划分为内区（算区）和外区（边界区）。在内区采用常规的有限单元法，在外区采用有限单元法的迭代算法，通过内、外区的协调处理，实现应用地球物理的数值模拟。这样处理问题的方法相当于有限单元法和“边界单元法”的有机组合。试算表明，这种数值计算方法模拟能力强，模拟精度高，占用计算机内存小，内区处理速度快，且适应能力强，应用范围广。

在本书内容研究过程中，得到傅良魁教授、李金铭教授的悉心指导，谭承泽教授、管志宁教授、陈丽英高工和王建谟高工提出了宝贵的建议，在此表示衷心的感谢。

由于作者水平所限，书中不足之处，热忱希望读者批评指正。

作者

1996年3月

目 录

绪论	1
一、数值模拟的发展现状	1
二、问题的提出及解决的途径	6
三、研究的意义、内容及特点	7
第一章 迭代有限元法的基本原理	9
一、外区网格剖分	9
二、外区递推公式的推导	10
三、计算量和计算精度的定性估计	12
第二章 二维地电构造中点源场的迭代有限元法	14
一、稳定电流场微分方程边值问题及其相应的变分问题	14
二、变分问题的离散化	15
三、线性方程组的解法	25
四、视电阻率及视极化率的计算	26
五、程序框图及算例	28
第三章 迭代有限元法数值模拟若干问题的讨论	35
一、关于边界条件的应用	35
二、网格剖分方法	37
三、傅氏逆变换波数 λ 的选取	39
四、迭代有限元法误差分析及精度检验	43
五、迭代有限元法程序的功能、效率及参数选取对模拟精度的影响	51
六、迭代有限元法与有限单元法的比较	56
七、复杂模型的模拟结果与分析	57
第四章 点源二维地电模型的反演	65
一、正演问题及响应函数	65
二、广义线性反演方法	66
三、模型参数的评价	74
四、两种反演方法的计算实例	75
附录 二维地电构造中点源场迭代有限元法正演模拟	81
参考文献	106

绪 论

应用地球物理是一门新兴学科,是地学领域的重要组成部分。它广泛地应用于工业、农业、国防建设等各个领域,特别是在解决水文地质、工程地质问题,寻找金属和非金属矿产,勘探石油、天然气、煤田和地热等资源中发挥了极其重要的作用。

众所周知,应用地球物理勘探是基于地下不同岩(矿)石地球物理性质的差异,在人工的或天然的地球物理场的作用下,测定地下地球物理场的分布,结合有关地质资料解释、推断地下地质构造和矿产资源的分布状况,从而达到勘探的目的。但是,要取得较好的地质效果,必须解决应用地球物理的正演问题,即在已知地球物理模型条件下计算地球物理场的分布。在正演模拟的基础上,实现应用地球物理数据的反演解释,即根据地球物理场的分布规律、特征,结合有关地质资料确定地下地质构造。应用地球物理的正演模拟和数据反演是应用地球物理理论研究的重要组成部分。国内外不少学者在这方面曾作了大量的工作,进行了系统地研究,取得了有意义的成果。随着计算机技术的发展,微型计算机的普及,应用地球物理数值模拟方法和数据解释技术也是日新月异。特别是80年代以来,数值模拟和数据解释逐渐走向数字化、自动化和智能化。

应用地球物理数值模拟和数据反演的地球物理问题主要有一维、二维、二维半和三维问题。一维问题是最简单的。在某种意义上讲,二维半问题是最复杂的。应用地球物理主要包括电法(电磁法)、地震、重力和磁法。然而,在这些分支中,电法异常比较复杂,应用电算的难度较大(罗延钟等,1987年)。因此,我们以二维半电法问题的正、反演为特例来进一步研究应用地球物理数值模拟和数值解释方法不失其一般性,仍具有普遍意义。下面就应用地球物理的正、反演问题(以电法勘探为例)在国内外的发展现状作一简要介绍。

一、数值模拟的发展现状

(一) 数值模拟法

由于应用地球物理所研究的场的复杂性,除了个别十分简单的规则形体具有其解析表达式外,其它大多数地球物理模型很难得到其解析解,只能用数值计算法求其地球物理场的近似数值解。为了解决复杂地球物理模型的地球物理场的正演模拟,国内外发展了各种数值模拟方法,主要有有限差分法、有限单元法、积分方程法和边界单元法。

1. 有限差分法

有限差分法是一种较老的数值计算方法。70年代初国外学者C. M. Swift, T. R Madden和Y. Lamontagne等人把有限差分法用于电法勘探正演模拟计算,后来A. Dey和H. F. Morrison合理地引入了混合边界条件,并用积分插值法导出差分格式,较好地解决了二维半地球物理问题的有限差分模拟。80年代初,我国引进了Dey和Morrison的有限差分法,进而发展了适应于研究复杂地球物理模型的三角形和矩形网格剖分相结合的有限差分算法。

有限差分法是一种网格法,它将正演模拟区域按某种规则剖分成许多均匀或非均匀的

正方形、矩形或其它形状的网络，用网格节点上场参数值来描述场的空间分布。然后将场所满足的偏微分方程和相应的边界条件离散化，得到差分方程。设每个单元内岩（矿）石的地球物理性质均匀，地球物理场呈线性分布，那么网格节点上场值可表示成为相邻节点上场值的线性函数。由此可得出方程数和节点数相同的关于节点场值的高阶线性方程组。最后求解方程组便可得到网格节点上的场值。

以稳定电流场中存在二维地电构造的情况为例。电位 U 满足微分方程：

$$\nabla (\sigma \nabla U) = 0 \quad (0.1)$$

式中： σ 为介质的导电率

将求解区离散化形式均匀正方形网格，用 $P_{i,j}$ 表示网格节点坐标为 (ih, jh) 的节点，其中 h 为网格的间距。将微分方程离散化，得到求解区内节点电位的差分方程

$$a_{i-1,j}U_{i-1,j} + a_{i,j-1}U_{i,j-1} + a_{i,j}U_{i,j} + a_{i,j+1}U_{i,j+1} + a_{i+1,j}U_{i+1,j} = 0 \quad (0.2)$$

式中： $U_{i,j}$ 表示节点 $P_{i,j}$ 的电位值；

$a_{i,j}$ 是决定于网格步长 h 和地下电导率分布的已知函数

根据边界条件，借助镜像原理可得出网格边界上的差分方程，这样对全部节点得到一个和节点数相同的高阶线性方程组。解方程组便得到场的空间分布。

有限差分法计算原理和编程都比较简单，易于解决二维、三维的地球物理问题，特别适应于计算规则的地球物理模型。

2. 有限单元法

有限单元法是 50 年代中期发展起来的一种数值模拟方法，起初主要用于结构和应力分析。70 年代初，J. H. Coggon 将它用于电法勘探模拟计算。70 年代末 L. R. Rijo 完善了这种数值计算方法，使之成为正演模拟的有效方法。80 年代初我国引进和发展了 Coggon, Rijo 的有限单元算法。

有限单元法是从地球物理场所满足的偏微分方程出发，根据变分原理或最小能量原理将给定的微分方程边值问题等价地转换成场的泛函极值问题。将模拟区域按照某种规则将地球物理模型剖分成一系列矩形单元或三角形单元。设单元内物理性质均匀，场呈线性变化，这时单元内的泛函是各节点场值的二次函数。根据二次函数取极小的必要条件，泛函对各节点场的变分为零，这样得到一个和节点数相同的高阶线性方程组，解方程组得到各节点上的场值，用它来描述场在空间的分布。

例如，对于稳定电流场，Coggon 根据能量最小原理导出电位 U 的变分方程：

$$\delta J = \Delta \int_{\Omega} f(U) dv = 0 \quad (0.3)$$

式中： $J = \int_{\Omega} f(U) dv$ 为电位函数 U 的泛函

$f(U) = \sigma (\nabla U)^2 + 2U \nabla \cdot \vec{j}$ 为电位 U 的已知函数

$\nabla \cdot \vec{j}$ 为电流源的体密度

求变分方程 (0.3), 就是要找出一个电位函数 U 使泛函 J 最小。其作法是将求解区划分为 M 个单元 Ω_i , 设单元内物性均匀, 场呈线性变化, 即:

$$U = a + bx + cz \quad (0.4)$$

式中: a, b, c 是单元几何形状和节点电位 (U_i, U_j, U_m) 的函数。

根据单元各节点电位值便可得到单元内线性插值函数。

$$U = N_i(x, z)U_i + N_j(x, z)U_j + N_k(x, z)U_k \quad (0.5)$$

式中: N_i, N_j, N_k 称为基函数

于是有:

$$J = \sum_{r=1}^m J_r = \sum_{r=1}^m \int_{\Omega_r} f(U) dv$$

根据能量最小原理, 得到关于 N 个节点的 N 阶线性方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial U_1} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial U_2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial J}{\partial U_N} = 0 \end{cases} \quad (0.6)$$

解方程组得到各节点电位值, 以此来表示场 U 的空间分布。

有限单元法的优点是适应于模拟形状不规则的地球物理模型。但编程复杂, 占用计算机内存较大。

3. 积分方程法

早在 50 年代末 60 年代初, L. Alfom, K. Vozoff 等人就提出了用积分方程法计算任意形状构造上的电异常。80 年代初 M. Okabe 和 U. C. Das 等人进一步发展了积分方程法, 使之成为数值模拟的主要方法之一。80 年代中期, 我国引进和发展了积分方程法, 特别是关于三维电法模拟的研究, 取得了有意义的成果, 进一步扩大了该方法的应用范围。

积分方程法是从场满足的微分方程边值问题出发, 通过某种变化导出有关参数满足的积分方程式。把积分域网格离散化, 假设单元体表面上积累电荷密度为常数, 那么就得到关于各单元电荷密度的高阶线性方程组。解方程求出各单元表面电荷密度, 积分可得到空间任意点产生的异常场。

例如稳定电流场, 积分方程法是基于位场满足的泊松方程积分解, 引出积累电荷的概

念。对于地下半空间而言，当点电流源位于水平地面时，根据镜像原理可将地下任一点 $P(x, y, z)$ 的异常场表示成如下积分形式：

$$U_a(\rho) = \iint_s \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) ds \quad (0.7)$$

$$\frac{2\pi\sigma}{K_{12}} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial n R_1} \right)_s - \iint_{s'} \sigma \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) ds + \iint_s \sigma \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} ds \quad (0.8)$$

式中： s 是异常体表面，其镜像为 s' 是从 s 上挖去 P 点及其邻域后剩下的部分；

K_{12} 为反射系数。

求解积分方程 (0.8) 确定电荷密度 σ 。由异常体上电荷密度分布计算电位 $U_a(\rho)$ 的空间分布。

积分方程法的优点是可处理三维局部异常体问题，但是由于线性方程组阶数较高，且系数中又包含积分运算，计算量很大。

4. 边界单元法

边界单元法是一种较新的数值计算方法。它是由美国南安普新 (Southampton) 大学 Brebbia 教授于 1978 年首先提出，主要用于工程计算。80 年代初，M. Okabe 把边界单元法用于地球物理模拟计算。80 年代中期，我国为进了边界单元法。不少学者作了大量的研究工作，取得了显著的成果。

边界单元法解题的基本思想是先将场问题满足的偏微分方程，利用方程的基本解、边界条件导出通过格林公式转化为边界积分方程的场求解的积分表达式。然后对边界进行网格剖分，积分表达式的离散化，可得到关于各节点电位的代数方程组。解方程求出场的空间分布。

如稳定电流场问题，利用格林公式将场满足的微分方程边值问题转化为积分方程：

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 u) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (0.9)$$

令基本解 $\varphi = \frac{1}{4\pi r}$

根据场满足的边界条件可导出：

$$1 - \frac{W\rho}{4\pi} u(\rho) = - \int_{\Gamma} u \frac{\cos\beta}{4\pi r^2} d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{4\pi r} d\Gamma \quad (0.10)$$

式中： $W\rho$ 是 ρ 点对区域 Ω 张开的立体角

β 是 \vec{r} 与 \vec{n} 的夹角

把上式离散化，就可得到 N 个节点关于 u 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的 $2N$ 阶线性方程组。边值单元法可把场问题的维数降低一维。由于剖分限于边界，所以单元数目少，形成方程组的阶数较低，占用

计算机内存小，且计算精度高，但边界单元法最后计算的系数矩阵为满阵，可能是非对称的。得到该矩阵的元素需要计算奇异积分，计算较麻烦，不利于狭窄边界层的计算。对复杂的地球物理模型而言，它不如有限单元法模拟能力强。

(二) 数据反演方法

本世纪初，地球物理数据反演的学术思想就产生了萌芽。60年代末，美国地球物理学家 G. E. Backus 和应用数学家 J. F. Gilbert 初步提出了地球物理数据反演的思想和途径，为建立统一的地球物理反演理论和方法奠定了基础。70年代初，美国 R. A. Wiggins 和英国 D. D. Jackson 等人先后提出了广义反演方法——与 BG 理论对应的离散模型的反演方法。80年代以来，随着偏微分方程理论的发展，拟微分算子和 Fourier 积分算子理论的出现，科学家们又致力于变系数偏微分方程的反问题和地学层析成像技术的研究。可以看出应用地球物理数据反演在今后一段时间内将处于地学发展的前沿。

电法勘探二维反演是应用地球物理数据反演的主要分支。下面就电法勘探二维反演在国内、外的研究现状作一简介。

70年代末 W. H. Pelton 等人发表了关于加拿大凤凰公司对偶极——偶极装置视电阻率 ρ_v 及视电阻率实测拟断面图二维反演的论文。文中采用了“波峰回归法”反演方法。这种方法实质上就是 Marquardt 法和阻片最小二乘法。它采用的解估计为：

$$\Delta m = (A^T A + KI)^{-1} A^T \Delta d \quad (0.11)$$

式中： Δm 为模型参数估计值的增量；

Δd 是实测数据和模拟数据之间的差；

A 是 Jacobian 矩阵。

在曲线拟合的正演模拟计算中，采用数据库的方法，即先用有限差分法或有限单元法对反演地电断面不同参数的可能变化范围组成的一系列地电模型进行试算，得出大量数据存入数据库。实际反演时，利用数据库通过样条插值法求其 Jacobian 矩阵和新的模型正演计算值。1982 年日本学者 Yutaka Sasaki 提出了二维地电构造上激电异常的自动反演。他采用有限单元法作正演、阻尼最小二乘法作反演，而 Jacobian 矩阵是从正演过程出发求取的。如计算网格为 60×20 ，子块数为 20 的地电断面正演计算需计算机内存 1024KB，在 FACOM M-200 计算机上需 CPU 时间 10 分钟。1984 年 Nariida C. Smith, Keeva, V., A. C. Tripp, G. W. Hohman 等人发表了电法勘探二维反演的文章，它采用有限差分法作正演，广义逆作反演，Jacobian 矩阵的求法同 Sasaki。对于 80×16 的网格在 VAX 11/780 计算机上计算，取 20 个傅氏变换波数正演计算精度可达到 97%。在 Marquardt 方法的基础上，A. C. Tripp 和 G. M. Hohman 利用 G. E. P. Box 和 H. Kanemasu (1972) 的方法求取优化阻尼系数。令目标函数 S 为阻尼系数 h 的二次函数。

$$S = ah^2 + bh + c \quad (0.12)$$

其中 a 、 b 、 c 为常数

那么使 S 极小的 h 值是最优化的阻尼参数。应用这种方法，对于 83×13 的网格采用偶极

偶极装置正演计算电阻率为 $100\Omega \cdot m$ 的均匀地下半空间, 视电阻率值的相对误差的为 6% (Univac 1108 型计算机), 反演地电断面的子块限于 25 块之内。最近几年来 (1989 年以来), Lu-Tao Tong, Yutaka Sasaki 利用阻尼最小二乘法实现了起伏地形条件下的二维反演以及偶极和大地电磁测深的联合反演。近期, 岛广正, 荣山敏颜提出了电阻率层析学的基本思想。大久保·博试图把量子力学、理论物理学中的研究成果应用到勘探地球物理中。他介绍了薛定谔方程与格林函数法、波恩逼近法、逆散射法等。这些反演新方法刚刚开始尝试, 还没有达到实用的地步。

国内对电法勘探二维半问题的反演研究如何? 就笔者 1994 年 5 月在全国地技图书馆中文地质文献数据库检索及近期查阅资料所知, 国内对电法勘探二维反演的研究仅仅是开始。到目前为止, 就笔者所知关于二维地电断面拟合反演的文章有 3 篇 (吴其斌, 1984. 4, 李貅 1991. 5, 李志聃 1991)。吴其斌采用的方法类似于 Pelton 的方法, 仅适应于二个模型参数的地电断面。李貅等人应用边界单元法作正演计算差商代替微商的方法求 Jacobian 矩阵, 用改进的阻尼最小二乘法作反演, 在宇宙 68 机上实现了单条电测深曲线的二维基底反演。李志聃用有限单元法、阻尼最小二乘法实现了单条电测深曲线的反演。

二、问题的提出及解决的途径

应用地球物理数值模拟和二维半地球物理问题的数据反演在应用地球物理的理论研究中具有重要的科学价值和实际意义。对于数值模拟而言, 以往国内、外不少学者曾作了系统的研究, 取得了有意义的成果。但是常规的数值模拟方法对实际地球物理模型的模拟能力, 模拟精度, 占用计算机内存、计算时间及计算量来说尚有一定的局限性。诸如有限单元法和有限差分法, 同其它方法相比, 由于网格剖分较密它们模拟复杂地球物理模型的能力较强。但是由于节点较多, 形成方程组的阶数较高, 占用计算机内存较大, 计算时间较长, 且在场源附近和网格边缘附近的节点上场值的误差较大。积分方程法模拟能力不如有限单元法, 且占用内存大, 计算时间长。而边界单元法相对来说是占用计算机内存最小的方法。它的模拟精度较高, 最大相对误差的为 3% (谭捍东, 1991, 张献民, 1988), 但模拟复杂地球物理模型的能力差, 且计算量较大。为了提高应用地球物理数值模拟的精度、减少占用的计算机内存, 加快运标速度, 不少学者在现有方法的基础上作了进一步的改善、优化。他们通过修改边值条件 (周熙襄, 1986; 李志聃, 1991,) 来提高模拟精度。通过对系数矩阵的不变量存储来减少计算量 (李志聃, 1991)。以重新计算节点和元素压缩稳定矩阵的带宽来减少内存 (M. K. Paul 1991)。采用降元迭代法降低线性方法组的阶数求得最优解 (熊富林等, 1992. 3)。这些办法虽然对数值模拟的某些方面有所改进, 但还不够完善, 还需进一步地发展。在前人工作的基础上, 我们把近年来电磁场数值计算的新方法 (Charles W. Steel, 1987) 经过详细推导, 系统地研究, 成功地应于地球物理数值模拟计算的有限单元法之中, 发展成为一种不同于常规有限单元法处理问题的方法。这种方法的基本思想是把数值模拟的区域划分为外区和内区 (即边界区和算区)。在外区采用迭代算法, 经过迭代消环处理把外区外边界移至足够远, 使得外区全部能量集中到内区的边界上。在内区采用常规的算法。这样处理问题的方法相当有限单元法和“边界单元法”的有机组合。为了区别于常规的有限单元法, 我们把这种方法称之为迭代有限元法 (IFEM)。它不仅模拟复杂

地球物理模型的能力强、模拟精度高，且占用计算机内存小。关于应用地球物理二维半问题的数据反演，国外学者利用中、小型计算机作了一定的研究，但是不便于在目前流行的微机上实现。而国内在这方面的研究仅仅是开始。在数学上还没有解决从偏微分方程直接对模型参数直接反演的情况下，我们只能沿用传统的拟合反演方法（诸如 Marquardt 反演法等）。Marquardt 法在反演中是较为成熟的方法，但国外学者 Box, Kanemasu, Bard, Davis 和 Whitting 通过一些算例比较了 Marquardt 法和 Box-Kanemasu 法，认为多数数据情况下 Box-Kanemasu 法优于 Marquardt 法（Beck 及 Arnold, 1977）。如 Davies 和 Whitting 给出了不同问题目标函数收敛到 10^{-14} 时各种方法所需迭代次数（表 0.1）。从表中可以看出各种反演方法对不同问题的反演能力不同，各有其长处。为了提高应用地球物理数据反演的能力，寻找较好的数据反演方法，增加反演手段，我们借助 Box-Kanemasu（简称 BK）的反演思想，经过推导、研究，成功地引进了 BK 反演法。并用迭代有限元法作正演、BK 法作反演在微机上实现了电法勘探二维半问题的反演。

表 0.1 不同问题目标函数收敛到 10^{-14} 时各种方法所需的迭代次数

问题	1	2	3	4	5	6	7
Marquardt 法	92	72	49	98	103	61	21
BK 法	99	59	11	13	15	1	1
改进的 BK 法	26	103	10	14	15	1	1

三、研究的意义、内容及特点

对应用地球物理数值模拟、数据解释的研究的主要意义如下：

1. 系统地研究应用地球物理数值模拟方法，在此基础上提出一种精度较高的数值模拟新方法。该方法能扩大对复杂地球物理问题的模拟能力，缩小问题的计算规模。

2. 该方法可用于系统地计算各种地球物理模型物理场的分布规律和异常特征。进而探讨应用地球物理的新技术、新方法。同时对现有的物理模拟和近似计算方法提供客观的检验。

3. 这种数值模拟方法不仅为应用地球物理二维半问题的数据反演提供了良好的前提，而且为三维地球物理问题的正、反演实现奠定了坚实的基础。

4. 在研究改进的阻尼最小二乘法（简称 MD 法）进行二维反演的同时，引进和发展 BK 反演法，在微机上实现二维反演，在微机上实现二维反演解释以便于野外实际资料的处理，进而提高解释水平增强应用地球物理勘探的地质效果。

5. 本文研究数值模拟方法，适应能力强，应用范围广，它既适应于应用地球物理数值模拟和数据解释，又有利于地学中其它分支的正、反演研究。

本文研究的主要内容有两部分。第一部分为迭代有限元法的系统研究。主要推导适应于应用地球物理二维半问题正演模拟计算的迭代公式，研究符合实际的、切实可行的网格剖分类型和剖分方法，并详细讨论了不同网格类型的剖分方法对模拟精度的影响以及傅氏

变换波数的优化选取。在建立教学模型的基础上，编制二维半迭代有限元法正演模拟程序。应用该程序对不同地球物理模型进行试算，并与其解析解比较，分析该方法的可行性和实用性。第二部分为二维半问题的反演研究。在研究改进的阻尼最小二乘法（MD法）在二维反演解释中应用的同时，引进和发展BK反演法，探讨有效的、稳定的自动反演方法并编制MD法、BK法反演程序、在微机上实现电法勘探二维反演。

本文研究的正演模拟方法同国内外研究的应用地球物理数值模拟方法相比较，具有以下特点。

1. 精度高。试算表明这种方法比国内外常规的有限单元法模拟精度高（至少能提高一个数量级）。

2. 占用内存小，内区处理速度快。便于在微机上开发利用。

3. 模拟能力强。它不仅能对复杂地球物理模型的内区进行详细剖分，而且对各种各样的具有地球模型特征的外区也能进行很好地刻划。

4. 适应性强，应用范围广。它不仅适应于地球物理的各个分支，而且适应于地学领域其它学科其似场问题的正、反演。

本文研究的二维反演新方法BK法同国外Lun—Tan Tong（1990），Yutaka Sasaki（1989），A. C. Tripp（1984）等人采用的反演法相比，主要有两个特点：

1. 反演速度快。拟合反演的正演计算中，我们采用迭代有限元法，而国外学者采用有限差分法（Coggon，1971）和有限单元法（Rijo，1977）。

2. 反演断面能力强。反演过程中，我们对内区反演的同时，考虑了外区介质的影响，而Tripp等人只考虑场分布区域中反演目标的一个“窗口”。

第一章 迭代有限元法的基本原理

目前，用于解地球物理场及其它复杂场的问题最常用的方法是有限单元法、有限差分法、积分方程法和边界单元法等。这些数值计算方法非常适应于具有封闭边界的有限区域，但是许多地球物理场问题其边界不是封闭的，或者说其边界位于无穷远处。对于这样开区边界的场问题，前人通过建立强加边界条件和混合边界条件，把无限区域化为有限区域，通过常规的数值计算方法（如有限单元法）求解场问题。而迭代有限元法解场问题的基本原理与有限单元法相同，其方法各异。迭代有限元法在数值模拟时把场分布的区域划分为外区和内区，即边界区和算区。在外区采用迭代算法，也就是说，外区通过适应的网格部分、迭代消环等过程，把外区的场能量集中在内区的边界节点上，在内区采用常规的算法。然后通过内、外区边界的协调处理，使求解场问题得到简化。

一、外区网格的剖分

对任意开区场问题，用数值方法求解时要对所考虑的区域进行网格剖分。如图 1.1 所示把场的分布区域划分为内区 R_1 和外区 R_2 ，内区和外区的公共边界为 Γ_0 。在 Γ_0 边界外依次取同心环状边界 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ 后，相应地构成环形区域 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ ，并假设环形区域节点上的场值为 U_1, U_2, \dots, U_n 。这样得到一系列向外延伸的环带，这些环带不同程度地分布着场的能量。当采用特殊的网格剖分时，即把外区划分为同心的、几何上相似的、且各节点数不变的向外扩张的环状时，可利用迭代算法逐渐消去各环带中节点的场值，而各环带节点上的场能量逐渐集中在内区边界节点上。由于各环带上节点的数目不变，因此在迭代消环处理过程中，当外边界逐渐向外移运时，矩阵的阶数并不增加。矩阵的规模只与内区与外区公共边界节点的数目有关，而与外区大小或者说外区环带的多少无

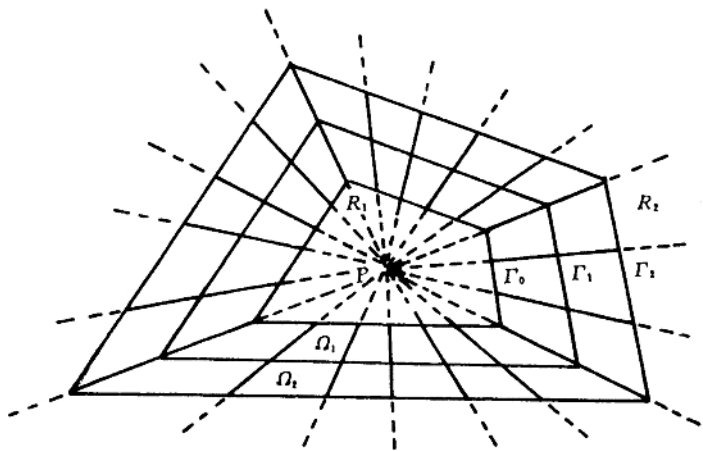


图 1.1 内区和前两层外区剖分示意图

关。

考虑到包围内区 R_1 并邻近内区 R_1 的环形区域 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i$ (Ω_1 内边界 Γ_0 是内区 R_1 的外边界), 要使环形区域的剖分网格适应于迭代消环处理, 环形区域 Ω_i 必须满足下列条件 (Charlos W. Steele, 1987):

(1) 存在一点 P , 使得封闭的内、外边界成星形状。也就是说从 P 点发出的射线只与内、外边界各相交一点。如图 1.1 所示。

(2) 在内边界每一节点上:

$$X_n^{(1)} = (x_n, y_n)^{(1)}$$

与外边界相应的节点 $X_n^{(2)}$ 满足:

$$X_n^{(2)} = K X_n^{(1)}$$

式中: K 为投影比例常数。

(3) 在每一环形区域中, 场必须满足 Laplace 方程。

假设 Γ_0 边界上的节点数为 N , 在环域 Ω_1 的边界节点的编号取为:

$$P_j \sim P_{j+N} \quad (j \leq N)$$

那么, 在环域 Ω_1 内可得到 $2N \times 2N$ Dirichlet 矩阵 $K^{0,1}$ 。在第二环区 Ω_2 中采用同样的方法进行单元划分, 得到的单元的几何尺寸是相应单元的 K 倍。同时在环域 Ω_2 中有类于 Ω_1 区内相同大小的矩阵 $K^{1,2}$ 。我们还可以注意到环区 Ω_1 的外边界 Γ_1 和环区 Ω_2 的内边界 Γ_1 是公共边界, 因此对于 Ω_1 区和 Ω_2 区可通过消去它们的公共边界得到重新组合, 形成新的矩阵 $K^{0,2}$ 。尽管矩阵的非零元素增加了, 但其阶数仍为 $2N \times 2N$ 。这个新的矩阵 $K^{0,2}$ 包含了矩阵 $K^{0,1}$ 和矩阵 $K^{1,2}$ 的全部信息。在第三环区 Ω_3 中, 它的内边界就是第二环区 Ω_2 的外边界。以同样的方法划分单元, 单元的几何尺寸为内环单元几何尺寸的 K^2 倍。再通过消环重新组合, 形成的矩阵仍为 $2N \times 2N$ 。这样通过逐环消元, 比例常数按某种方式逐次增加, 外边界逐渐向外移动直至最外层边界达到物理上的无穷远。比如 $1cm^2$ 的内区, 当 K 取为 1.5 且按指数幂增加时, 外区各环比例常数为:

$$1.50, 2.25, 5.06, 25.6, 675, 43.1E+04, 1.86E+11, 3.64E+22$$

这样迭代 7 次后, 外层边界就可达到 36623 光年。

二、外区递推公式的推导

如图 1.2 所示, 算区 R_1 的外边界 Γ_0 按比例常数 $K > 1$ 划分为 M 个不同的环形区域, 即 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ 。每个区域的外边界依次为 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ 。设 Γ_0 边界节点上场的列向量为 U_0 , Γ_{i-1} 边界上场的列向量为 U_{i-1} , Γ_{i-1} 边界与 Γ_i 边界所夹区域节点上场的列向量为 $U^{(i-1)}$, 相应的环域节点上的系数矩阵为 $K^{(i-1)}$ 。由于在外区场满足 Laplace 方程:

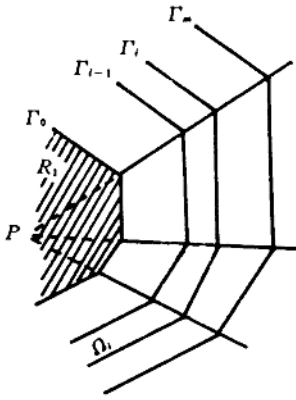


图 1.2 外区 \$m\$ 个环域剖分示意图

$$\nabla^2 U = 0 \quad (1.1)$$

因此在任一环域 \$\Omega_i\$ 中有:

$$[U^{i-1, \sigma}] = [U_{i-1}^T, U_i^T]^T \quad (1.2)$$

把 \$K^{i-1, \sigma}\$ 用分块矩阵表示, 即

$$K^{i-1, \sigma} = \begin{pmatrix} K_{11}^{i-1, \sigma} & K_{12}^{i-1, \sigma} \\ K_{21}^{i-1, \sigma} & K_{22}^{i-1, \sigma} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

在 \$\Omega_{i-1}\$ 区和 \$\Omega_i\$ 区有:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{0, i-1} & K_{12}^{0, i-1} \\ K_{21}^{0, i-1} & K_{22}^{0, i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{i-1} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.4)$$

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{i-1, \sigma} & K_{12}^{i-1, \sigma} \\ K_{21}^{i-1, \sigma} & K_{22}^{i-1, \sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i-1} \\ U_i \end{pmatrix} = 0 \quad (1.5)$$

合并 (1.5) 式和 (1.6) 式, 得:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{0, i-1} & K_{12}^{0, i-1} & 0 \\ K_{21}^{0, i-1} & K_{22}^{0, i-1} + K_{11}^{i-1, \sigma} & K_{12}^{i-1, \sigma} \\ 0 & K_{21}^{i-1, \sigma} & K_{22}^{i-1, \sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_{i-1} \\ U_i \end{pmatrix} = 0 \quad (1.6)$$

由 (1.6) 式得:

$$U_{i-1} = - (A^{i-1})^{-1} K_{21}^{0, i-1} U_0 - (A^{i-1})^{-1} K_{12}^{i-1, \sigma} U_i \quad (1.7)$$

式中: $A^{i-1} = K_{22}^{0, i-1} + K_{11}^{i-1, \sigma}$ (1.8)

把 (1.7) 式代入 (1.6) 式消去 \$U_{i-1}\$ 有:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{0, i-1} - K_{12}^{0, i-1} (A^{i-1})^{-1} K_{21}^{0, i-1} & -K_{12}^{0, i-1} (A^{i-1})^{-1} K_{12}^{i-1, \sigma} \\ -K_{21}^{i-1, \sigma} (A^{i-1})^{-1} K_{21}^{0, i-1} & K_{22}^{i-1, \sigma} - K_{21}^{i-1, \sigma} (A^{i-1})^{-1} K_{12}^{i-1, \sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_i \end{pmatrix} = 0 \quad (1.9)$$

取:

$$K^{0,i} = \begin{pmatrix} K_{11}^{0,i} & K_{12}^{0,i} \\ K_{21}^{0,i} & K_{22}^{0,i} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

那么 (1.9) 式为:

$$K^{0,i} U^{0,i} = 0 \quad (1.11)$$

即:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{0,i} & K_{12}^{0,i} \\ K_{21}^{0,i} & K_{22}^{0,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_i \end{pmatrix} = 0$$

式中:

$$\begin{cases} K_{11}^{0,i} = K_{11}^{0,i-1} - K_{12}^{0,i-1} (A^{i-1})^{-1} K_{21}^{0,i-1} \\ K_{12}^{0,i} = -K_{12}^{0,i-1} (A^{i-1})^{-1} K_{22}^{0,i-1} \\ K_{21}^{0,i} = -K_{21}^{0,i-1} (A^{i-1})^{-1} K_{22}^{0,i-1} \\ K_{22}^{0,i} = K_{22}^{0,i-1} - K_{21}^{0,i-1} (A^{i-1})^{-1} K_{12}^{0,i-1} \\ A = K_{22}^{0,i-1} + K_{11}^{0,i-1} \quad (i=1, 2, \dots, m) \end{cases} \quad (1.12)$$

(1.12) 式就是迭代有限元外区迭代公式。由 (1.12) 式就可对外区进行消环处理, 直至最外层边界上场能量忽略不计为止。当 Γ_m 趋于无穷远时, $U_m = C$ (C 为常矢量) 由于

$$K^{0,m} U^{0,m} = 0 \quad (1.13)$$

所以从 (1.13) 式得:

$$[K_{11}^{0,m} - K_{12}^{0,m} (K_{22}^{0,m})^{-1} K_{21}^{0,m}] U_0 = 0 \quad (1.14)$$

上面已求出外区系数矩阵, 合并内、外区系数矩阵得到总体刚度矩阵。通过解相应问题的方程组, 便可计算出内区各节点上的场值。若要了解外区场的分布情况, 可以从内区节点对外区节点的场值进行回代。回代公式由 (1.7) 式给出, 其中 $(A^{i-1})^{-1} K_{12}^{0,i-1}$ 和 $(A^{i-1})^{-1} K_{21}^{0,i-1}$ 可由 (1.12) 得到。具体计算时, 可在消环过程中存贮这些中间结果以便回代计算。

三、计算量和计算精度的定性估计

假设迭代有限元法模拟算区外边界节点数为 N , 那么外区计算每迭代一次需计算 4 个 $N \times N$ 阶矩阵。若网格采用均匀剖分, 且矩阵没有采用稀疏化, 那么迭代过程的计算量随 N^3 变化。如果内区纵向节点数为 M , 那么内区计算量与 M^6 成正比。采用较好的稀疏技术可降低一阶——三阶的计算量。因此内区计算量在 $M^4 \sim M^6$ 之间。迭代有限元法的迭代消元过程采用解析表达式, 它不会因消元过程而降低模拟精度。同有限单元法相比, 迭代有限元法的外区最外层边界可向外移动直至物理上的无穷远, 它基本不受截断误差的影响, 因

此迭代有限法元的计算精度比有限单元法的计算精度高。关于计算精度、计算量等问题将在后面章节详细讨论。

第二章 二维地电构造中点源场的迭代有限元法

迭代有限元法是求解场变分问题的数值计算方法。它求解场的步骤是先把场满足的微分方程边值问题等价地化为相应的变分问题，然后对场的分布区域网格剖分、变分问题的离散化导出以各节点场值为变量的高阶线性方程组，最后解方程，得到地下半空间场的分布。

迭代有限元法解稳定电流场问题的基本原理与有限单元法相同，都是根据场的能量最小原理，导出场的变分方程。而区域划分、网格剖分以及外区消元处理等与有限单元法有很大的差别，因此有必要对迭代有限元法求解稳定电流场的方法、步骤作一详细讨论。

一、稳定电流场微分方程的边值问题 及其相应的变分问题

取三维笛卡尔坐标系的 X 轴为垂直于地质体走向的方向， Y 轴为地质体走向的方向， Z 轴垂直向下。设点电流源位于 $A(x_A, y_A, z_A)$ 点，根据稳定电流场满足的基本方程和边界条件有：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma \frac{\partial U}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma \frac{\partial U}{\partial z}) = -I\delta(x-x_A)\delta(y-y_A)\delta(z-z_A) \\ \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{z=0} = 0 \\ (\eta U + \frac{\partial U}{\partial n}) \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

式中： U 为电位， σ 为介质电导率， η 是与修正贝塞尔函数有关的量。

对于点源二维问题，介质的电导率是二维分布，而场源是三维分布。为了使问题简化，我们把三维问题通过傅氏变换化为二维问题。由于电位 U 是关于 Y 轴的偶函数，故取余弦傅氏变换对：

$$\begin{cases} F(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx \\ f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda \end{cases} \quad (2.2)$$

对(2.1)式取傅氏变换，得